Rechenmethoden

Priv.-Doz. Dr. M. Buballa
M. Schramm

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2016
5. Übungsblatt 11./13. Mai 2016

Aufgabe P14:

a) Berechnen Sie $\vec{\nabla} r$ mit $r = |\vec{r}|$.

b) Sei $\phi(\vec{r}) = f(r)$ eine Funktion, die nur von r abhängt. Berechnen Sie $\vec{\nabla}\phi(\vec{r})$.

c) Berechnen Sie $\vec{\nabla}(r^{\alpha})$.

d) Berechnen Sie $\vec{\nabla} \log(\frac{r}{a})$ mit $a > 0$.

Aufgabe P15:

Ein Raum wird durch einen Ofen ungleichmäßig aufgeheizt und kühlt nach dem Abschalten des Ofens langsam ab. Die resultierende raum- und zeitabhängige Temperaturverteilung werde durch die Funktion

$$T(\vec{r}, t) = T_0 e^{-(x^2+y^2)/a^2} e^{z/b} e^{-t/\tau}$$

beschrieben, wobei T_0, a, b und τ Konstanten sind. Durch den Raum bewege sich eine Fliege, deren Bahn durch die Funktion

$$\vec{r}(t) = R\cos(\omega t)\vec{e}_x + R\sin(\omega t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z$$

gegeben sei. Dabei sind R und ω Konstanten und $z(t)$ zunächst eine beliebige Funktion.

a) Wie groß ist die Temperaturänderung pro Zeit $\frac{dT}{dt}$, die die Fliege zum Zeitpunkt t verspürt?

b) Es sei $z(0) = 0$. Leiten Sie aus a) eine Funktion $z(t)$ her, für die die Temperatur am Ort der Fliege konstant bleibt.

c) Überprüfen Sie das Ergebnis indem Sie die gefundene Bahnkurve direkt in die Funktion $T(\vec{r}, t)$ einsetzen.

Aufgabe P16:

Wir betrachten die Funktion

$$f(x, y) = 3x\sin(\pi y).$$

Zeichnen Sie die Höhenlinien für die Funktionswerte 1, 2 und 5 und berechnen Sie den Gradienten der Funktion. In welche Richtung zeigt der Gradient entlang der Höhenlinien?

Aufgabe H16: (2 Punkte)

Gegeben Seien die Funktionen

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad g(x,y) = -x^2y^2.$$

a) Skizzieren Sie die Höhenlinien der Funktionen.

b) Berechnen Sie die Gradienten $\vec{\nabla} f(x,y)$ und $\vec{\nabla} g(x,y)$.

c) Zeichnen Sie die Gradienten in die Skizze mit den Höhenlinien ein. Welche Richtung hat der Gradient?

Aufgabe H17: (13 Punkte)

Ein Teilchen mit Ladung q und Masse m bewege sich durch ein konstantes homogenes Magnetfeld $\vec{B}$ und erfährt dabei eine Lorentz-Kraft $\vec{F}(t) = q\vec{v}(t) \times \vec{B}$, die es auf einer Spiralbahn

$$\vec{r}(t) = R\cos(\omega t)\vec{e}_x + R\sin(\omega t)\vec{e}_y + v_z t\vec{e}_z$$

zwingt. Dabei bezeichnet t die Zeit, $R > 0$, ω und v_z von null verschiedene Konstanten.

a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$ und die Beschleunigung $\vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ des Teilchens sowie deren Beträge v und a.

b) Zeigen Sie, dass die kinetische Energie $T = \frac{1}{2}m\vec{v}^2$ zeitlich konstant bleibt.

c) Zeigen Sie mit Hilfe des 2. Newton'schen Gesetzes $\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$, dass das Magnetfeld in z-Richtung zeigt. Geben Sie q/m als Funktion von $|\vec{B}|$ und ω an.

d) Zeigen Sie, dass das Magnetfeld an der Ladung keine Arbeit verrichtet (in Übereinstimmung mit Aufgabe b)).
Hinweis: Berechnen Sie die Leistung $\frac{dW}{dt}$. Dabei ist $dW = \vec{F}\cdot d\vec{r}$ die auf dem infinitesimalen Wegstück $d\vec{r}$ verrichtete Arbeit.

Mit Hilfe der Vektoren $\vec{v}(t)$ und $\vec{a}(t)$ kann ein zeitabhängiges orthogonales Koordinatensystem definiert werden, das sich mit der Ladung entlang der Bahn bewegt

$$\vec{e}_t = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}, \qquad \vec{e}_n = \frac{\vec{e}_t \times (\vec{a} \times \vec{e}_t)}{|\vec{e}_t \times (\vec{a} \times \vec{e}_t)|}, \qquad \vec{e}_b = \vec{e}_t \times \vec{e}_n$$

(*Tangentialvektor*, *Normalenvektor* und *Binomialvektor*).

e) Betrachten Sie zunächst beliebige Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{a}$ und berechnen Sie ihre Komponenten bezüglich $\vec{e}_t$, $\vec{e}_n$ und $\vec{e}_b$. Geben Sie die Ergebnisse als Funktionen der Beträge und des Relativwinkels φ von $\vec{v}$ und $\vec{a}$ an.
Hinweis: Um einen Vektor $\vec{x}$ in einem anderen Koordinatensystem auszudrücken, muss man die Projektion auf die neuen Einheitsvektoren betrachten. Man erhält, mit neuen Basisvektoren $\vec{e}_i$ $(i = 1,2,3)$:

$$\vec{x} = (\vec{x}\cdot\vec{e}_1)\vec{e}_1 + (\vec{x}\cdot\vec{e}_2)\vec{e}_2 + (\vec{x}\cdot\vec{e}_3)\vec{e}_3.$$

f) Bestimmen Sie $\vec{e}_t(t)$, $\vec{e}_n(t)$ und $\vec{e}_b(t)$ für das obige Beispiel der Ladung im Magnetfeld.