

# Rechenmethoden

Priv.-Doz. Dr. M. Buballa  
M. Schramm



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

---

Sommersemester 2016

13. Übungsblatt

6./8. Juli 2016

---

## Aufgabe P33:

---

Lösen Sie die folgenden homogenen Differenzialgleichungen mit der Methode *Trennung der Variablen*

a)  $y' + ax^2 = 0, \quad y(0) = b.$

b)  $y' + ay^2 = 0, \quad y(0) = b.$

Diese Differenzialgleichung ist zwar nicht linear, die Methode funktioniert aber trotzdem.

c)  $y' + axy = 0, \quad y(0) = b.$

Dabei ist  $y' = \frac{dy}{dx}$ .

Überprüfen Sie jeweils Ihre Ergebnisse durch Einsetzen in die ursprüngliche Gleichung.

---

## Aufgabe P34:

---

Ein Ball mit Masse  $m$  wird zum Zeitpunkt  $t = 0$  mit der Anfangsgeschwindigkeit  $\vec{v}_0$  in die Luft geworfen. Anschließend bewegt er sich unter dem Einfluss der auf ihn wirkenden Kraft  $\vec{F}$  gemäß des 2. Newton'schen Gesetzes  $\vec{F} = m\vec{v}$ . Die Kraft  $\vec{F}$  setzt sich aus der Schwerkraft  $\vec{F}_G$  und der Reibungskraft  $\vec{F}_R$  durch den Luftwiderstand zusammen, wobei letztere proportional zur Momentangeschwindigkeit sei

$$\vec{F} = \vec{F}_G + \vec{F}_R, \quad \vec{F}_G = -mg\vec{e}_z, \quad \vec{F}_R = -k\vec{v}.$$

Dabei sind die Schwerebeschleunigung  $g$  und der Reibungskoeffizient  $k$  Konstanten.

a) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit  $\vec{v}$  des Balls als Funktion der Zeit  $t$ .

*Hinweis:* Beseitigen Sie die Inhomogenität der Differenzialgleichung durch eine geeignete Substitution.

b) Wo befindet sich der Ball zur Zeit  $t$ , wenn er zur Zeit  $t = 0$  am Koordinatenursprung abgeworfen wurde?

---

**Aufgabe H38: (5 Punkte)**

---

Lösen Sie die folgenden homogenen Differenzialgleichungen mit der Methode *Trennung der Variablen*

a)  $y' + y \sin x = 0, \quad y(\pi) = 1.$

b)  $y' + \frac{y}{x} = 0, \quad y(1) = 1.$

c)  $y' y - 2x = 0, \quad y(0) = 1.$

Dabei ist  $y' = \frac{dy}{dx}$ .

Überprüfen Sie jeweils Ihre Ergebnisse durch Einsetzen in die ursprüngliche Gleichung.

---

**Aufgabe H39: (4 Punkte)**

---

Lösen Sie die inhomogenen Differenzialgleichung

$$y' + y \cos x = \cos x, \quad y(0) = 0.$$

Suchen Sie dazu zunächst die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differenzialgleichung und ersetzen Sie dann die Integrationskonstante durch eine  $x$ -Abhängige Funktion (*Variation der Konstanten*).

---

**Aufgabe H40: (4 Punkte)**

---

Wiederholen Sie Aufgabe P34 a) für die  $z$ -Komponente der Geschwindigkeit unter Verwendung der Methode *Variation der Konstanten*.

---

**Aufgabe H41: (2 Punkte)**

---

Bei radioaktivem Zerfall ist die Änderung  $dN$  der Anzahl der Atome  $N(t)$  in einem infinitesimalen Zeitintervall  $dt$  direkt proportional zur Anzahl der vorhandenen Kerne mit einem Proportionalitätsfaktor  $\alpha$ .

Stellen Sie die Differenzialgleichung auf und lösen Sie diese unter der Annahme, dass zum Zeitpunkt  $t = 0$   $N_0$  Kerne vorhanden sind. Wie groß ist die Halbwertszeit  $t_{1/2}$ , nach der nur noch die Hälfte der Kerne vorhanden sind?

---