
Regulatorabhängigkeit des Phasenübergangs im NJL-Modell in 3+1 Dimensionen

Bachelor-Thesis von Patrick Fabian Falk

Tag der Einreichung: 7. September 2021

1. Gutachten: Priv. Doz. Dr. Michael Buballa
2. Gutachten: Lennart Kurth, M.Sc.



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Fachbereich Physik
Institut für Kernphysik
Arbeitsgruppe für Kerne,
Hadronen & Quarks

Inhaltsverzeichnis

1	Zusammenfassung	2
2	Einführung	3
3	Das Nambu-Jona-Lasinio Modell	6
3.1	Die NJL Lagrange-Dichte	6
3.2	Die Gap-Gleichung	7
3.3	Das Thermodynamische Potential	9
3.4	Regularisierungen der Gap-Gleichung und des großkanonischen Potentials	10
3.4.1	Die Cut-Off Regularisierung	10
3.4.2	Die Pauli-Villars Regularisierung	11
4	Eigenschaften der entstehenden Mesonen	13
4.1	Die Pion-Masse	13
4.2	Die Pion-Zerfallskonstante	16
5	Die Ginsburg-Landau Analyse	19
6	Erstellung der Parameter-Sets und Phasendiagramme	23
6.1	Chiraler Limes	23
6.1.1	Cut-Off Regularisierung	23
6.1.2	Pauli-Villars Regularisierung	26
6.2	Nicht-verschwindende nackte Quark-Masse	29
6.2.1	Cut-Off Regularisierung	29
6.2.2	Pauli-Villars Regularisierung	31
7	Fazit und Ausblick	33
8	Quellenangabe	34
8.1	Literatur	34
8.2	Abbildungen	35
8.3	Hilfsmittel	35
9	Erklärung zur Abschlussarbeit	36

1 Zusammenfassung

Diese Bachelor-Thesis beschäftigt sich mit der Berechnung von Parameter-Sets und der Erstellung von Plots der Phasenübergänge zum Quark-Gluon-Plasma im QCD-Phasendiagramm inklusive kritischer Endpunkte.

Die numerische Auswertung erfolgt dabei auf Grundlage des Nambu-Jona-Lasinio Modells mit zwei Quark-Flavours und des daraus folgenden thermodynamischen Potentials und der Gap-Gleichung. Da manche vorkommende Integrale divergieren, müssen diese regularisiert werden. Von den verschiedenen möglichen Regularisierungs-Schemata stehen dabei für 3 + 1-Dimensionen die Cut-Off Regularisierung und die Pauli-Villars Regularisierung im Vordergrund, welche am häufigsten verwendet werden.

Als Observablen des untersuchten Quark-Gases werden die Konstituenten-Masse M der Quarks und die Pion-Zerfallskonstante f_π der Pionen als realistische Startwerte vorgegeben, um die nackte Quark-Masse m sowie den Kopplungs-Faktor g als Parameter zu berechnen, wobei diese alle im weiteren Verlauf mit dem Cut-Off Parameter Λ der jeweiligen Regularisierung durch dessen schrittweise Erhöhung variiert werden können.

Die Lage der Phasengrenzen und des kritischen Endpunktes wird mit Hilfe der Ginsburg-Landau Analyse ermittelt und alle Betrachtungen werden sowohl im chiralen Limes, als auch für nicht-verschwindende nackte Quark-Massen jeweils unter Verwendung der Cut-Off bzw. der Pauli-Villars Regularisierung durchgeführt, um die Gemeinsamkeiten und Unterschiede der Regularisierungen gegenüber zu stellen und deren Einfluss auf die Modell-Parameter zu ermitteln.

In der numerischen Auswertung hat sich ergeben, dass sich die Regularisierungen zwar in den Startwerten leicht unterscheiden, das Verhalten der Parameter an sich jedoch gleich ist. Dabei nehmen Kopplungs-Faktor, Konstituenten-Masse und nackte Quark-Masse ab und die Pion-Zerfallskonstante mit wachsendem Cut-Off zu. Für unendlich großen Cut-Off Parameter gilt: $\lim_{\Lambda_{\text{co}} \rightarrow \infty} g_{\text{co}} = \frac{\pi^2}{6}$ und $\lim_{\Lambda_{\text{pv}} \rightarrow \infty} g_{\text{pv}} = \frac{\pi^2}{9 \ln(\frac{4}{3})}$, sowie unabhängig von der Regularisierung: $\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} M = 0$ für $f_\pi = \text{const}$, $\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} f_\pi = \infty$ für $M = \text{const}$ und in jedem Fall $\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} m = 0$, sodass immer der chirale Limes vorliegt und das Modell damit als nicht-renormierbar eingestuft wird.

Die Phasengrenze bewegt sich im T - μ -Diagramm bei Pauli-Villars langsamer vom Ursprung weg und der kritische Endpunkt verschwindet später als bei der Cut-Off Regularisierung und für beliebig hohe Λ befindet sie sich im Unendlichen.

2 Einführung

Die kleinsten Bausteine der Materie sind die Elementarteilchen. Durch die vier fundamentalen Wechselwirkungen - die elektromagnetische Wechselwirkung, die schwache und starke Wechselwirkung und die Gravitation - werden diese zusammengehalten und bilden die Atome, aus denen wiederum die Materie aufgebaut ist. Auf der Größen- und Massenskala von subatomaren Teilchen überwiegt die starke Wechselwirkung, gefolgt von der elektromagnetischen und der schwachen Wechselwirkung, während die Gravitation bei Massen von Elementarteilchen um einiges schwächer und daher sogar zu vernachlässigen ist. Allerdings besitzen starke und schwache Wechselwirkung nur eine sehr geringe Reichweite im Femtometer-Bereich, wohingegen die anderen beiden in ihrem Einflussbereich nicht beschränkt sind, weshalb wir in unserer makroskopischen Welt nur die elektromagnetische Wechselwirkung und die Gravitation erfahren. Dennoch spielt vor Allem die starke Wechselwirkung eine große Rolle in der Bildung von Atomkernen, da sich ohne sie Teilchen gleicher Ladung über die elektromagnetische Wechselwirkung abstoßen und keine gebundenen Zustände von Protonen und Neutronen ermöglichen würden. [1, S. 59 f.]

Im Standardmodell der Elementarteilchen, siehe Abbildung 2.1, geschieht die erste Einteilung in Abhängigkeit vom jeweiligen Spin der Teilchen, und zwar in Bosonen und Fermionen, wobei Fermionen einen halbzahligem und Bosonen einen ganzzahligen Spin besitzen.

Die bosonischen Elementarteilchen, zu denen das Photon, die W- und Z-Bosonen sowie das Gluon als Eichbosonen und das Higgs-Boson zählen, dienen dabei als Austauschteilchen und ermöglichen erst die Wechselwirkungen zwischen den Fermionen.

Diese sind wiederum aufgeteilt in Leptonen, darunter das Elektron, das Myon, das Tauon und deren Neutrinos, und in Quarks, denen je nach Masse sogenannte Flavours zugeordnet werden: Up, Down, Strange, Charm, Bottom und Top. Während die Leptonen nur der elektromagnetischen und der schwachen Wechselwirkung unterliegen, wechselwirken Quarks auch mit Hilfe der starken Wechselwirkung, deren Austauschboson das Gluon ist. Ähnlich der elektrischen Ladung bei der elektromagnetischen Wechselwirkung besitzt jedes Quark zusätzlich eine Farbladung, die beschreibt wie es sich unter der starken Wechselwirkung verhält. Im Gegensatz zu Photonen können Gluonen aber diese Farbladung zwischen einzelnen Quarks übertragen. Der Bereich der Quantenfeldtheorie, welcher sich mit der starken Wechselwirkung und der Farbladung befasst, nennt sich die Quantenchromodynamik (QCD). [1, S. 49 ff., S. 66 ff.]

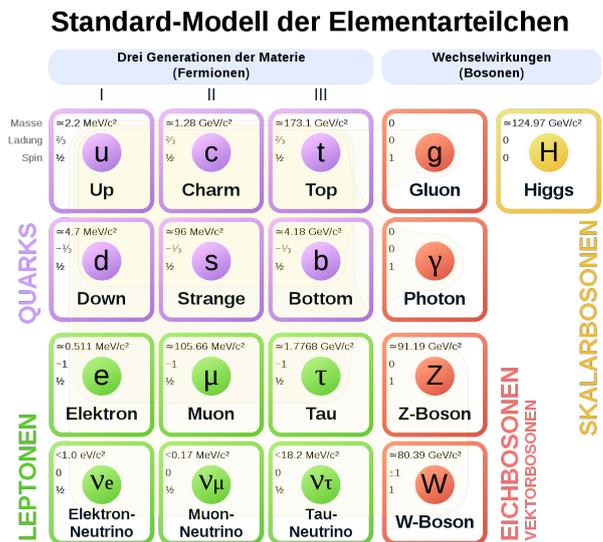


Abbildung 2.1: Einteilung der Elementarteilchen [17]

Zusammengesetzt bilden Quarks die Hadronen, wobei Baryonen aus drei Quarks und Mesonen aus einem Quark-Antiquark-Paar bestehen. So besteht beispielsweise ein Proton aus zwei Up- und einem Down-Quark und ein Neutron aus zwei Down- und einem Up-Quark. Versuche, Quarks voneinander zu trennen und zu isolieren, resultierten nur in der spontanen Bildung eines Quark-Antiquark-Paares. Dieses Phänomen der QCD ist als Confinement bekannt und legt fest, dass Quarks und Gluonen und generell Teilchen mit einer Farbladung nie einzeln auftreten können und zusammengesetzt nach außen hin farblich neutral oder weiß erscheinen. Dies führte zur Einführung von insgesamt drei Farbladungen: blau, grün und rot sowie deren Antifarben gelb, magenta und cyan. Demnach haben die Quarks in Mesonen

eine Farbe und deren Antifarbe und die in Baryonen alle drei verschiedenen Komponenten inne.

[1, S. 37 ff., S. 66 ff.]

Die Masse der Hadronen setzt sich aus der Masse der Konstituenten-Quarks zusammen, aus denen jene bestehen. Bei Protonen und Neutronen etwa mit einer Masse von rund 940 MeV sind das jeweils 313 MeV. Konstituenten-Quarks sind dabei jedoch keine Teilchen an sich, sondern beinhalten in ihrer effektiven Konstituenten-Masse M bereits die zusätzliche Feldenergie, welche auf Wechselwirkungen mit den Gluonen und sogenannten virtuellen Seequarks, die durch Quantenfluktuationen gebildet und vernichtet werden, zurückzuführen ist. Die eigentlichen, "nackten" Quarks, die Valenzquarks, haben dagegen nur eine sehr geringe Masse m von einigen MeV, sodass die Gesamtmasse der Hadronen aus den Wechselwirkungen im Quark-Gluon-System entsteht und letztendlich viel größer ist als die der Summe der einzelnen Quark-Massen. [1, S. 135 f.]

Die Stärke der Wechselwirkung zwischen den Quarks wird durch deren Kopplungskonstante beschrieben, die in der QCD bei steigender Energie abfällt. Dieser Effekt der asymptotischen Freiheit sorgt dafür, dass die Kräfte zwischen Quarks und Gluonen bei größeren Abständen und kleinen Energien stärker werden, woraus auch das Confinement hervorgeht, und bei kleinen Abständen und steigenden Energien gegen Null laufen, sodass sie sich schließlich bei extrem hohen Energien wie freie Teilchen verhalten.

[1, S. 66 ff.]

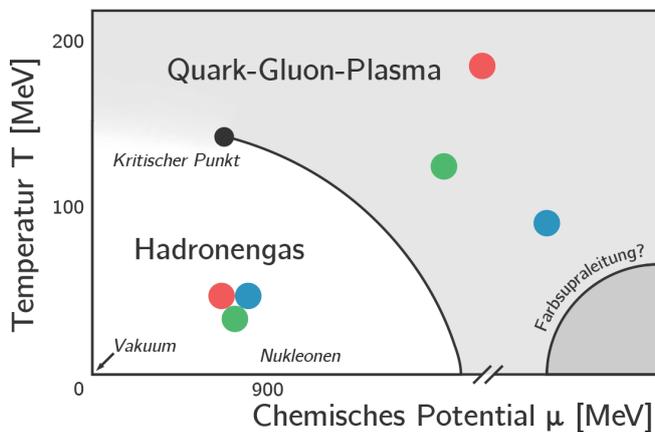


Abbildung 2.2: Exemplarisches Phasendiagramm in der Quantenchromodynamik [18]

als Phasenübergang dargestellt. Bis zu einem bestimmten kritischen Endpunkt (CEP) auf der Phasengrenze ist dieser erster Ordnung, er findet also eher sprunghaft statt, während oberhalb des kritischen Punktes zu höheren Temperaturen und niedrigeren chemischen Potentialen ein Crossover vorliegt, welcher nur in bestimmten Fällen zum kontinuierlichen Phasenübergang zweiter Ordnung wird. Zum Erreichen dieser Phasengrenze werden extrem hohe Temperaturen benötigt, wie sie zu Beginn unseres Universums herrschten, oder hohe chemische Potentiale, vergleichbar mit den Dichten in Neutronensternen. Bei noch größerem chemischen Potential und relativ geringer Temperatur existieren weiterhin inhomogene und farb-supraleitende Phasen, auf die hier jedoch nicht weiter eingegangen wird.

[2, S. 4 ff.]

Darüber hinaus werden der Einfachheit und Übersichtlichkeit halber in der gesamten Arbeit die natürlichen Einheiten verwendet, wie es meist in der Teilchenphysik üblich ist. Das heißt, das reduzierte Plancksche Wirkungsquantum \hbar , die Lichtgeschwindigkeit c , die Boltzmann-Konstante k_B und die Elektrische Feldkonstante ϵ_0 werden gleich 1 gesetzt. Damit lassen sich Massen, Temperaturen und chemische Potentiale einheitlich in Elektronenvolt angeben, wobei die Umrechnung $10^{10} \text{ K} \approx 1 \text{ MeV}$ für Temperaturen gilt.

Nachdem in Abschnitt 3 zuerst auf das Nambu-Jona-Lasinio Modell inklusive der zur Auswertung nötigen Regularisierungen eingegangen wird, befassen sich die weiteren Kapitel 4 und 5 mit den Eigenschaften der auftretenden Pionen und der Bestimmung der Phasengrenze mittels Ginsburg-Landau Analyse. Darauf folgt die numerische Auswertung 6 mit dem Ziel, die Auswirkungen der beiden verwendeten unterschiedlichen Regularisierungs-Schemata auf die hypothetische Phasengrenze im NJL-Modell zu untersuchen. Dies wird durch Variation der Regularisierungs- oder Cut-Off Parameter realisiert und mit deren anschließender Grenzwertbildung gegen Unendlich kann zusätzlich die Renormierbarkeit des Modells überprüft werden.

3 Das Nambu-Jona-Lasinio Modell

Zur vereinfachten Beschreibung der komplexen Vorgänge in der QCD wird ein entsprechendes Modell benötigt, welches das Verhalten und die Wechselwirkung zwischen den Quarks und Gluonen, die alle zusätzlich Farbladung tragen, korrekt wiedergibt. Dazu bietet sich das Nambu-Jona-Lasinio (NJL) Modell an, das schon im Jahr 1961 von Y. Nambu und G. Jona-Lasinio entwickelt wurde, inspiriert durch die BCS-Theorie zur Supraleitung vier Jahre zuvor [3] [4]. Eigentlich diente die Theorie zur Beschreibung der Wechselwirkung von Nukleonen und Mesonen, da die Existenz von Quarks und Gluonen damals noch nicht bekannt war, sodass die fundamentalen Phänomene der QCD, nämlich das Confinement und die asymptotische Freiheit, nicht direkt im Modell behandelt werden.

Außerdem gilt das Modell als nicht-renormierbar, was bedeutet, dass die zur Aufhebung von auftretenden Divergenzen in Abschnitt 3.4 eingeführten Regularisierungs-Parameter die anderen Modell-Parameter immer beeinflussen. In renormierbaren Modellen kann dieser Regularisierungs-Parameter eliminiert und die festgelegten Größen bei unendlichem Parameter reproduziert werden.

Nichtsdestotrotz kann das NJL-Modell auch auf Quarks und Gluonen unter der starken Wechselwirkung angewendet werden und gibt in guter Näherung effektiv die QCD bei niedrigen Energien wieder. Dies liegt vor Allem daran, dass das Modell Symmetrien berücksichtigt, die auch eine wichtige Rolle in der Quantenchromodynamik spielen, darunter besonders die chirale Symmetrie, auf die später eingegangen wird.

3.1 Die NJL Lagrange-Dichte

Analog zur Lagrange-Funktion der Mechanik beschreibt die Lagrange-Dichte über die Lagrange-Gleichungen die Bewegungsgleichungen von Feldern. In diesem Fall wird ein Quark-Feld betrachtet, welches vereinfacht zwei der sechs Flavours, Up und Down, enthält und damit mit den drei Farbladungen die Freiheitsgrade $N_f = 2$ und $N_c = 3$ besitzt. Dessen Lagrange-Dichte kann wie folgt angegeben werden:

$$\mathcal{L}_{\text{NJL}} = \bar{\psi} (i\not{\partial} - \underline{m}) \psi + G \left[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi)^2 \right]. \quad (3.1)$$

Der erste Term entspricht der Lagrange-Dichte der freien Dirac-Gleichung für das Quark-Feld ψ und dessen konjugierte $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_0$. Die Massenmatrix $\underline{m} = \text{diag}(m_u, m_d)$ mit den nackten Quark-Massen für Up- und Down-Quarks kann vereinfacht werden unter der Annahme, dass die im Vergleich zur Hadronen-Masse sehr leichten Quarks dieselbe Masse besitzen: $m_u = m_d = m$.

Der zweite Term steht für die Wechselwirkungen zwischen den Quarks, indem die Quark-Felder über den skalaren $(\bar{\psi}\psi)$ und den pseudoskalaren Teil $(\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi)$ miteinander und mit sich selbst wechselwirken. Dabei hängt die Stärke der Wechselwirkung von der Kopplungskonstanten G ab.

Weiterhin werden neben dem Feynman-Slash $\not{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu$ und den in $\vec{\tau}$ stehenden Pauli-Matrizen τ^i im Isospin-Raum die Dirac- bzw. Gamma-Matrizen γ^μ verwendet, wobei $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ gilt.

Diese Lagrange-Dichte ist im Allgemeinen invariant unter globalen Phasen-Transformationen $U(1)_V$, woraus nach dem Noether-Theorem die Baryonen-Zahl-Erhaltung folgt. Außerdem besteht aufgrund der Annahme gleicher Massen der Quark-Flavours eine Invarianz unter unitären vektorialen und, für den Fall $m = 0$, axialen Transformationen der Form $SU(2)_V$ und $SU(2)_A$, bei der erstere mit der Erhaltung des Isospins zusammenhängt. Beide Transformationen bilden dann die Gruppe $SU(2)_L \times SU(2)_R$ der chiralen Symmetrie.

Die Chiralität ist ein Konzept ähnlich der Helizität eines Teilchens und ist nur dann eine Erhaltungsgröße, wenn der Zustand mit dem Chiralitäts-Operator γ^5 kommutiert. Für masselose Quarks ist für \mathcal{L}_{NJL} die chirale Symmetrie erhalten, während sie bei $m \neq 0$ wegen des Terms $\bar{\psi}m\psi$ explizit verletzt wird. Der Fall $m = 0$ bzw. $m \rightarrow 0$ wird dann chiraler Limes genannt. Jedoch kommt es auch im chiralen Limes zur spontanen Symmetriebrechung, das heißt die chirale Symmetrie gilt zwar für die Lagrange-Dichte, nicht aber für den Grundzustand. An dieser Stelle tauchen die sogenannten Goldstone-Bosonen

auf, Quasiteilchen, die in Modellen mit spontaner Symmetriebrechung masselos sind. Da selbst im Fall nicht-verschwindender Quark-Masse diese äußerst klein ist, kann hier die chirale Symmetrie trotzdem näherungsweise angenommen werden, welche dann gleichzeitig explizit und spontan gebrochen wird. Dies resultiert in Pseudo-Goldstone-Bosonen, und zwar in der Modellbetrachtung mit zwei Quark-Flavours den Pionen, die nun eine ebenfalls kleine Masse von m_π besitzen. [2, S. 22 f.] [5, S. 652 ff.] [6, S. 9 f.]

3.2 Die Gap-Gleichung

Wie schon bei der Lagrange-Dichte beschrieben, wird im NJL-Modell die Wechselwirkung zwischen Quarks und Gluonen durch die skalaren und pseudoskalaren Teile als Wechselwirkung der Quarks untereinander ausgedrückt. Auf diese Weise koppeln die Quarks unter Anderem mit sich selbst, was in der Selbstenergie des Quark-Feldes resultiert und den Quarks über die Wechselwirkung die deutlich höhere Konstituenten-Masse gibt.

Um einen Zusammenhang zwischen der nackten Quark-Masse m , der effektiven Masse M und der Selbstenergie Σ herzustellen, wird ein Quark mit Impuls p durch seinen Fermion-Propagator im Feynman-Diagramm dargestellt. Ausgefüllte Pfeile stehen dabei für den vollen Propagator, während gestrichelte Pfeile den nackten Propagator beschreiben. Kreise oder Loops im Diagramm drücken immer eine Wechselwirkung zwischen den damit verbundenen Punkten aus, in diesem Fall ist das die Selbst-Wechselwirkung der Teilchen. Mehr ausführliche Informationen zu den Feynman-Graphen und deren Anwendung sind in Referenz [7, S. 32 ff., S. 47 ff., S. 187 ff.] zu finden.

Die folgende diagrammatische Gleichung ist damit so zu interpretieren, dass der volle Quark-Propagator sich aus dem nackten Propagator und der Selbstenergie zusammensetzt, die den einlaufenden nackten über die Selbst-Wechselwirkung zum auslaufenden vollen Propagator macht:

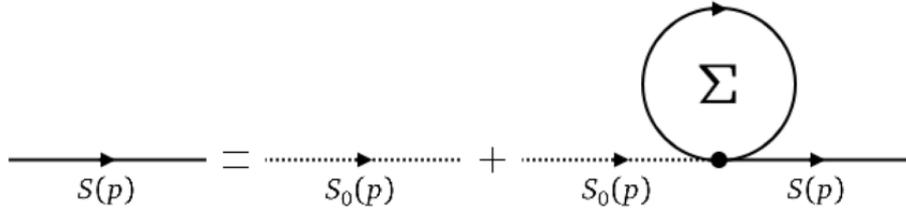


Abbildung 3.1: Diagrammatische Form der Dyson-Gleichung

Der wechselwirkungsfreie Propagator des nackten Quarks mit Masse m lautet:

$$S_0(p) = \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} = (\not{p} - m + i\epsilon)^{-1} \quad (3.2)$$

und analog der zugehörige volle Propagator des Konstituenten-Quarks mit der Konstituenten-Masse M , entstehend durch die Selbstenergie Σ :

$$S(p) = \frac{\not{p} + M}{p^2 - M^2 + i\epsilon} = (\not{p} - M + i\epsilon)^{-1} \quad (3.3)$$

mit dem Vierer-Impuls p und $\not{p} \cdot \not{p} = p^2$. Im Nenner wird jeweils die Polstelle bei $p^2 = m^2$ bzw. $p^2 = M^2$ mit Hilfe des $i\epsilon$ in der komplexen Ebene umgangen, wobei zur letztendlichen Auswertung $\epsilon \rightarrow 0$ ausgeführt werden muss.

Die sogenannte Dyson-Gleichung für Fermion-Propagatoren entspricht gerade der formellen Form der Abbildung 3.1 und lautet dementsprechend:

$$S(p) = S_0(p) + S_0(p) \Sigma S(p) \quad (3.4)$$

oder nach Multiplikation und Einsetzen der Propagatoren:

$$S_0(p)^{-1} = S(p)^{-1} + \Sigma \Rightarrow \not{p} - m + i\epsilon = \not{p} - M + i\epsilon + \Sigma \Rightarrow \Sigma = M - m. \quad (3.5)$$

Die Selbstenergie entspricht der Summation über die Spur der dyadischen Produkte aller möglichen Wechselwirkungen, das heißt dem skalaren und dem pseudoskalaren Anteil, mit dem vollen Quark-Propagator. Weiterhin wird der Loop im Feynman-Diagramm, welcher durch die Selbstenergie hervorgerufen wird, ausgewertet, indem über den Vierer-Impuls integriert wird, sodass insgesamt folgt:

$$\begin{aligned}
\Sigma &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} 2Gi \left[\mathbb{1} \text{Tr}[\mathbb{1}S(k)] + i\gamma_5 \vec{\tau} \text{Tr}[i\gamma_5 \vec{\tau}S(k)] \right] \\
&= 2Gi \left[\mathbb{1} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr}[\mathbb{1}S(k)] + i\gamma_5 \vec{\tau} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \underbrace{\text{Tr}[i\gamma_5 \vec{\tau}S(k)]}_{=0} \right] \\
&= 2Gi \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\frac{\not{k} + M}{k^2 - M^2 + i\epsilon} \right] = 2Gi \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - M^2 + i\epsilon} \text{Tr}[\gamma^\mu k_\mu + M] \\
&= 2Gi \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{4MN_f N_c}{k^2 - M^2 + i\epsilon} = 8GMN_f N_c I(M).
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Hierbei wurde verwendet, dass die Spur über eine ungerade Anzahl an Gamma-Matrizen sowie über Pauli-Matrizen verschwindet, wodurch der pseudoskalare Teil herausfällt. Die Spur über den skalaren Teil ergibt den Faktor $4N_f N_c$ wegen der Spurbildung im Dirac-Raum und der Entartung im Farb- und Flavour-Raum.

Nach Einsetzen der Einteilchen-Energie $E_{\vec{k}} = \sqrt{\vec{k}^2 + M^2}$ sowie dem infinitesimalen Ausdruck $\epsilon = 2E_{\vec{k}}\epsilon'$ unter Vernachlässigung von ϵ'^2 und Faktorisieren des Nenners kann mit Hilfe des Residuensatzes der Term $I(M)$ weiter umgeformt werden. Dazu wird entweder für die Polstelle bei $k_0 = -E_{\vec{k}} + i\epsilon'$ über einen Halbkreis in der positiven komplexen Halbebene integriert, was einen Faktor $2\pi i$ liefert, oder für die Polstelle bei $k_0 = E_{\vec{k}} - i\epsilon'$ über die negative komplexe Halbebene mit dem Vorfaktor $-2\pi i$ und zuletzt der Limes $\epsilon' \rightarrow 0$ gebildet und das Raumwinkelintegral in Kugelkoordinaten ausgeführt:

$$\begin{aligned}
I(M) &= i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - M^2 + i\epsilon} = i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int \frac{dk_0}{2\pi} \frac{1}{k_0^2 - \vec{k}^2 - M^2 + i\epsilon} \\
&= i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int \frac{dk_0}{2\pi} \frac{1}{k_0^2 - E_{\vec{k}}^2 + 2iE_{\vec{k}}\epsilon' + \epsilon'^2} = i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int \frac{dk_0}{2\pi} \frac{1}{k_0^2 - (E_{\vec{k}} - i\epsilon')^2} \\
&= i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int \frac{dk_0}{2\pi} \frac{1}{k_0 - (-E_{\vec{k}} + i\epsilon')} \frac{1}{k_0 - (E_{\vec{k}} - i\epsilon')} = i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\pi} \frac{2\pi i}{-2E_{\vec{k}}} = \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_{\vec{k}}} \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty dk \frac{k^2}{E_k}.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Schließlich folgt aus Gleichungen 3.5 und 3.6:

$$M - m = \Sigma = 8GMN_f N_c I(M) \quad \Rightarrow \quad M = m + 8GMN_f N_c I(M). \tag{3.8}$$

Analog zur BCS-Theorie wird diese Gleichung oft als Gap-Gleichung bezeichnet, da sie die Massenslücke zwischen der nackten und der effektiven Quark-Masse über die Selbstenergie schließt. Im chiralen Limes für $m = 0$ vereinfacht sich diese zu:

$$M = 8GMN_f N_c I(M). \tag{3.9}$$

[2, S. 23 f.] [5, S. 656 f.] [8, S. 700]

3.3 Das Thermodynamische Potential

Da die Gap-Gleichung immer alle möglichen Lösungen für die effektive Quark-Masse M liefert, sowohl die triviale als auch eventuell mehrere positive und negative Werte, wird ein zweites Kriterium benötigt, mit dem die korrekte Masse bestimmt werden kann. Ein solches ist das Minimum des zugehörigen thermodynamischen Potentials bei konstanter Temperatur und chemischem Potential.

Da im NJL-Modell ein offenes System unter Variation der Temperatur T und des chemischen Potentials μ der Quarks betrachtet wird, bietet es sich an, das System als großkanonisches Ensemble aufzufassen und demnach das großkanonische Potential zu verwenden. Dieses berechnet sich aus der Lagrange-Dichte, die jedoch zuvor unter Molekularfeldnäherung umgeformt wird. Dabei werden die Wechselwirkungsterme des Quark-Feldes $\bar{\psi}\psi$ durch ihre Erwartungswerte $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$ und Fluktuationen $\delta(\bar{\psi}\psi)$ ausgedrückt:

$$\bar{\psi}\psi = \langle\bar{\psi}\psi\rangle + \delta(\bar{\psi}\psi) \Rightarrow \delta(\bar{\psi}\psi) = \bar{\psi}\psi - \langle\bar{\psi}\psi\rangle, \quad (3.10)$$

woraus sich unter Vernachlässigung der quadratischen Fluktuationen $\delta(\bar{\psi}\psi)^2$ ergibt:

$$(\bar{\psi}\psi)^2 \approx \langle\bar{\psi}\psi\rangle^2 + 2\langle\bar{\psi}\psi\rangle\delta(\bar{\psi}\psi) = \langle\bar{\psi}\psi\rangle^2 + 2\langle\bar{\psi}\psi\rangle\bar{\psi}\psi - 2\langle\bar{\psi}\psi\rangle^2 = 2\langle\bar{\psi}\psi\rangle\bar{\psi}\psi - \langle\bar{\psi}\psi\rangle^2. \quad (3.11)$$

Dazu werden nun die Erwartungswerte der skalaren und pseudoskalaren Wechselwirkungsterme benötigt, die auch als Quark-Kondensate bekannt sind und gerade durch die zuvor berechneten Impulsintegrale über die Spur der vollen Quark-Propagatoren ausgedrückt werden können:

$$\langle\bar{\psi}\psi\rangle = - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr}[\mathbb{1}iS(k)] \quad , \quad \langle\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi\rangle = - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr}[i\gamma_5\vec{\tau}iS(k)]. \quad (3.12)$$

Aus dem Vergleich mit Gleichung 3.6 und der Gap-Gleichung kann $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$ umgeschrieben werden und wegen der verschwindenden Spur im zweiten Ausdruck gilt:

$$\langle\bar{\psi}\psi\rangle = -\frac{M-m}{2G} \Rightarrow M = m - 2G\langle\bar{\psi}\psi\rangle \quad , \quad \langle\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi\rangle = 0 \Rightarrow (\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi)^2 \approx 0, \quad (3.13)$$

sodass unter der Molekularfeldnäherung nur die skalare Wechselwirkung bleibt. [2, S. 24] [9, S. 3 f.] Einsetzen der hergeleiteten Ausdrücke in die Lagrange-Dichte führt zu:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{NJL}} &\approx \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - \underline{m})\psi + G \left[2\langle\bar{\psi}\psi\rangle\bar{\psi}\psi - \langle\bar{\psi}\psi\rangle^2 \right] = \bar{\psi} \left(i\cancel{\partial} - m + 2G\langle\bar{\psi}\psi\rangle \right) \psi - G\langle\bar{\psi}\psi\rangle^2 \\ &= \bar{\psi} \left(i\cancel{\partial} - \left(m - 2G\langle\bar{\psi}\psi\rangle \right) \right) \psi - G \frac{(M-m)^2}{4G^2} = \bar{\psi} (i\cancel{\partial} - M) \psi - \frac{(M-m)^2}{4G}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Diese entspricht gerade der Lagrange-Dichte der freien Dirac-Gleichung eines Teilchens mit Masse M , modifiziert mit einem Zusatzterm, der von den Quark-Feldern unabhängig ist. Dies lässt darauf schließen, dass auch das Potential das eines freien Teilchens ist plus ebendiesem Zusatzterm.

Explizit lässt sich daraus das großkanonische thermodynamische Potential herleiten, was jedoch des Umfangs halber hier nicht im Detail gemacht wird, aber analog zur Herleitung in Referenz [10] verläuft:

$$\Omega_{\text{NJL}}(T, \mu, M) = \frac{(M-m)^2}{4G} - 2N_c N_f \frac{4\pi}{(2\pi)^3} [\omega_{\text{vak}}(M) + \omega_{\text{med}}(T, \mu, M)] \quad (3.15)$$

mit dem Vakuum-Anteil

$$\omega_{\text{vak}}(M) = \int_0^\infty dk k^2 E_k \quad (3.16)$$

und der Abhängigkeit von Temperatur T und chemischem Potential μ im Medium-Anteil

$$\omega_{\text{med}}(T, \mu, M) = \int_0^\infty dk k^2 T \left[\ln \left(1 + e^{-\frac{\sqrt{k^2 + M^2} - \mu}{T}} \right) + \ln \left(1 + e^{-\frac{\sqrt{k^2 + M^2} + \mu}{T}} \right) \right], \quad (3.17)$$

welcher später nur numerisch berechnet werden kann.

Der finale Ausdruck besteht aus dem konstanten und von der effektiven Masse abhängigen Teil der Lagrange-Dichte und Beiträgen des entarteten, freien Quark-Gases mit der Einteilchen-Energie $E_k = \sqrt{k^2 + M^2}$. Der Faktor $2N_c N_f \frac{4\pi}{(2\pi)^3}$ setzt sich aus der Entartung im Spin-, Farb- und Flavour-Raum sowie Vorfaktoren der Raumwinkel-Integrale im Impulsraum zusammen.

3.4 Regularisierungen der Gap-Gleichung und des großkanonischen Potentials

Sowohl in Gleichung 3.7 bei der Herleitung der Gap-Gleichung in Abschnitt 3.2 als auch in Gleichung 3.16 im vorherigen Abschnitt 3.3 kommen mit

$$I(M) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty dk \frac{k^2}{E_k} \quad \text{und} \quad \omega_{\text{vak}}(M) = \int_0^\infty dk k^2 E_k \quad (3.18)$$

Integral-Ausdrücke vor, welche bei der rein mathematischen Ausführung des Integrals für $k \rightarrow \infty$ divergieren. Um dies zu vermeiden, werden Regularisierungen eingeführt, die zunächst dafür sorgen, dass dieses überhaupt berechnet werden kann. Als die beiden hier untersucht werden der 3D-Cut-Off und die Pauli-Villars Regularisierung verwendet und miteinander verglichen. Dabei tauchen Regularisierungsparameter Λ_{co} und Λ_{pv} auf, die später variiert und zur Untersuchung der Renormierbarkeit des NJL-Modells gegen Unendlich laufen gelassen werden.

3.4.1 Die Cut-Off Regularisierung

Bei dieser einfachsten Art von Regularisierung wird die obere Integralgrenze durch einen entsprechenden Cut-Off Parameter Λ_{co} ersetzt, mit dem dann meist ein expliziter Ausdruck berechnet werden kann, der analytisch lösbar ist. Das kontinuierliche Integral wird demnach jedoch nicht bis Unendlich ausgeführt, sondern bereits bei Λ_{co} abgebrochen, was zur Folge hat, dass alle Werte $k > \Lambda_{\text{co}}$ nicht beitragen [5, S. 660]. Damit ergibt sich für das Integral in der Gap-Gleichung:

$$\begin{aligned} I_{\text{co}}(M) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\Lambda_{\text{co}}} dk \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + M^2}} = \frac{1}{4\pi^2} \left[\frac{1}{2} k \sqrt{k^2 + M^2} - \frac{1}{2} M^2 \tanh^{-1} \left(\frac{k}{\sqrt{k^2 + M^2}} \right) \right]_0^{\Lambda_{\text{co}}} \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \left[\Lambda_{\text{co}} \sqrt{\Lambda_{\text{co}}^2 + M^2} - M^2 \sinh^{-1} \left(\frac{\Lambda_{\text{co}}}{M} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.19)$$

und für den Vakuum-Teil im thermodynamischen Potential:

$$\begin{aligned} \omega_{\text{vak,co}}(M) &= \int_0^{\Lambda_{\text{co}}} dk k^2 \sqrt{k^2 + M^2} = \left[\frac{1}{8} \left(k \sqrt{k^2 + M^2} (2k^2 + M^2) - M^4 \ln(k + \sqrt{k^2 + M^2}) \right) \right]_0^{\Lambda_{\text{co}}} \\ &= \frac{1}{16} M^4 \ln(M^2) + \frac{1}{8} \left(\Lambda_{\text{co}} \sqrt{\Lambda_{\text{co}}^2 + M^2} (2\Lambda_{\text{co}}^2 + M^2) - M^4 \ln(\Lambda_{\text{co}} + \sqrt{\Lambda_{\text{co}}^2 + M^2}) \right). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Des weiteren wird die Kopplungskonstante über den Cut-Off-Parameter Λ_{co} und den Kopplungs-Faktor g_{co} ausgedrückt: $G_{\text{co}} = g_{\text{co}} \Lambda_{\text{co}}^{-2}$.

Die Gap-Gleichung und das thermodynamische Potential lauten damit im Fall der Cut-Off Regularisierung:

$$\begin{aligned} M &= m + 8G_{\text{co}} M N_f N_c I_{\text{co}}(M) \\ &= m + g_{\text{co}} \Lambda_{\text{co}}^{-2} M \frac{6}{\pi^2} \left[\Lambda_{\text{co}} \sqrt{\Lambda_{\text{co}}^2 + M^2} - M^2 \sinh^{-1} \left(\frac{\Lambda_{\text{co}}}{M} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.21)$$

und

$$\begin{aligned} \Omega_{\text{NJL,co}}(T, \mu, M) &= \frac{(M - m)^2}{4G_{\text{co}}} - 2N_c N_f \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \left[\omega_{\text{vak,co}}(M) + \omega_{\text{med}}(T, \mu, M) \right] \\ &= \frac{(M - m)^2}{4g_{\text{co}} \Lambda_{\text{co}}^{-2}} - \frac{3}{4\pi^2} \left(\frac{1}{2} M^4 \ln(M^2) + \Lambda_{\text{co}} \sqrt{\Lambda_{\text{co}}^2 + M^2} (2\Lambda_{\text{co}}^2 + M^2) \right. \\ &\quad \left. - M^4 \ln(\Lambda_{\text{co}} + \sqrt{\Lambda_{\text{co}}^2 + M^2}) \right) \\ &\quad - \frac{6}{\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 T \left[\ln \left(1 + e^{-\frac{\sqrt{k^2 + M^2} - \mu}{T}} \right) + \ln \left(1 + e^{-\frac{\sqrt{k^2 + M^2} + \mu}{T}} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.22)$$

3.4.2 Die Pauli-Villars Regularisierung

Statt der Einführung eines scharfen Cut-Offs des Integrationsbereichs wird hier die Einteilchen-Energie mit dem Parameter Λ_{pv} modifiziert und der Integrand als konvergente Summe mit Koeffizienten $c_j = (-1)^j \binom{N}{j}$ dargestellt:

$$E_k = \sqrt{k^2 + M^2} \rightarrow E_{k,j} = \sqrt{k^2 + M^2 + j\Lambda_{\text{pv}}^2} \quad , \quad \int_0^\infty dk f(k) \rightarrow \int_0^\infty dk \sum_{j=0}^N c_j f(k, j) \quad (3.23)$$

Für hinreichend genaue Werte und zur Aufhebung der Divergenz genügt es, die Summation bis $N = 3$ auszuführen, sodass sich die Koeffizienten $c_0 = 1$, $c_1 = -3$, $c_2 = 3$ und $c_3 = -1$ ergeben [5, S. 661 f.]. Damit folgt:

$$\begin{aligned} I_{\text{pv}}(M) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty dk \sum_{j=0}^3 c_j \frac{k^2}{E_{k,j}} \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty dk \left(\frac{k^2}{\sqrt{k^2 + M^2}} - 3 \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + M^2 + \Lambda_{\text{pv}}^2}} + 3 \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + M^2 + 2\Lambda_{\text{pv}}^2}} - \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + M^2 + 3\Lambda_{\text{pv}}^2}} \right), \end{aligned} \quad (3.24)$$

woraus sich nach analytischem Lösen ergibt:

$$\begin{aligned} I_{\text{pv}}(M) &= \frac{1}{16\pi^2} \left[M^2 \ln(M^2) - 3(M^2 + \Lambda_{\text{pv}}^2) \ln(M^2 + \Lambda_{\text{pv}}^2) \right. \\ &\quad \left. + 3(M^2 + 2\Lambda_{\text{pv}}^2) \ln(M^2 + 2\Lambda_{\text{pv}}^2) - (M^2 + 3\Lambda_{\text{pv}}^2) \ln(M^2 + 3\Lambda_{\text{pv}}^2) \right]. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Analog gilt für den Vakuum-Teil:

$$\begin{aligned} \omega_{\text{vak,pv}}(M) &= \int_0^\infty dk \sum_0^3 c_j k^2 E_{k,j} \\ &= \int_0^\infty dk k^2 \left(\sqrt{k^2 + M^2} - 3 \sqrt{k^2 + M^2 + \Lambda_{\text{pv}}^2} \right. \\ &\quad \left. + 3 \sqrt{k^2 + M^2 + 2\Lambda_{\text{pv}}^2} - \sqrt{k^2 + M^2 + 3\Lambda_{\text{pv}}^2} \right) \\ &= -\frac{1}{16} \left(M^4 \ln\left(\frac{4}{M^2}\right) - 3(M^2 + \Lambda_{\text{pv}}^2)^2 \ln\left(\frac{4}{M^2 + \Lambda_{\text{pv}}^2}\right) \right. \\ &\quad \left. + 3(M^2 + 2\Lambda_{\text{pv}}^2)^2 \ln\left(\frac{4}{M^2 + 2\Lambda_{\text{pv}}^2}\right) - (M^2 + 3\Lambda_{\text{pv}}^2)^2 \ln\left(\frac{4}{M^2 + 3\Lambda_{\text{pv}}^2}\right) \right). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Ebenso wird die Kopplungskonstante wieder umgeschrieben mit $G_{\text{pv}} = g_{\text{pv}}\Lambda_{\text{pv}}^{-2}$, sodass die Gap-Gleichung und das thermodynamische Potential für Pauli-Villars Regularisierung geschrieben werden als:

$$\begin{aligned}
M &= m + 8G_{\text{pv}}MN_{\text{f}}N_{\text{c}}I_{\text{pv}}(M) \\
&= m + g_{\text{pv}}\Lambda_{\text{pv}}^{-2}M\frac{3}{\pi^2}\left[M^2\ln(M^2) - 3(M^2 + \Lambda_{\text{pv}}^2)\ln(M^2 + \Lambda_{\text{pv}}^2) \right. \\
&\quad \left. + 3(M^2 + 2\Lambda_{\text{pv}}^2)\ln(M^2 + 2\Lambda_{\text{pv}}^2) - (M^2 + 3\Lambda_{\text{pv}}^2)\ln(M^2 + 3\Lambda_{\text{pv}}^2)\right]
\end{aligned} \tag{3.27}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\Omega_{\text{NJL,pv}}(T, \mu, M) &= \frac{(M-m)^2}{4G_{\text{pv}}} - 2N_{\text{c}}N_{\text{f}}\frac{4\pi}{(2\pi)^3}\left[\omega_{\text{vak,pv}}(M) + \omega_{\text{med}}(T, \mu, M)\right] \\
&= \frac{(M-m)^2}{4g_{\text{pv}}\Lambda_{\text{pv}}^{-2}} + \frac{3}{8\pi^2}\left(M^4\ln\left(\frac{4}{M^2}\right) - 3(M^2 + \Lambda_{\text{pv}}^2)^2\ln\left(\frac{4}{M^2 + \Lambda_{\text{pv}}^2}\right) \right. \\
&\quad \left. + 3(M^2 + 2\Lambda_{\text{pv}}^2)^2\ln\left(\frac{4}{M^2 + 2\Lambda_{\text{pv}}^2}\right) - (M^2 + 3\Lambda_{\text{pv}}^2)^2\ln\left(\frac{4}{M^2 + 3\Lambda_{\text{pv}}^2}\right)\right) \\
&\quad - \frac{6}{\pi^2}\int_0^\infty dk k^2 T \left[\ln\left(1 + e^{-\frac{\sqrt{k^2 + M^2} - \mu}{T}}\right) + \ln\left(1 + e^{-\frac{\sqrt{k^2 + M^2} + \mu}{T}}\right)\right]
\end{aligned} \tag{3.28}$$

4 Eigenschaften der entstehenden Mesonen

In Abschnitt 3.1 zur Lagrange-Dichte wurde bereits erwähnt, dass die explizite und spontane Symmetriebrechung der Quark-Felder Quasiteilchen hervorruft, die Pseudo-Goldstone-Bosonen. Im Falle der Einschränkung der Quark-Flavours auf Up und Down können dadurch Pionen, ρ - und ω -Mesonen entstehen, da verschiedene Kombinationen von Flavour und Anti-Flavour existieren. Im Folgenden werden die äußerst kurzlebigen Vektor-Mesonen mit Gesamtspin $J = 1$ nicht berücksichtigt und nur die Pionen mit $J = 0$ betrachtet, die geladen als π^+ und π^- oder ungeladen als π^0 vorliegen können.

4.1 Die Pion-Masse

Die zur Herleitung der Gap-Gleichung verwendete Dyson-Gleichung mit den Quark-Propagatoren in Abbildung 3.1 beschreibt das Zustandekommen der Konstituenten-Masse aus Wechselwirkung der Quarks mit sich selbst. Ebenso lässt sich auch die Masse der Pseudo-Goldstone-Bosonen bestimmen, die aus der Wechselwirkung eines Quarks mit einem Antiquark hervorgehen, und den Pionen oder π -Mesonen entsprechen.

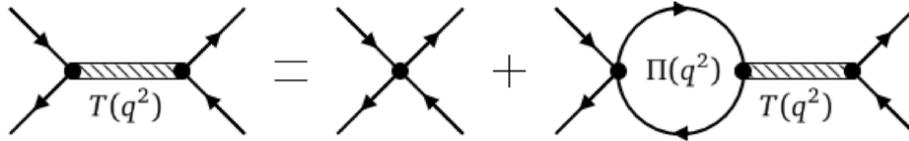


Abbildung 4.1: Diagrammatische Form der Bethe-Salpeter-Gleichung

Mit Hilfe der Bethe-Salpeter-Gleichung wird das Prinzip der Wechselwirkung zwischen einem Quark-Antiquark-Paar beschrieben: Es findet ein Impuls-Austausch statt, der explizit durch unendliche Summation aller möglichen Wechselwirkungen oder in Random-Phase-Approximation, einer Verallgemeinerung der Molekularfeldnäherung, durch den Wechselwirkungs-Vertex aus der Lagrange-Dichte, welcher im zweiten Term beliebig oft iteriert wird, diagrammatisch wie in Abbildung 4.1 dargestellt wird. Die beiden Quarks werden mit unterschiedlichen Impulsen durch ihre vollen Propagatoren $S(p)$ und $S(p + q)$ als durchgezogene Pfeile ausgedrückt und die Wechselwirkungs-Kanäle entsprechen im Fall von Pi-Mesonen $\Gamma_\pi = i\gamma_5\tau_i$ mit dem Meson-Propagator $T(q^2)$. Der Polarisations-Loop für Pionen $\Pi(q^2)$ wird wie die Selbstenergie über Spurbildung der Produkte der Propagatoren mit den Wechselwirkungs-Kanälen und anschließende Integration über den Vierer-Impuls berechnet:

$$\begin{aligned}
 \Pi(q^2) &= i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr}(\Gamma_\pi S(k+q)\Gamma_\pi S(k)) \\
 &= iN_f N_c \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} \left(i\gamma_5\tau_i \frac{\not{k} + \not{q} + M}{(k+q)^2 - M^2 + i\epsilon} i\gamma_5\tau_j \frac{\not{k} + M}{k^2 - M^2 + i\epsilon} \right) \\
 &= -\delta_{ij} iN_f N_c \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} \left(\frac{-\not{k} - \not{q} + M}{(k+q)^2 - M^2 + i\epsilon} \frac{\not{k} + M}{k^2 - M^2 + i\epsilon} \right) \\
 &= 4\delta_{ij} iN_f N_c \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^2 + k \cdot q - M^2}{((k+q)^2 - M^2 + i\epsilon)(k^2 - M^2 + i\epsilon)} \\
 &= 4\delta_{ij} iN_f N_c \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - M^2 + i\epsilon} \\
 &\quad - 2\delta_{ij} iN_f N_c q^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{((k+q)^2 - M^2 + i\epsilon)(k^2 - M^2 + i\epsilon)}.
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Dabei kommt der Vorfaktor $N_f N_c$ von der Entartung und die Spur über eine ungerade Anzahl an Gamma-Matrizen sowie Pauli-Matrizen verschwindet, wodurch die Spur über das Produkt zweier Pauli-Matrizen $\tau_i \tau_j$ nur für $i = j$ ungleich Null ist. Im letzten Ausdruck können die Integrale ersetzt werden durch das bereits ermittelte:

$$I(M) = i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - M^2 + i\epsilon} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty dk \frac{k^2}{E_k} \quad (4.2)$$

aus Gleichung 3.7, das je nach Regularisierung schon bekannt ist, und das noch zu regularisierende Integral:

$$J(M, q) = i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{((k+q)^2 - M^2 + i\epsilon)(k^2 - M^2 + i\epsilon)}. \quad (4.3)$$

Damit beträgt der Loop im Fall $i = j$ gerade:

$$\Pi(q^2) = 4N_f N_c I(M) - 2N_f N_c q^2 J(M) = \frac{1}{2G} \left(1 - \frac{m}{M}\right) - 2N_f N_c q^2 J(M, q), \quad (4.4)$$

wobei letzterer Ausdruck nochmals mit der Gap-Gleichung 3.8 vereinfacht wurde.

Nun bleibt noch die Berechnung von $J(M, q)$, die zum Großteil analog zur Rechnung in Gleichung 3.7 verläuft. Das heißt, dass $k^2 = k_0^2 - \vec{k}^2$ und $\epsilon = 2E_{\vec{k}}\epsilon'$ bzw. $\epsilon = 2E_{\vec{k}+\vec{q}}\epsilon'$ mit $E_{\vec{k}} = \sqrt{\vec{k}^2 + M^2}$ bzw. $E_{\vec{k}+\vec{q}} = \sqrt{(\vec{k}+\vec{q})^2 + M^2}$ eingesetzt und umgeformt sowie mit Hilfe des Residuensatzes über die Polstellen der k_0 -Komponente bei $k_0 = -E_{\vec{k}} + i\epsilon'$ und $k_0 = -q_0 - E_{\vec{k}+\vec{q}} + i\epsilon'$ integriert wird:

$$\begin{aligned} J(M, q) &= i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{((k+q)^2 - M^2 + i\epsilon)(k^2 - M^2 + i\epsilon)} \\ &= i \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \int \frac{dk_0}{2\pi} \frac{1}{k_0 - (-E_{\vec{k}} + i\epsilon')} \frac{1}{k_0 - (E_{\vec{k}} - i\epsilon')} \frac{1}{k_0 - (-q_0 - E_{\vec{k}+\vec{q}} + i\epsilon')} \frac{1}{k_0 - (-q_0 + E_{\vec{k}+\vec{q}} - i\epsilon')} \\ &= i \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\pi} \left[\frac{2\pi i}{-2E_{\vec{k}}} \frac{1}{q_0 - E_{\vec{k}} + E_{\vec{k}+\vec{q}}} \frac{1}{q_0 - E_{\vec{k}} - E_{\vec{k}+\vec{q}}} + \frac{2\pi i}{-2E_{\vec{k}+\vec{q}}} \frac{1}{-q_0 + E_{\vec{k}} - E_{\vec{k}+\vec{q}}} \frac{1}{-q_0 - E_{\vec{k}} - E_{\vec{k}+\vec{q}}} \right] \\ &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{4E_{\vec{k}}E_{\vec{k}+\vec{q}}} \left(\frac{1}{q_0 - E_{\vec{k}} - E_{\vec{k}+\vec{q}}} - \frac{1}{q_0 + E_{\vec{k}} + E_{\vec{k}+\vec{q}}} \right) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{q_0^2 - (E_{\vec{k}} + E_{\vec{k}+\vec{q}})^2} \left(\frac{1}{2E_{\vec{k}}} + \frac{1}{2E_{\vec{k}+\vec{q}}} \right) \\ &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_{\vec{k}}} \frac{1}{q^2 - 4E_{\vec{k}}^2 + i\epsilon} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dk \frac{k^2}{E_k} \frac{1}{q^2 - 4E_k^2 + i\epsilon} \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \left[\sqrt{\frac{4M^2 - q^2}{q^2}} \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{k^2}{k^2 + M^2}} \sqrt{\frac{q^2}{4M^2 - q^2}} \right) - \ln(k + \sqrt{k^2 + M^2}) \right]_0^\infty. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Hier müssen zur Behebung der Divergenz für $k \rightarrow \infty$ im Logarithmus wieder Regularisierungen angewendet werden. Für den 3D-Cut-Off wird die obere Integrationsgrenze durch Λ_{co} ersetzt und für die Pauli-Villars Regularisierung Koeffizienten c_j sowie Summanden der Form $j\Lambda_{\text{pv}}$ eingeführt und darüber von $j = 0$ bis $j = 3$ summiert. Daraus ergibt sich jeweils:

$$\begin{aligned} J_{\text{co}}(M, q) &= \frac{1}{4\pi^2 q} \left[\sqrt{M^2 - \frac{q^2}{4}} \tan^{-1} \left(\frac{q\Lambda_{\text{co}}}{2\sqrt{(M^2 - \frac{q^2}{4})(M^2 + \Lambda_{\text{co}}^2)}} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{q}{2} \ln \left(\frac{\Lambda_{\text{co}} + \sqrt{M^2 + \Lambda_{\text{co}}^2}}{M} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned}
J_{\text{pv}}(M, q) = & \frac{1}{16\pi^2} \left[\ln(M^2) - 3 \ln(M^2 + \Lambda_{\text{pv}}^2) + 3 \ln(M^2 + 2\Lambda_{\text{pv}}^2) - \ln(M^2 + 3\Lambda_{\text{pv}}^2) \right. \\
& + 2 \left(\sqrt{\frac{4M^2 - q^2}{q^2}} \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{q^2}{4M^2 - q^2}} \right) \right. \\
& \quad - 3 \sqrt{\frac{4M^2 + 4\Lambda_{\text{pv}}^2 - q^2}{q^2}} \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{q^2}{4M^2 + 4\Lambda_{\text{pv}}^2 - q^2}} \right) \\
& \quad + 3 \sqrt{\frac{4M^2 + 8\Lambda_{\text{pv}}^2 - q^2}{q^2}} \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{q^2}{4M^2 + 8\Lambda_{\text{pv}}^2 - q^2}} \right) \\
& \quad \left. \left. - \sqrt{\frac{4M^2 + 12\Lambda_{\text{pv}}^2 - q^2}{q^2}} \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{q^2}{4M^2 + 12\Lambda_{\text{pv}}^2 - q^2}} \right) \right) \right], \tag{4.7}
\end{aligned}$$

wobei die hergeleiteten Ausdrücke dem Realteil von $J(M, q)$ entsprechen. Der Imaginärteil verschwindet nämlich für $q^2 < 4M^2$, was im hier betrachteten Fall für Pionen mit $m_\pi \ll 2M$ normalerweise immer erfüllt ist. Bei größeren Meson-Massen, beispielsweise für Sigma-Mesonen, können diese in Quark-Antiquark-Paare zerfallen.

Damit lässt sich nun der Polarisations-Loop für Cut-Off und für Pauli-Villars Regularisierung angeben, was zudem die Berechnung des π -Meson-Propagators $T(q^2)$ ermöglicht, der den effektiven Pion-Austausch zwischen den Quarks beschreibt und von $\Pi(q^2)$ und damit vom übertragenen Impuls q abhängt:

$$T(q^2) = \frac{-2G}{1 - 2G\Pi(q^2)} = \frac{-2G}{1 - \left(1 - \frac{m}{M}\right) + 4GN_f N_c q^2 J(M, q)} = \frac{-2G}{\frac{m}{M} + 4GN_f N_c q^2 J(M, q)}. \tag{4.8}$$

Durch Parametrisierung lässt sich der Propagator auch um seine Polstelle entwickeln und in Pol-Näherung schreiben als:

$$T(q^2) \approx \frac{g_\pi^2}{q^2 - m_\pi^2} \tag{4.9}$$

mit der Quark-Pion-Kopplungskonstante g_π .

Dieser so konstruierte Pion-Propagator besitzt alle Eigenschaften eines allgemeinen Propagators. Insbesondere weist er eine Polstelle bei der Pion-Masse auf, was bedeutet, dass der inverse Propagator für $q^2 = m_\pi^2$ gerade eine Nullstelle hat:

$$T^{-1}(m_\pi^2) = \frac{\frac{m}{M} + 4GN_f N_c m_\pi^2 J(M, m_\pi)}{-2G} = 0 \Rightarrow m = -4GMN_f N_c m_\pi^2 J(M, m_\pi). \tag{4.10}$$

Mit dieser Gleichung wird ein Zusammenhang zwischen der Pion-Masse, der nackten und der effektiven Quark-Masse hergestellt, die je nach Regularisierung noch von der Wahl der Kopplungskonstanten G sowie des Cut-Off Parameters Λ abhängen:

$$m = -4g_{\text{co}} \Lambda_{\text{co}}^{-2} MN_f N_c m_\pi^2 J_{\text{co}}(M, m_\pi) \quad \text{bzw.} \quad m = -4g_{\text{pv}} \Lambda_{\text{pv}}^{-2} MN_f N_c m_\pi^2 J_{\text{pv}}(M, m_\pi). \tag{4.11}$$

Außerdem wird deutlich, dass im chiralen Limes $m = 0$ die Masse m_π verschwindet und umgekehrt, sodass die Existenz einer nackten Quark-Masse eng mit der Erzeugung von massebehafteten Pionen zusammenhängt.

Des weiteren folgt aus der Entwicklung des inversen Propagators um seinen Pol bei $q^2 = m_\pi^2$:

$$1 - 2G\Pi(q^2) = -2G \frac{d\Pi(q^2)}{d(q^2)} \Big|_{q^2=m_\pi^2} (q^2 - m_\pi^2) + \mathcal{O}((q^2 - m_\pi^2)^2) \quad (4.12)$$

und mit der Pol-Näherung aus Gleichung 4.9 ergibt sich eine Gleichung für die Quark-Pion- Kopplungskonstante:

$$\frac{-2G}{1 - 2G\Pi(q^2)} = \frac{g_\pi^2}{q^2 - m_\pi^2} \Rightarrow 1 - 2G\Pi(q^2) = -2G \frac{1}{g_\pi^2} (q^2 - m_\pi^2) \quad (4.13)$$

$$\Rightarrow g_\pi^{-2} = \frac{d\Pi(q^2)}{d(q^2)} \Big|_{q^2=m_\pi^2} = -2N_f N_c \left(J(M, m_\pi) + m_\pi^2 \frac{dJ(M, q)}{d(q^2)} \Big|_{q^2=m_\pi^2} \right) \quad (4.14)$$

[2, S. 24 f.] [5, S. 663 ff.] [8, S. 700 ff.]

4.2 Die Pion-Zerfallskonstante

Im Allgemeinen zerfallen die geladenen Pionen über die schwache Wechselwirkung zu Myonen und deren Neutrinos und neutrale Pionen zu Photonen. Das jeweilige W^{+-} , W^- oder Z -Boson ist das Austauschteilchen der schwachen Wechselwirkung und koppelt sowohl an das Pion, als auch an die entstehenden Leptonen. Innerhalb der mathematischen Beschreibung dieser Kopplung zwischen Pion und Boson taucht ein Formfaktor auf, der von einer Konstanten f_π , der Pion-Zerfallskonstanten, abhängt. So gesehen beschreibt die Zerfallskonstante also die Stärke der Kopplung des Pions an sein Austauschboson. Anschaulicher lässt sich aus dieser Kopplungsamplitude die Zerfallsrate Γ von Pionen herleiten, welche proportional zum Quadrat der Pion-Zerfallskonstante ist:

$$\Gamma \propto f_\pi^2 \Rightarrow \tau = \Gamma^{-1} \propto f_\pi^{-2} \quad (4.15)$$

und f_π daher unter Anderem Einfluss auf die Lebensdauer τ von Pionen hat.

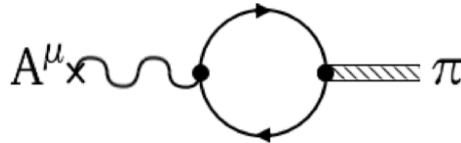


Abbildung 4.2: Diagrammatische Form des Ein-Pion-zu-Vakuum Matrix-Elements

Im NJL-Modell kann man die Pion-Zerfallskonstante aus dem Ein-Pion-zu-Vakuum Matrix-Element in Random-Phase-Approximation erhalten, was qualitativ wie in Abbildung 4.2 dargestellt werden kann [2, S. 25 f.]. Dabei koppelt ein Pion π über einen Quark-Loop an einen Axialstrom A^μ . Die Quark-Propagatoren sind $S(p)$ und $S(p + q)$ und es wird wieder über die Spur der Propagator-Produkte im Impulsraum integriert, wobei Spuridentitaten, wie das Verschwinden von Spuren über ungerade Anzahlen von Gamma-Matrizen, und $\gamma^\mu \gamma_5 = -\gamma_5 \gamma^\mu$ sowie $\gamma^\mu \gamma_\mu = 4\mathbb{1}_4$ verwendet werden:

$$\begin{aligned}
f_\pi q^\mu \delta_{ab} &= g_\pi \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left(\gamma^\mu \gamma_5 \frac{\tau_a}{2} S(k+q) i \gamma_5 \tau_b S(k) \right) \\
&= -g_\pi \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{2} \delta_{ab} N_f N_c \text{tr} (\gamma^\mu S(k+q) \gamma_5 S(k) \gamma_5) \\
&= -g_\pi \frac{i}{2} \delta_{ab} N_f N_c \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{tr} (\gamma^\mu S(k+q) S(-k)) \\
&= -g_\pi \frac{i}{2} \delta_{ab} N_f N_c \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{tr} \left(\gamma^\mu \frac{\not{k} + \not{q} + M}{(k+q)^2 - M^2 + i\epsilon} \frac{-\not{k} + M}{k^2 - M^2 + i\epsilon} \right) \\
&= -g_\pi \frac{i}{2} \delta_{ab} N_f N_c \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\text{tr} (\gamma^\mu (-k^2 + \not{k} M - \not{q} \not{k} + \not{q} M - \not{k} M + M^2))}{((k+q)^2 - M^2 + i\epsilon)(k^2 - M^2 + i\epsilon)} \\
&= -g_\pi \frac{i}{2} \delta_{ab} N_f N_c \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\text{tr} (\gamma^\mu \not{q} M)}{((k+q)^2 - M^2 + i\epsilon)(k^2 - M^2 + i\epsilon)} \\
&= -g_\pi \frac{i}{2} \delta_{ab} N_f N_c \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{4q^\mu M}{((k+q)^2 - M^2 + i\epsilon)(k^2 - M^2 + i\epsilon)} \\
&= -g_\pi 2M \delta_{ab} q^\mu N_f N_c i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{((k+q)^2 - M^2 + i\epsilon)(k^2 - M^2 + i\epsilon)}
\end{aligned} \tag{4.16}$$

und mit dem bereits hergeleiteten Integralausdruck

$$J(M, q) = i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{((k+q)^2 - M^2 + i\epsilon)(k^2 - M^2 + i\epsilon)} \tag{4.17}$$

vereinfacht sich alles zu:

$$f_\pi = -2MN_f N_c g_\pi J(M, q) = -2MN_f N_c g_\pi J(M, m_\pi). \tag{4.18}$$

Einsetzen der Quark-Pion-Kopplungskonstanten aus Gleichung 4.14, sowie der regularisierten Integrale $J_{\text{co}}(M, q)$ und $J_{\text{pv}}(M, q)$ mit $q = m_\pi$ aus Gleichungen 4.6 und 4.7 liefert f_π im Fall von $m \neq 0$.

Im chiralen Limes jedoch gilt wegen $m = 0$ auch $m_\pi = 0$ und $J(M, 0)$ muss explizit über die Regularisierungen berechnet werden. Aus Gleichung 4.5 wird durch Einsetzen von $q = 0$ und unter Verwendung des Residuensatzes das Integral für $J(M, 0)$ umgeformt. Dabei wird davon Gebrauch gemacht, dass das Residuum einer Funktion $\frac{f(z)}{g(z)}$ an einer doppelten Polstelle $\text{Res}_{z=a} \frac{f(z)}{g(z)} = \left[\frac{d}{dz} \frac{f(z)}{p(z)} \right]_{z=a}$ beträgt mit $p(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^2}$. Das generelle Vorgehen ist anfangs analog zu dem in Gleichung 3.7, weshalb es hier abgekürzt wird:

$$\begin{aligned}
J(M, 0) &= i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - M^2 + i\epsilon)(k^2 - M^2 + i\epsilon)} = i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - M^2 + i\epsilon)^2} \\
&= i \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \int \frac{dk_0}{2\pi} \frac{1}{(k_0 + (E_{\vec{k}} - i\epsilon'))^2} \frac{1}{(k_0 - (E_{\vec{k}} - i\epsilon'))^2} \\
&= i \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\pi} 2\pi i \underset{k_0 = -E_{\vec{k}} + i\epsilon'}{\text{Res}} \underbrace{\frac{1}{(k_0 - (E_{\vec{k}} - i\epsilon'))^2}}_{f(k_0)} \underbrace{\frac{1}{(k_0 - (-E_{\vec{k}} + i\epsilon'))^2}}_{g(k_0)^{-1}} \\
&= - \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[\frac{-2}{(k_0 - (E_{\vec{k}} - i\epsilon'))^3} \right]_{k_0 = -E_{\vec{k}} + i\epsilon'} = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{2}{(-2E_{\vec{k}})^3} \\
&= -\frac{1}{4} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_{\vec{k}}^3} = -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty dk \frac{k^2}{E_{\vec{k}}^3}.
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Nun wird das letzte divergente Integral mit Cut-Off oder Pauli-Villars Regularisierung gelöst:

$$\begin{aligned}
 J_{\text{co}}(M,0) &= -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^{\Lambda_{\text{co}}} dk \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + M^2}^3} = -\frac{1}{8\pi^2} \left(\frac{-\Lambda_{\text{co}}}{\sqrt{M^2 + \Lambda_{\text{co}}^2}} + \sinh^{-1} \left(\frac{\Lambda_{\text{co}}}{M} \right) \right) \\
 &= \frac{1}{8\pi^2} \left(\frac{\Lambda_{\text{co}}}{\sqrt{M^2 + \Lambda_{\text{co}}^2}} - \sinh^{-1} \left(\frac{\Lambda_{\text{co}}}{M} \right) \right)
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

$$\begin{aligned}
 J_{\text{pv}}(M,0) &= -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 \left(\frac{1}{\sqrt{k^2 + M^2}^3} - \frac{3}{\sqrt{k^2 + M^2 + \Lambda_{\text{pv}}^2}^3} + \frac{3}{\sqrt{k^2 + M^2 + 2\Lambda_{\text{pv}}^2}^3} - \frac{1}{\sqrt{k^2 + M^2 + 3\Lambda_{\text{pv}}^2}^3} \right) \\
 &= -\frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{2} \left(\ln \left(\frac{1}{M^2} \right) - 3 \ln \left(\frac{1}{M^2 + \Lambda_{\text{pv}}^2} \right) + 3 \ln \left(\frac{1}{M^2 + 2\Lambda_{\text{pv}}^2} \right) - \ln \left(\frac{1}{M^2 + 3\Lambda_{\text{pv}}^2} \right) \right) \\
 &= -\frac{1}{16\pi^2} \left(\ln \left(\frac{M^2 + 3\Lambda_{\text{pv}}^2}{M^2} \right) + 3 \ln \left(\frac{M^2 + \Lambda_{\text{pv}}^2}{M^2 + 2\Lambda_{\text{pv}}^2} \right) \right).
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

Die Quark-Pion-Kopplungskonstante wird als Ableitung von $\Pi(q^2)$ aus Gleichung 4.4 an der Stelle $q^2 = 0$ angegeben:

$$\begin{aligned}
 g_\pi^{-2} &= \frac{d}{d(q^2)} \left(\frac{1}{2G} \left(1 - \frac{m}{M} \right) - 2N_f N_c q^2 J(M, q) \right) \Big|_{q^2=0} \\
 &= -2N_f N_c \left(J(M, q) \Big|_{q^2=0} + \underbrace{q^2 \frac{dJ(M, q)}{d(q^2)} \Big|_{q^2=0}}_{=0} \right) \\
 &= -2N_f N_c J(M, 0) \Rightarrow g_\pi^2 = -\frac{1}{2N_f N_c J(M, 0)},
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

sodass sich letztendlich die Pion-Zerfallskonstante im chiralen Limes aus Quadrieren von Gleichung 4.18 ergibt zu:

$$f_\pi^2 = 4M^2 N_f^2 N_c^2 g_\pi^2 J(M, 0)^2 = -2M^2 N_f N_c J(M, 0) \tag{4.23}$$

und mit Gleichungen 4.20 und 4.21 für die jeweilige Regularisierung:

$$f_{\pi, \text{co}}^2 = -2M^2 N_f N_c J_{\text{co}}(M, 0) = -\frac{3M^2}{2\pi^2} \left(\frac{\Lambda_{\text{co}}}{\sqrt{M^2 + \Lambda_{\text{co}}^2}} - \sinh^{-1} \left(\frac{\Lambda_{\text{co}}}{M} \right) \right), \tag{4.24}$$

$$f_{\pi, \text{pv}}^2 = -2M^2 N_f N_c J_{\text{pv}}(M, 0) = \frac{3M^2}{4\pi^2} \left(\ln \left(\frac{M^2 + 3\Lambda_{\text{pv}}^2}{M^2} \right) + 3 \ln \left(\frac{M^2 + \Lambda_{\text{pv}}^2}{M^2 + 2\Lambda_{\text{pv}}^2} \right) \right). \tag{4.25}$$

[5, S. 665 f.] [6, S. 31 ff.]

5 Die Ginsburg-Landau Analyse

Zur Bestimmung der Lage des Phasenübergangs und des kritischen Endpunkts im QCD-Phasendiagramm wird Gebrauch von der sogenannten Ginsburg-Landau Analyse gemacht. Wie auch das NJL-Modell wurde damit ursprünglich der Phasenübergang bei Supraleitern beschrieben, indem die freie Energie nach einem Ordnungsparameter entwickelt wurde, welcher an der Phasengrenze auf den Wert 0 geht. Analog kann dieser Ansatz auch im NJL-Modell benutzt werden: Da die freie Energie eng mit dem thermodynamischen Potential zusammenhängt, wird dieses stattdessen um die Konstituenten-Masse M als Ordnungsparameter entwickelt. Diese hängt allgemein von der Position im Raum ab $M = M(\vec{x}) = M_0 + \delta M(\vec{x})$ und wird über den konstanten Mittelwert M_0 mit einer Variation $\delta M(\vec{x})$ ausgedrückt, wobei die Temperatur und das chemische Potential über eine bestimmte Region variiert werden. Die Entwicklung des Potentials aus Gleichung 3.15 mit den Ginsburg-Landau Koeffizienten α_i sieht zuerst wie folgt aus:

$$\Omega_{\text{NJL}}(M) = \Omega_{\text{NJL}}(M_0) + \frac{1}{V} \int d^3x (\alpha_1 \delta M(\vec{x}) + \alpha_2 \delta M(\vec{x})^2 + \alpha_3 \delta M(\vec{x})^3 + \alpha_4 \delta M(\vec{x})^4 + \dots). \quad (5.1)$$

Eine Vereinfachung dieses Ausdrucks ergibt sich dadurch, dass die Abhängigkeit der Konstituenten-Masse vom Ort vernachlässigt werden kann, weil sie nur bei der Betrachtung von inhomogenen Phasen von Nutzen ist. Damit wird das Integral mit dem Volumenterm zu einer Summe, die Variationen werden durch $\delta M(\vec{x}) = M(\vec{x}) - M_0 = M - M_0$ ersetzt und die Koeffizienten können über die Ableitung des thermodynamischen Potentials ausgedrückt werden, wodurch quasi eine Taylor-Entwicklung um den Punkt M_0 bis zur Ordnung N durchgeführt wird:

$$\Omega_{\text{NJL}}(T, \mu, M) = \sum_{n=0}^N \alpha_n(T, \mu) (M - M_0)^n \quad \text{mit} \quad \alpha_n(T, \mu) = \frac{1}{n!} \left. \frac{\partial^n \Omega_{\text{NJL}}(T, \mu, M)}{\partial M^n} \right|_{M=M_0}. \quad (5.2)$$

Die Masse M_0 erhält man als Lösung der Gap-Gleichung und der Verlauf der Ginsburg-Landau Koeffizienten α_i beschreibt den Verlauf der Phasengrenze, wobei das genaue Vorgehen davon abhängt, ob im chiralen Limes oder mit einer nackten Quark-Masse gerechnet wird.

Im chiralen Limes gilt $m = 0$ und das großkanonische Potential für festes T und μ ist symmetrisch um die triviale Lösung der Gap-Gleichung $M_0 = 0$, welche auch als Entwicklungs-Punkt gewählt wird. Die chirale Symmetrie bewirkt außerdem, dass in Gleichung 5.2 nur gerade Exponenten auftreten:

$$\Omega_{\text{NJL}}(T, \mu, M) = \alpha_0(T, \mu) + \alpha_2(T, \mu) M^2 + \alpha_4(T, \mu) M^4 + \dots \quad (5.3)$$

von denen $\alpha_2(T, \mu)$ und $\alpha_4(T, \mu)$ für die weitere Auswertung ausreichend sind.

Diese werden über die Ableitungen des Potentials 3.22 oder 3.28, je nach Regularisierung, nach der Masse an der Stelle $M = 0$ berechnet und ergeben unter Vertauschung der Ableitung und der Integrale:

$$\begin{aligned} \alpha_{2,\text{co}}(T, \mu) &= \frac{1}{2!} \left. \frac{\partial^2 \Omega_{\text{NJL,co}}(T, \mu, M)}{\partial M^2} \right|_{M=0} = \frac{1}{4G_{\text{co}}} - \frac{3}{\pi^2} \left[\frac{\Lambda_{\text{co}}^2}{2} - \int_0^\infty dk k \left(\frac{1}{e^{\frac{k-\mu}{T}} + 1} + \frac{1}{e^{\frac{k+\mu}{T}} + 1} \right) \right] \\ &= \frac{1}{4g_{\text{co}} \Lambda_{\text{co}}^{-2}} - \frac{3}{\pi^2} \left[\frac{\Lambda_{\text{co}}^2}{2} - \frac{T^2 \pi^2}{3} - \mu^2 - T^2 \left(\text{Li}_2 \left(-e^{-\frac{\mu}{T}} \right) + \text{Li}_2 \left(-e^{\frac{\mu}{T}} \right) \right) \right] \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{4,\text{co}}(T, \mu) &= \frac{1}{4!} \left. \frac{\partial^4 \Omega_{\text{NJL,co}}(T, \mu, M)}{\partial M^4} \right|_{M=0} \\ &= -\frac{3}{4\pi^2} \left[1 - \int_0^{\Lambda_{\text{co}}} dk \frac{1}{k} + \int_0^\infty dk \frac{1}{k} \left(\frac{1}{1 + e^{\frac{k-\mu}{T}}} + \frac{1}{1 + e^{\frac{k+\mu}{T}}} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{2,\text{pv}}(T, \mu) &= \frac{1}{2!} \left. \frac{\partial^2 \Omega_{\text{NJL,pv}}(T, \mu, M)}{\partial M^2} \right|_{M=0} \\
&= \frac{1}{4G_{\text{pv}}} - \frac{3}{\pi^2} \left[\frac{3\Lambda_{\text{pv}}^2}{4} \ln\left(\frac{4}{3}\right) - \int_0^\infty dk k \left(\frac{1}{e^{\frac{k-\mu}{T}} + 1} + \frac{1}{e^{\frac{k+\mu}{T}} + 1} \right) \right] \\
&= \frac{1}{4g_{\text{pv}}\Lambda_{\text{pv}}^{-2}} - \frac{3}{\pi^2} \left[\frac{3\Lambda_{\text{pv}}^2}{4} \ln\left(\frac{4}{3}\right) - \frac{T^2 \pi^2}{3} - \mu^2 - T^2 \left(\text{Li}_2\left(-e^{-\frac{\mu}{T}}\right) + \text{Li}_2\left(-e^{\frac{\mu}{T}}\right) \right) \right]
\end{aligned} \tag{5.6}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{4,\text{pv}}(T, \mu) &= \frac{1}{4!} \left. \frac{\partial^4 \Omega_{\text{NJL,pv}}(T, \mu, M)}{\partial M^4} \right|_{M=0} \\
&= -\frac{3}{4\pi^2} \left[1 + \int_0^\infty dk \frac{1}{k} \left(\frac{1}{1 + e^{\frac{k-\mu}{T}}} + \frac{1}{1 + e^{\frac{k+\mu}{T}}} - 1 \right) \right. \\
&\quad \left. + \int_0^\infty dk k^2 \left(\frac{3}{(k^2 + \Lambda_{\text{pv}}^2)^{3/2}} - \frac{3}{(k^2 + 2\Lambda_{\text{pv}}^2)^{3/2}} + \frac{1}{(k^2 + 3\Lambda_{\text{pv}}^2)^{3/2}} \right) \right]
\end{aligned} \tag{5.7}$$

wobei die Integrale der Form $\int_0^\infty dk k \left(\frac{1}{e^{\frac{k-\mu}{T}} + 1} + \frac{1}{e^{\frac{k+\mu}{T}} + 1} \right)$ als unbestimmte Integrale gelöst und durch Grenzwertbildung und unter Verwendung des Polylogarithmus $\text{Li}_s(z) = \sum_{k=1}^\infty \frac{z^k}{k^s}$ umgeformt wurden und die restlichen Integrale nur numerisch gelöst werden können.

Da die Masse der Quarks der Masse im globalen Minimum des thermodynamischen Potentials entspricht, besteht die gesuchte Phasengrenze im T - μ -Diagramm gerade aus den Punkten, an denen das globale Minimum des thermodynamischen Potentials auf $M_0 = 0$ fällt. In den Abbildungen 5.1 sind die möglichen Verläufe des Potentials für jeweils festes T und μ abhängig von der Konstituenten-Masse qualitativ dargestellt.

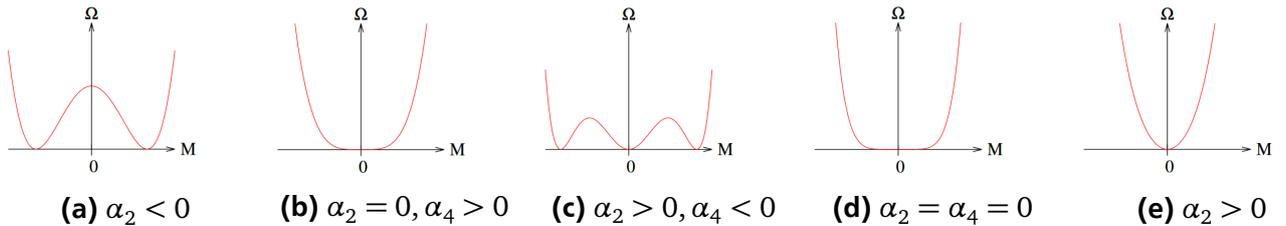


Abbildung 5.1: Qualitativer Verlauf von Ω_{NJL} in Abhängigkeit der Konstituenten-Masse M für $m = 0$ [11, S. 3]

Im Bereich des Hadronen-Gases, also für relativ kleine Temperaturen und chemische Potentiale, gilt $\alpha_2(T, \mu) < 0$ und das Potential weist ein Maximum bei $M = 0$ und zwei Minima bei $\pm M$ auf, von denen die positive Masse der Konstituenten-Masse entspricht, zu sehen in Abbildung 5.1a.

Für ausreichend hohe T und μ erreicht das Maximum schließlich die Höhe der anderen beiden Minima. Dabei kann sich das Maximum komplett stetig absenken und die effektive Masse wird kontinuierlich mit der Position des globalen Minimums kleiner, wie in Abbildung 5.1b, oder es bilden sich zwei weitere Maxima aus, welche die Minima im Potential voneinander trennen und so einen Sprung hervorrufen, sobald das zentrale Minimum niedriger als die beiden äußeren ist, vergleiche Abbildung 5.1c. Ersteres führt zu einem Phasenübergang zweiter Ordnung, während letzteres den Phasenübergang erster Ordnung beschreibt. Dabei wird deutlich, dass gerade der Verlauf des Koeffizienten $\alpha_2(T, \mu) = 0$ im Bereich

$\alpha_4 > 0$ äquivalent mit dem der Phasengrenze ist und $\alpha_4(T, \mu) = 0$ zur Bestimmung des kritischen Punktes benötigt wird.

Dieser trennt die beiden Abschnitte $\alpha_4(T, \mu) < 0$ und $\alpha_4(T, \mu) > 0$ voneinander und liegt auf der Phasengrenze. Im chiralen Limes ist dies der kritische Endpunkt (CEP), der erster von zweiter Ordnung Phasenübergang trennt, während im nicht chiralen Fall der sogenannte trikritische Punkt (TCP) den Übergang erster Ordnung abschließt, da ansonsten nur ein Crossover vorliegt. Diese Bedingungen lassen auf die genaue Position des Punktes schließen, die sich demnach dort befindet, wo gleichzeitig $\alpha_2(T, \mu) = 0$ und $\alpha_4(T, \mu) = 0$ gilt und das thermodynamische Potential ein Minimum besitzt wie in Abbildung 5.1d.

Im Bereich des Quark-Gluon-Plasmas besitzt Ω_{NJL} genau ein zentrales Minimum bei $M = 0$, was in Abbildung 5.1e dargestellt ist.

In folgender Abbildung 5.2 ist ein typischer Verlauf der beiden Koeffizienten geplottet:

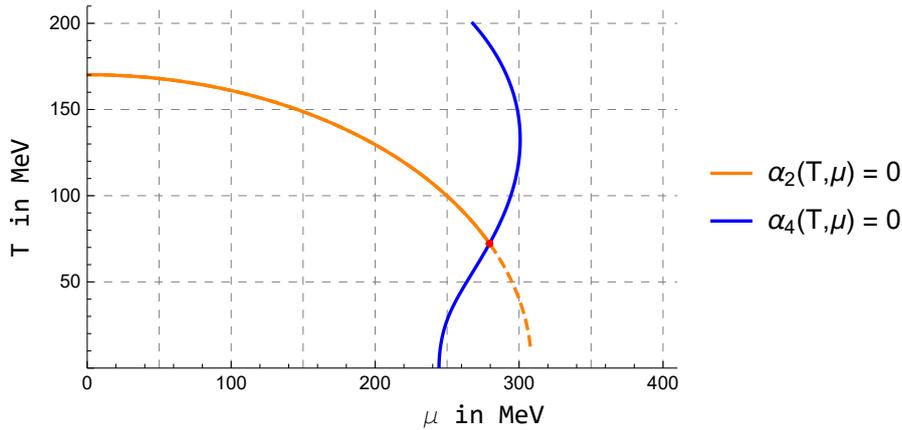


Abbildung 5.2: Beispielhafter Verlauf der Ginsburg-Landau Koeffizienten im chiralen Limes mit kritischem Endpunkt in rot

Außerhalb des chiralen Limes für eine nicht-verschwindende nackte Quark-Masse $m \neq 0$ wird die Bestimmung des Phasenübergangs komplizierter. Hier liegt keine Symmetrie vor, weshalb in der Ginsburg-Landau Entwicklung Gleichung 5.2 alle Koeffizienten auftreten. Außerdem ist die triviale Lösung $M = 0$ nun keine Lösung der Gap-Gleichung mehr, wodurch der Entwicklungs-Punkt $M_0 \neq 0$ für jedes (T, μ) -Paar berechnet werden muss. Unter der Annahme, dass dieser einem stationären Punkt des Potentials entspricht, ergibt sich M_0 gerade aus den Nullstellen

$$\alpha_1(T, \mu) = \left. \frac{\partial \Omega_{\text{NJL}(T, \mu, M)}}{\partial M} \right|_{M=M_0} = 0 \quad (5.8)$$

des ersten Ginsburg-Landau Koeffizienten. Da in den Ableitungen des Potentials sowohl die nackte Quark-Masse, als auch die effektive Masse mit $M = M_0$ nicht wegfallen, entstehen sehr lange, nur numerisch zu lösende Ausdrücke bei der Berechnung der Ginsburg-Landau Koeffizienten, weshalb diese hier der Übersichtlichkeit halber nicht explizit aufgeführt werden. Das Vorgehen dazu ist jedoch weitgehend analog zu dem im chiralen Limes: Das regularisierte Potential wird mit $\frac{1}{n!}$ multipliziert, n -mal nach der Masse M abgeleitet und anschließend $M_0(T, \mu)$ eingesetzt, was man durch Lösen von Gleichung 5.8 erhält. Wie zuvor werden für die Phasengrenze die globalen Minima des großkanonischen Potentials gesucht. In Abbildung 5.3 sind einige qualitative Verläufe des Potentials je nach Betrag der Koeffizienten dargestellt.

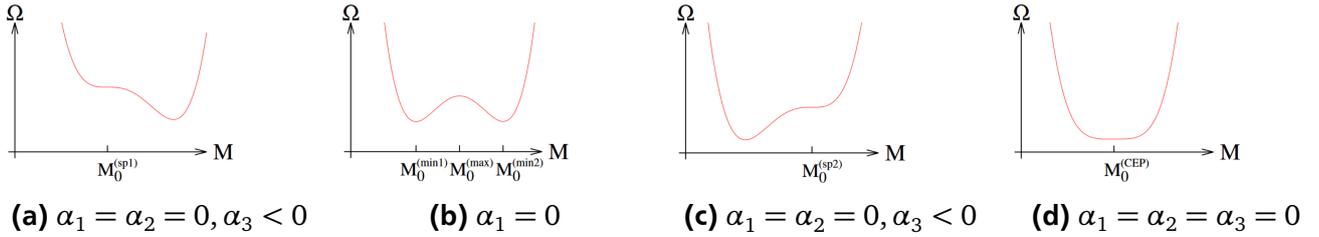


Abbildung 5.3: Qualitativer Verlauf von Ω_{NJL} in Abhängigkeit der Konstituenten-Masse M für $m \neq 0$ [11, S. 4]

Für niedrige T und μ besitzt das Potential im Bereich $M > 0$ nur einen einzigen stationären Punkt, nämlich ein Minimum und das globale Minimum des Potentials ist eindeutig. Wird bei kleiner Temperatur das chemische Potential erhöht, nähert man sich im Phasendiagramm der sogenannten linken Spinodalen, Abbildung 5.3a, an der zwar die Masse unverändert bleibt, aber das Potential an der Stelle $M_0^{(\text{sp}1)}$ einen Wendepunkt aufweist. Demnach gilt dort $\alpha_1(T, \mu) = \alpha_2(T, \mu) = 0$ und die dritte Ableitung wird negativ, $\alpha_3(T, \mu) < 0$, aufgrund des weiteren Verlaufs des Potentials.

Bei weiterer Erhöhung von μ senkt sich der Sattelpunkt ab, bis er die Höhe des zuvor globalen Minimums erreicht, deren Rollen nun vertauscht werden. Dieser Fall ist in Abbildung 5.3b zu sehen und beschreibt einen Phasenübergang erster Ordnung, weil die Quark-Masse vom ursprünglichen höheren Wert $M_0^{(\text{min}2)}$ auf eine niedrigere Masse $M_0^{(\text{min}1)}$ springt. Hier weist Ω_{NJL} ein Maximum bei $M_0^{(\text{max})}$ und darum zwei Minima auf, weshalb $\alpha_1(T, \mu) = 0$ an diesen Extrema gilt.

Nach dem Übergang hebt sich das Minimum in $M_0^{(\text{min}2)}$ an und wird schließlich ebenfalls zu einem Wendepunkt $M_0^{(\text{sp}2)}$ des Potentials an der rechten Spinodalen 5.3c. Wie bei der linken Spinodalen verschwinden die ersten beiden Koeffizienten $\alpha_1(T, \mu) = \alpha_2(T, \mu) = 0$ und der dritte ist nun positiv $\alpha_3(T, \mu) > 0$.

Die beiden Spinodalen und die Phasengrenze erster Ordnung laufen bei etwas höherer Temperatur zusammen und schneiden sich in einem Punkt, an dem $\alpha_1(T, \mu) = \alpha_2(T, \mu) = \alpha_3(T, \mu) = 0$ gilt und der die zwei unterschiedlich vorliegenden Massen $M_0^{(\text{sp}1)}$ und $M_0^{(\text{sp}2)}$ zu $M_0^{(\text{TCP})}$ im trikritischen Punkt vereint. Das thermodynamische Potential in Abbildung 5.3d besitzt im TCP ein Minimum ähnlich dem im chiralen Limes, nur dass die Quark-Masse nicht auf 0, sondern auf $M = M_0^{(\text{TCP})}$ fällt. [11]

6 Erstellung der Parameter-Sets und Phasendiagramme

Nachdem nun alle notwendigen Gleichungen hergeleitet wurden, können diese zur Ermittlung des Cut-Off Parameters Λ , des Kopplungs-Faktors g , der effektiven und nackten Quark-Masse M und m und der Pion-Zerfallskonstanten f_π numerisch gelöst werden. Als Startwert wird dabei jeweils eine Konstituenten-Masse von $M = 300$ MeV und eine Pion-Zerfallskonstante von $f_\pi = 92,4$ MeV gewählt, da dies realistische und auch experimentell erhaltene Werte sind [12], auf deren Basis die verschiedenen Regularisierungen miteinander verglichen werden können. Die auftretende Pion-Masse wird auf $m_\pi = 140$ MeV gesetzt, um ebenfalls die aktuellen Daten vernünftig widerzuspiegeln [5, S. 665 f.] [8, S. 26 f.].

Im Folgenden wird dann nur einer der beiden Parameter, M oder f_π , konstant gehalten und der Regularisierungs-Parameter bis zum Verschwinden des kritischen Endpunktes und darüber hinaus erhöht, um den Fall $\Lambda \rightarrow \infty$ und die Renormierbarkeit des NJL-Modells zu untersuchen. Dies wird sowohl im chiralen Limes, als auch im nicht-chiralen Fall und jeweils für die beiden verwendeten Regularisierungen ausgeführt.

Weiterhin können mit den Ginsburg-Landau Koeffizienten die zugehörigen Phasendiagramme zumindest im chiralen Limes bestimmt und deren Verlauf diskutiert werden.

6.1 Chiraler Limes

Im chiralen Limes gilt $m = 0$, womit die Bestimmung der nackten Quark-Masse überflüssig ist. Daher können die vereinfachte Gap-Gleichung 3.9 und die Formel für die Pion-Zerfallskonstante 4.23 verwendet werden und zum Erhalt des Phasendiagramms ist nur die Berechnung von $\alpha_2(T, \mu) = 0$ für die Phasengrenze und $\alpha_2(T, \mu) = \alpha_4(T, \mu) = 0$ für den kritischen Endpunkt nötig.

6.1.1 Cut-Off Regularisierung

Die Gleichung für f_π hängt im chiralen Limes für beide Regularisierungen von M und Λ ab. Deshalb wird das erste Λ_{co} mit Gleichung 4.24 durch Einsetzen von $M = 300$ MeV und $f_\pi = 92,4$ MeV berechnet. Daraufhin wird der Cut-Off langsam in Schritten von 100 MeV erhöht und entweder M oder f_π konstant auf dem Anfangswert gehalten. Der Kopplungs-Faktor g_{co} wird danach über die Gap-Gleichung 3.21 mit $m = 0$ bestimmt, womit alle Parameter feststehen.

Im Anschluss daran wird für alle T und μ innerhalb eines festgelegten Bereichs eine numerische Nullstellen-Suche für $\alpha_{2,co}(T, \mu)$ und $\alpha_{4,co}(T, \mu)$ aus Gleichungen 5.4 und 5.5 durchgeführt. Dazu wird für einen Punkt im Diagramm die Temperatur in Schritten von 1 MeV festgehalten und $\alpha_{2,co}(T, \mu) = 0$ sowie $\alpha_{4,co}(T, \mu) = 0$ nach dem chemischen Potential gelöst. Die (T, μ) -Paare werden zur Beschreibung der Phasengrenze und des Schnittpunkts im CEP schließlich geplottet.

Zuerst bleibt die Konstituenten-Masse konstant, was in den Werten in Tabelle 6.1 und der Grafik 6.1 resultiert.

Λ_{co} [MeV]	g_{co}	M [MeV]	f_π [MeV]	$(\mu_c T_c)$ [MeV]
664,281	2,098	300	92,4	(279,488 72,263)
700	2,064	300	95,327	(289,590 68,916)
800	1,987	300	102,699	(315,328 57,151)
900	1,931	300	109,073	(339,202 38,745)
960	1,904	300	112,507	(353,640 10,092)
1000	1,888	300	114,655	(— —)

Tabelle 6.1: Parameter-Sets für festgehaltene Masse M unter Erhöhung des Cut-Off Parameters Λ_{co} im chiralen Limes

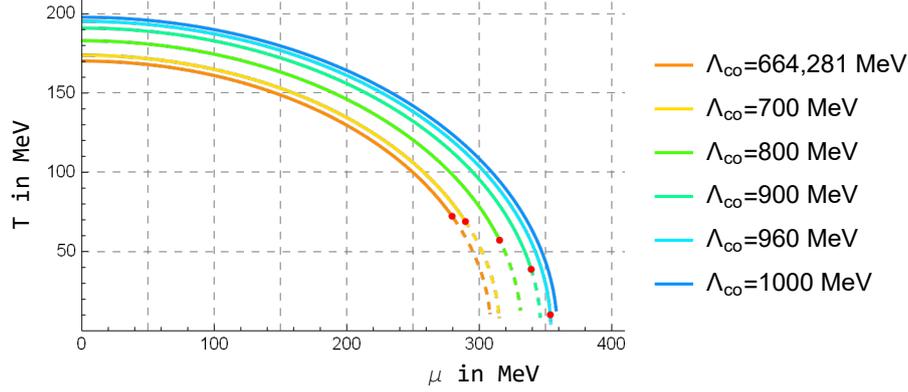


Abbildung 6.1: Plots der Phasengrenze bei $M = \text{const}$ inklusive CEP für unterschiedliche Λ_{co} im chiralen Limes

Der Startwert bei der Cut-Off Regularisierung liegt bei $\Lambda_{\text{co}} = 664,281$ MeV und dessen Erhöhung sorgt einerseits für eine Verringerung der Kopplungsstärke wegen $G_{\text{co}} = g_{\text{co}}\Lambda_{\text{co}}^{-2}$ und andererseits mit dem Anstieg von f_{π} für eine geringere Lebensdauer der Pionen aufgrund der Proportionalität 4.15.

Die Phasengrenze verschiebt sich nach außen zu größeren T und μ , während der kritische Endpunkt auf der Grenze nach unten zu immer kleineren Temperaturen und größeren chemischen Potentialen wandert. Unterhalb des CEP findet an der gestrichelten Linie ein Phasenübergang erster Ordnung und darüber einer zweiter Ordnung statt. Für einen Cut-Off von $\Lambda_{\text{co}} > 960$ MeV schneiden sich die Verläufe von $\alpha_{2,\text{co}}(T, \mu) = 0$ und $\alpha_{4,\text{co}}(T, \mu) = 0$ nicht mehr und der CEP verschwindet, was gleichzeitig den Übergang vom Hadronen-Gas zum Quark-Gluon-Plasma in jedem Fall zu einem Phasenübergang zweiter Ordnung macht.

Λ_{co} [MeV]	g_{co}	M [MeV]	f_{π} [MeV]	$(\mu_c T_c)$ [MeV]
1000	1,888	300	114,655	(- -)
10000	1,650	300	209,227	(- -)
100000	1,645	300	274,340	(- -)
500000	1,645	300	311,892	(- -)
1000000	1,645	300	326,738	(- -)

Tabelle 6.2: Verhalten der Parameter für konstantes M für $\Lambda_{\text{co}} \rightarrow \infty$ im chiralen Limes

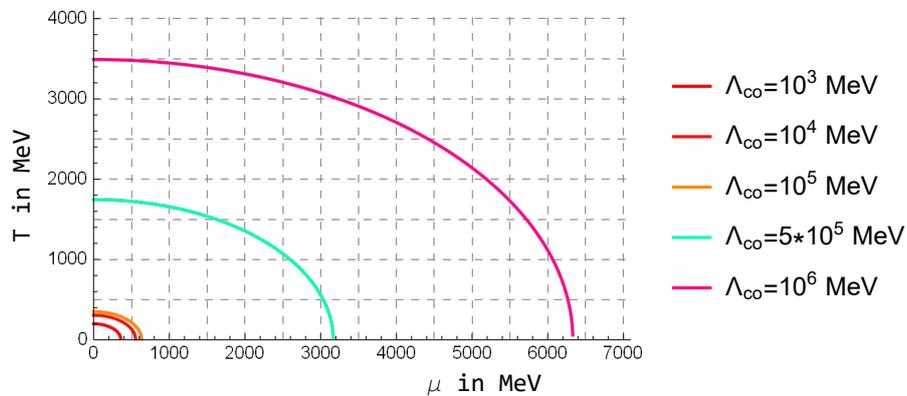


Abbildung 6.2: Verhalten der Phasengrenze bei $M = \text{const}$ für $\Lambda_{\text{co}} \rightarrow \infty$ im chiralen Limes

Bei weiterer Erhöhung des Cut-Off Parameters ist in Tabelle 6.2 zu erkennen, dass g_{co} anscheinend gegen einen Wert von $g_{\text{co}} \approx 1,645$ läuft, die Pion-Zerfallskonstante aber weiterhin ansteigt bis zu einem Wert von $f_{\pi} = 326,738$ MeV bei $\Lambda_{\text{co}} = 10^6$ MeV.

Der Abstand der Phasengrenze zum Ursprung wächst in Abbildung 6.2 stetig an, weshalb angenommen wird, dass sie für $\Lambda_{\text{co}} \rightarrow \infty$ im Unendlichen liegt.

Die genannten Vermutungen können bestätigt werden, indem der Grenzwert $\Lambda_{\text{co}} \rightarrow \infty$ für g_{co} und f_{π} gebildet wird. Dies liefert eine divergente Pion-Zerfallskonstante mit $\lim_{\Lambda_{\text{co}} \rightarrow \infty} f_{\pi} = \infty$ und die Konvergenz für den Kopplungs-Faktor gegen $\lim_{\Lambda_{\text{co}} \rightarrow \infty} g_{\text{co}} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1,64493$.

Ein anderer Verlauf ergibt sich beim Konstant-halten der Pion-Zerfallskonstanten, wie in Tabelle 6.3 und Abbildung 6.3 zu sehen ist.

$\Lambda_{\text{co}}[\text{MeV}]$	g_{co}	$M[\text{MeV}]$	$f_{\pi}[\text{MeV}]$	$(\mu_c T_c)[\text{MeV}]$
664,281	2,098	300	92,4	(279,488 72,263)
700	2,020	279,025	92,4	(282,222 58,691)
785	1,907	247,346	92,4	(289,904 13,939)
800	1,893	243,280	92,4	(- -)

Tabelle 6.3: Parameter-Sets für festgehaltene Pion-Zerfallskonstante f_{π} unter Erhöhung des Cut-Off Parameters Λ_{co} im chiralen Limes

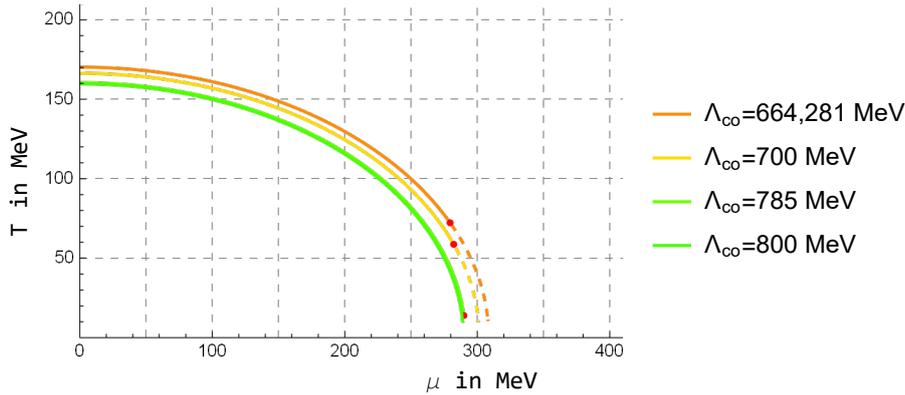


Abbildung 6.3: Plots der Phasengrenze bei $f_{\pi} = \text{const}$ inklusive CEP für unterschiedliche Λ_{co} im chiralen Limes

Der Startwert ist natürlich derselbe wie bei konstanter Masse. Anders als f_{π} nimmt die Masse M mit wachsendem Λ_{co} ab, zusammen mit dem Kopplungs-Faktor. Dieser fällt hier schneller ab, da er beispielsweise bei $\Lambda_{\text{co}} = 800$ MeV bereits nur noch $g_{\text{co}} = 1,893$ beträgt, während er im Fall von konstantem M bei $g_{\text{co}} = 1,987$ liegt.

Auffällig ist, dass sich die Phasengrenze zum Quark-Gluon-Plasma vorerst nicht nach außen, sondern nach innen zu kleineren T und μ verschiebt. Der kritische Endpunkt jedoch wandert weiterhin nach unten und existiert schon ab $\Lambda_{\text{co}} = 786$ MeV nicht mehr, verschwindet also früher als zuvor bei $M = \text{const}$.

$\Lambda_{\text{co}}[\text{MeV}]$	g_{co}	$M[\text{MeV}]$	$f_{\pi}[\text{MeV}]$	$(\mu_c T_c)[\text{MeV}]$
1000	1,783	208,439	92,4	(- -)
10000	1,646	116,394	92,4	(- -)
100000	1,645	91,648	92,4	(- -)
500000	1,645	81,719	92,4	(- -)
1000000	1,645	78,367	92,4	(- -)

Tabelle 6.4: Verhalten der Parameter für konstantes f_{π} für $\Lambda_{\text{co}} \rightarrow \infty$ im chiralen Limes

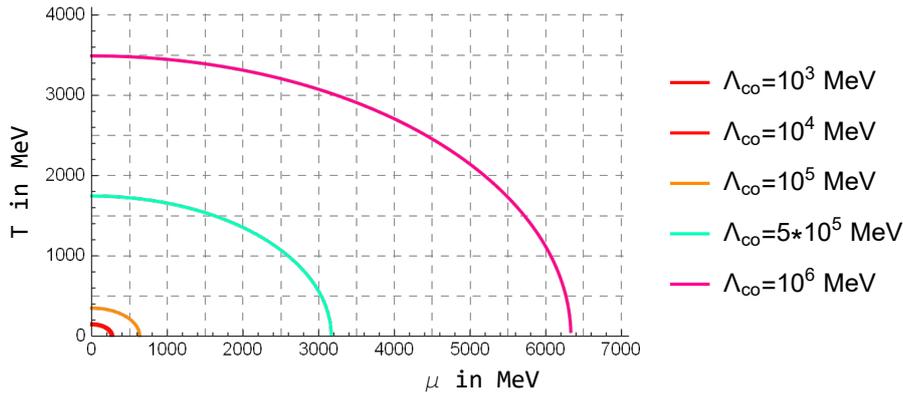


Abbildung 6.4: Verhalten der Phasengrenze bei $f_\pi = \text{const}$ für $\Lambda_{\text{co}} \rightarrow \infty$ im chiralen Limes

Auch für $f_\pi = \text{const}$ wird der Cut-Off Parameter bis zu $\Lambda_{\text{co}} = 10^6$ MeV erhöht und dafür die Parameter-Sets in Tabelle 6.4 berechnet und die Phasendiagramme in Abbildung 6.4 dargestellt. Die Konstituenten-Masse nimmt weiter ab und erreicht beim höchsten untersuchten Cut-Off einen Wert von $M = 78,367$ MeV. Für g_{co} ist erneut ein konvergenter Verlauf anzunehmen.

Grenzwertbildung ergibt für die Masse $\lim_{\Lambda_{\text{co}} \rightarrow \infty} M = 0$ und für den Kopplungs-Faktor $\lim_{\Lambda_{\text{co}} \rightarrow \infty} g_{\text{co}} = \frac{\pi^2}{6}$. Damit ist der Grenzwert von g_{co} für große Λ_{co} unabhängig davon, welcher Parameter festgehalten wird.

Trotz dass die Phasengrenze für konstantes f_π anfangs nach innen zum Ursprung gewandert ist, verhält sie sich für sehr große Cut-Off Parameter so wie für konstantes M , entfernt sich also immer weiter vom Ursprung des T - μ -Diagramms und stimmt bereits ab etwa $\Lambda_{\text{co}} = 10^5$ MeV mit dieser überein.

6.1.2 Pauli-Villars Regularisierung

Wie bei der Cut-Off Regularisierung wird der Startwert von Λ_{pv} über Gleichung 4.25 mit $M = 300$ MeV und $f_\pi = 92,4$ MeV ermittelt. Auch wird die Konstituenten-Masse oder die Pion-Zerfallskonstante festgehalten, während der Parameter Λ_{pv} in 100 MeV-Schritten ansteigt, und aus der regularisierten Gap-Gleichung 3.27 und $m = 0$ folgt direkt der Wert für g_{pv} .

Ebenso werden die Nullstellen der Ginsburg-Landau Koeffizienten $\alpha_{2,\text{pv}}(T, \mu)$ und $\alpha_{4,\text{pv}}(T, \mu)$ mit Pauli-Villars Regularisierung aus Gleichungen 5.6 und 5.7 numerisch berechnet und wieder im T - μ -Diagramm aufgetragen, wodurch die Phasengrenze und der kritische Endpunkt zustande kommen.

Tabelle 6.5 zeigt die Parameter-Sets und Abbildung 6.5 die zugehörigen Phasendiagramme für eine konstante Masse $M = 300$ MeV.

Λ_{pv} [MeV]	g_{pv}	M [MeV]	f_π [MeV]	$(\mu_c T_c)$ [MeV]
815,852	5,731	300	92,4	(283,030 69,901)
900	5,429	300	98,083	(301,944 62,720)
1000	5,161	300	104,055	(322,590 51,528)
1100	4,959	300	109,336	(342,380 32,866)
1147	4,881	300	111,616	(351,914 12,351)
1200	4,802	300	114,051	(- -)

Tabelle 6.5: Parameter-Sets für festgehaltene Masse M unter Erhöhung des Cut-Off Parameters Λ_{pv} im chiralen Limes

Hierbei liegt der Startwert des Cut-Off Parameters bei $\Lambda_{\text{pv}} = 815,852$ MeV, etwa 151,571 MeV über dem der Cut-Off Regularisierung. Ebenso ist der Kopplungs-Faktor generell größer mit $g_{\text{pv}} = 5,731$ am Anfang im Vergleich zu $g_{\text{co}} = 2,098$. Wie dort steigt außerdem f_π mit Λ_{pv} und g_{pv} nimmt langsam ab, wobei die Pion-Zerfallskonstante bei beiden Regularisierungen ungefähr gleich schnell ansteigt.

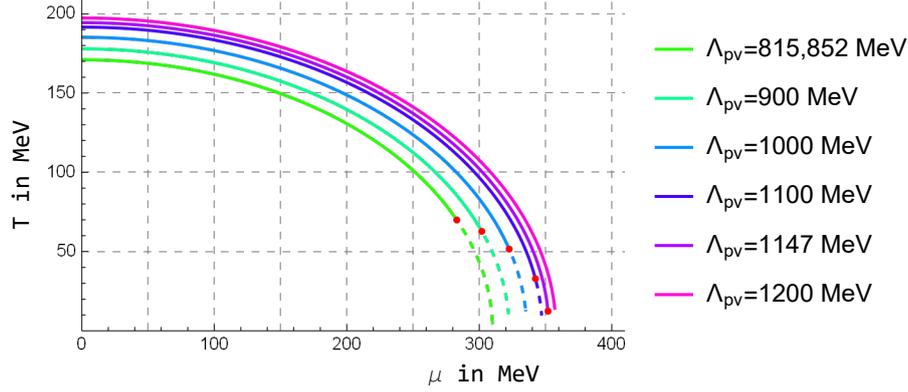


Abbildung 6.5: Plots der Phasengrenze bei $M = \text{const}$ inklusive CEP für unterschiedliche Λ_{pv} im chiralen Limes

Die Plots sind sehr ähnlich zu denen der anderen Regularisierung: Die Phasengrenze vergrößert sich zu höheren Werten von T und μ und der kritische Endpunkt verschiebt sich auf der Grenze zu tieferen Temperaturen bevor er für noch größere Λ_{pv} nicht mehr vorhanden ist. Der letzte Cut-Off Parameter, bei dem es noch einen CEP gibt, liegt bei $\Lambda_{\text{pv}} = 1147$ MeV, was 331,148 MeV vom Startwert entfernt ist. Dagegen verschwindet der Endpunkt bei der Cut-Off Regularisierung schon nach 295,719 MeV und bleibt damit nicht so lang bestehen wie bei der Pauli-Villars Regularisierung.

$\Lambda_{\text{pv}} [\text{MeV}]$	g_{pv}	$M [\text{MeV}]$	$f_{\pi} [\text{MeV}]$	$(\mu_c T_c) [\text{MeV}]$
1000	5,161	300	104,055	(322,590 51,528)
10000	3,840	300	203,143	(- -)
100000	3,812	300	269,725	(- -)
500000	3,812	300	307,841	(- -)
1000000	3,812	300	322,873	(- -)

Tabelle 6.6: Verhalten der Parameter für konstantes M für $\Lambda_{\text{pv}} \rightarrow \infty$ im chiralen Limes

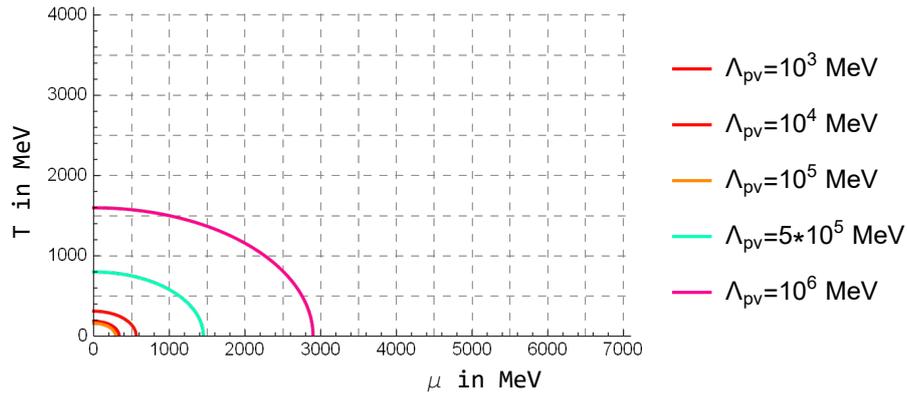


Abbildung 6.6: Verhalten der Phasengrenze bei $M = \text{const}$ für $\Lambda_{\text{pv}} \rightarrow \infty$ im chiralen Limes

Wird der Cut-Off aufgedreht, ist für die Parameter in Tabelle 6.6 ein bereits bekanntes Verhalten zu beobachten: Die Pion-Zerfallskonstante steigt bis $f_{\pi} = 322,873$ MeV bei $\Lambda_{\text{pv}} = 10^6$ MeV und ist damit ein wenig niedriger als die 326,738 MeV bei der Cut-Off Regularisierung, jedoch divergiert sie auch hier für $\Lambda_{\text{pv}} \rightarrow \infty$. Weiterhin ist offensichtlich, dass der Kopplungs-Faktor gegen einen Wert von $g_{\text{pv}} \approx 3,812$, genauer gegen $\lim_{\Lambda_{\text{pv}} \rightarrow \infty} g_{\text{pv}} = \frac{\pi^2}{9 \ln(\frac{4}{3})} \approx 3,81193$ konvergiert.

Ein entscheidender Unterschied besteht in der Verschiebung der Phasengrenze zum Quark-Gluon-Plasma, welche sich in der Pauli-Villars Regularisierung deutlich langsamer entfernt, siehe Abbildung 6.6. Hier befindet sich der Übergang für $\Lambda_{pv} = 10^6$ MeV sogar näher am Ursprung als der bei $\Lambda_{co} = 5 \cdot 10^6$ MeV in Abbildung 6.2, obwohl zu vermuten ist, dass er auch bis ins Unendliche anwächst.

Wird statt der effektiven Masse die Zerfallskonstante festgehalten, entstehen die Parameter-Sets in Tabelle 6.7 und die Phasenübergänge in Abbildung 6.7.

Λ_{pv} [MeV]	g_{pv}	M [MeV]	f_π [MeV]	$(\mu_c T_c)$ [MeV]
815,852	5,731	300	92,4	(283,030 69,901)
900	5,096	262,351	92,4	(287,146 41,337)
947	4,890	248,981	92,4	(291,034 13,701)
1000	4,719	237,248	92,4	(- -)

Tabelle 6.7: Parameter-Sets für festgehaltene Pion-Zerfallskonstante f_π unter Erhöhung des Cut-Off Parameters Λ_{pv} im chiralen Limes

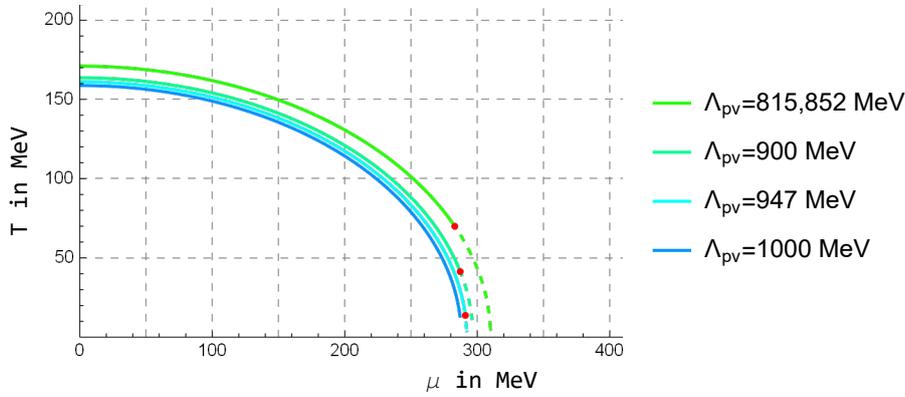


Abbildung 6.7: Plots der Phasengrenze bei $f_\pi = \text{const}$ inklusive CEP für unterschiedliche Λ_{pv} im chiralen Limes

Wie auch bei der Cut-Off Regularisierung wird M mit steigendem Λ_{pv} kleiner, genau so wie g_{pv} , wobei die Masse relativ zur Erhöhung des Cut-Offs ähnliche Werte annimmt. Verglichen etwa mit dem Kopplungs-Faktor von $g_{pv} = 5,161$ bei $\Lambda_{pv} = 1000$ MeV für konstantes M fällt dieser hier mit $g_{pv} = 4,719$ schneller ab.

Den Verlauf der Phasengrenze haben beide Regularisierungen wieder gemein und der letzte vorhandene kritische Endpunkt taucht für $\Lambda_{pv} = 947$ MeV auf, was einem Abstand vom Anfangswert des Parameters von 131,148 MeV entspricht, wohingegen der CEP bei der Cut-Off Regularisierung nur bis zur Differenz von 120,719 MeV bestehen bleibt.

Λ_{pv} [MeV]	g_{pv}	M [MeV]	f_π [MeV]	$(\mu_c T_c)$ [MeV]
1000	4,719	237,248	92,4	(- -)
10000	3,818	119,450	92,4	(- -)
100000	3,812	93,040	92,4	(- -)
500000	3,812	82,684	92,4	(- -)
1000000	3,812	79,212	92,4	(- -)

Tabelle 6.8: Verhalten der Parameter für konstantes f_π für $\Lambda_{pv} \rightarrow \infty$ im chiralen Limes

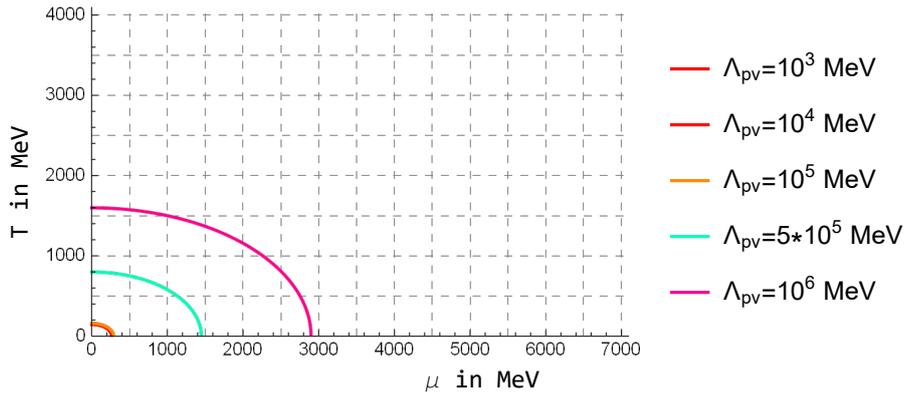


Abbildung 6.8: Verhalten der Phasengrenze bei $f_\pi = \text{const}$ für $\Lambda_{\text{pv}} \rightarrow \infty$ im chiralen Limes

Für noch höhere Werte von Λ_{pv} liefert Tabelle 6.8 die Parameter. Wie schon zuvor festgestellt, konvergiert der Kopplungs-Faktor in Pauli-Villars Regularisierung gegen $g_{\text{pv}} = \frac{\pi^2}{9 \ln(\frac{4}{3})}$ und die Konstituenten-Masse analog zur Cut-Off Regularisierung gegen $M = 0$, wobei sie bei gleichem Cut-Off Parameter immer einige MeV größer ist.

Abbildung 6.8 ähnelt wieder sehr Abbildung 6.6, was darauf hindeutet, dass der Verlauf der Phasengrenze für große Λ_{pv} bei nunmehr beiden Regularisierungen unabhängig von der Wahl der konstanten Parameter ist und sie in jedem Fall für $\Lambda \rightarrow \infty$ im Unendlichen liegt.

6.2 Nicht-verschwindende nackte Quark-Masse

Da nun eine nackte Quark-Masse vorliegt, muss zusätzlich zu den anderen Parametern auch $m \neq 0$ bestimmt werden. Dazu wird neben der allgemeinen Gap-Gleichung 3.8 und der Gleichung für die Pion-Zerfallskonstante 4.18 eine weitere benötigt, die mit Gleichung 4.10 bereits hergeleitet wurde und die die Pion-Masse $m_\pi = 140$ MeV enthält. Weiterhin ist zu beachten, dass in jedem Fall $M > \frac{m_\pi}{2} = 70$ MeV gilt, da sonst die Pionen in Quark-Antiquark-Paare zerfallen können und das Modell dadurch verfälscht werden würde.

Zur Bestimmung der Phasengrenze und Auswertung des Phasendiagramms muss $M_0(T, \mu)$ für alle Punkte (T, μ) über $\alpha_1(T, \mu) = 0$ numerisch berechnet und mit den erhaltenen Massen $\alpha_2(T, \mu)$ ebenfalls für alle Punkte ausgewertet werden, um dessen Nullstellen im T - μ -Diagramm zu finden. Hier ist zudem noch die Unterscheidung zwischen $\alpha_3(T, \mu) > 0$ und $\alpha_3(T, \mu) < 0$ für die Spinodalen und die Ermittlung des trikritischen Punkts mit $\alpha_3(T, \mu) = 0$ nötig. Insgesamt muss dazu ein großer numerischer Rechenaufwand betrieben werden, um eine angemessene Genauigkeit der Verläufe der Phasenübergänge und Spinodalen zu garantieren, welcher außerdem viel Zeit in Anspruch nimmt und damit leider den Umfang dieser Bachelor-Arbeit übersteigt. Daher werden für $m \neq 0$ nur die Parameter-Sets berechnet und anhand dessen die Regularisierungen verglichen.

6.2.1 Cut-Off Regularisierung

Der Startwert für Λ_{co} wird mit Hilfe von Gleichung 4.18 ermittelt, indem $J_{\text{co}}(M, m_\pi)$ aus Gleichung 4.6 und g_π aus Gleichung 4.14 wiederum mit $J_{\text{co}}(M, m_\pi)$ zusammen mit $M = 300$ MeV und $f_\pi = 92,4$ MeV eingesetzt werden. Der Parameter wird wieder in 100 MeV-Schritten erhöht und der gleiche Bereich wie im chiralen Limes untersucht, da der trikritische Punkt nicht bestimmt werden kann. Über die Gap-Gleichung 3.21 wird g_{co} berechnet und mit besagter Gleichung 4.11 die nackte Quark-Masse m .

Für festgehaltene Konstituenten-Masse ergeben sich die Parameter-Sets in Tabelle 6.9.

Λ_{co} [MeV]	g_{co}	M [MeV]	f_{π} [MeV]	m [MeV]
664,349	2,061	300	92,4	5,327
700	2,029	300	95,320	5,024
800	1,958	300	102,692	4,301
900	1,907	300	109,066	3,726
960	1,882	300	112,499	3,436
1000	1,867	300	114,647	3,262

Tabelle 6.9: Parameter-Sets für festgehaltene Masse M unter Erhöhung des Cut-Off Parameters Λ_{co}

Die Einführung von m scheint wenig Einfluss auf die Startwerte zu haben, da Λ_{co} nur 0,068 MeV über und g_{co} um 0,037 unter dem jeweiligen Wert im chiralen Limes aus Tabelle 6.1 liegt. Auch der weitere Verlauf der Parameter ist sehr ähnlich, wobei der Kopplungs-Faktor im Durchschnitt 0,028 und die Pion-Zerfallskonstante etwa 0,006 MeV unter deren chiralen Werten liegen.

Währenddessen nimmt die Masse m für steigenden Cut-Off Parameter ab, die jedoch schon zu Beginn mit $m = 5,327$ MeV im Vergleich zur Konstituenten-Masse viel kleiner ist.

Λ_{co} [MeV]	g_{co}	M [MeV]	f_{π} [MeV]	m [MeV]
1000	1,867	300	114,647	3,262
10000	1,650	300	209,217	0,0949
100000	1,645	300	274,331	0,00162
500000	1,645	300	311,884	0,0000839
1000000	1,645	300	326,730	0,0000230

Tabelle 6.10: Verhalten der Parameter bei $M = \text{const}$ für $\Lambda_{\text{co}} \rightarrow \infty$

Wie im chiralen Limes wird der Cut-Off nun bei jedem weiteren Schritt um einen Faktor 10 bzw. 5 erhöht. Auch dabei ist anhand von Tabelle 6.10 zu beobachten, dass f_{π} bis 326,730 MeV ansteigt und damit minimal kleiner ist als im chiralen Limes und g_{co} ab $\Lambda_{\text{co}} = 10000$ MeV den Werten aus Tabelle 6.2 gleicht und folglich auch gegen den Grenzwert von $g_{\text{co}} = \frac{\pi^2}{6}$ läuft.

Interessant ist außerdem, dass die nackte Quark-Masse für sehr hohe Λ_{co} sehr klein wird und bei der Grenzwertbildung $\lim_{\Lambda_{\text{co}} \rightarrow \infty} m = 0$ verschwindet und die fast masselosen Pionen auch aufgrund ihrer wachsenden Zerfallskonstante immer schneller zerfallen. Das heißt, für große Cut-Off Parameter liegt näherungsweise wieder der chirale Limes wegen $m \rightarrow 0$ vor.

Für konstante Pion-Zerfallskonstante ergeben sich die folgenden Parameter aus Tabelle 6.11:

Λ_{co} [MeV]	g_{co}	M [MeV]	f_{π} [MeV]	m [MeV]
664,349	2,061	300	92,4	5,327
700	1,984	279,081	92,4	4,974
785	1,874	247,418	92,4	4,224
800	1,861	243,354	92,4	4,107

Tabelle 6.11: Parameter-Sets für festgehaltene Pion-Zerfallskonstante f_{π} unter Erhöhung des Cut-Off Parameters Λ_{co}

Verglichen mit Tabelle 6.3 befindet sich g_{co} durchschnittlich 0,035 MeV unter und M ca. 0,051 MeV über dem jeweiligen Wert im chiralen Limes, womit beide ebenfalls kleiner werden.

Weiterhin nimmt sowohl m , als auch g_{co} mit steigendem Λ_{co} schneller ab, als im Fall konstanter Masse, was beim Vergleich der jeweiligen Werte aus Tabellen 6.9 und 6.11 für gleiche Cut-Off Parameter ersichtlich wird.

$\Lambda_{\text{co}}[\text{MeV}]$	g_{co}	$M[\text{MeV}]$	$f_{\pi}[\text{MeV}]$	$m[\text{MeV}]$
1000	1,758	208,544	92,4	2,904
10000	1,645	116,742	92,4	0,0490
100000	1,645	92,334	92,4	0,000628
500000	1,645	82,830	92,4	0,0000284
1000000	1,645	79,763	92,4	0,00000746

Tabelle 6.12: Verhalten der Parameter bei $f_{\pi} = \text{const}$ für $\Lambda_{\text{co}} \rightarrow \infty$

Bei Erhöhung des Cut-Offs entstehen die Sets in Tabelle 6.12. Der Kopplungs-Faktor konvergiert wie bereits festgestellt gegen einen Wert von ungefähr $g_{\text{co}} \approx 1,64493$, die effektive Masse erreicht bei $\Lambda_{\text{co}} = 10^6$ MeV einen Wert von nur noch $M = 79,763$ MeV, liegt damit etwas über dem von $M = 78,367$ MeV im chiralen Limes, und die nackte Masse sinkt weiter und nähert sich der Null für unendlich große Regularisierungs-Parameter. Dieses Verhalten ist demnach unabhängig von der Wahl des konstant gehaltenen Parameters.

6.2.2 Pauli-Villars Regularisierung

Mit den Startwerten $M = 300$ MeV und $f_{\pi} = 92,4$ MeV werden die Anfangsparameter berechnet aus der Gap-Gleichung 3.27, der Formel 4.11 für m und Gleichung 4.18 mit $J_{\text{pv}}(M, m_{\pi})$ aus 4.7 und g_{π} aus 4.14. Damit werden wieder die gleichen Cut-Off Parameter wie im chiralen Limes gegenübergestellt.

Konstantes M resultiert in folgender Tabelle 6.13:

$\Lambda_{\text{pv}}[\text{MeV}]$	g_{pv}	$M[\text{MeV}]$	$f_{\pi}[\text{MeV}]$	$m[\text{MeV}]$
815,912	5,549	300	92,4	9,519
900	5,278	300	98,078	8,369
1000	5,036	300	104,049	7,268
1100	4,853	300	109,329	6,382
1147	4,783	300	111,609	6,025
1200	4,712	300	114,044	5,659

Tabelle 6.13: Parameter-Sets für festgehaltene Masse M unter Erhöhung des Cut-Off Parameters Λ_{pv}

Wie schon bei der Cut-Off Regularisierung weichen die erhaltenen Parameter nur wenig von denen bei $m = 0$ ab. Beim Vergleich der Wertetabellen 6.5 und 6.13 fällt g_{pv} im nicht-chiralen Fall knapp 0,125 MeV kleiner aus, während die Abweichung für f_{π} nur 0,005 MeV nach unten beträgt. Der Startwert für den Cut-Off Parameter ist mit $\Lambda_{\text{pv}} = 815,912$ MeV um 0,06 MeV größer als bei der Pauli-Villars Regularisierung im chiralen Limes und übersteigt damit den bei der Cut-Off Regularisierung um 151,563 MeV. Ebenso ist hier der Kopplungs-Faktor mit $g_{\text{pv}} = 5,549$ höher als $g_{\text{co}} = 2,061$, fällt aber auch mit wachsendem Λ_{pv} ab. Das f_{π} steigt wie bei der anderen Regularisierung an, ist hier jedoch unter Betrachtung der Schrittweite immer etwas niedriger.

Einen entscheidenden Unterschied stellt die nackte Quark-Masse dar, welche bei der Pauli-Villars Regularisierung mit $m = 9,519$ MeV fast doppelt so groß ist wie die $m = 5,327$ MeV bei der Cut-Off Regularisierung.

$\Lambda_{\text{pv}}[\text{MeV}]$	g_{pv}	$M[\text{MeV}]$	$f_{\pi}[\text{MeV}]$	$m[\text{MeV}]$
1000	5,036	300	104,049	7,268
10000	3,837	300	203,133	0,208
100000	3,812	300	269,716	0,00364
500000	3,812	300	307,833	0,000189
1000000	3,812	300	322,865	0,0000521

Tabelle 6.14: Verhalten der Parameter bei $M = \text{const}$ für $\Lambda_{\text{pv}} \rightarrow \infty$

Für $\Lambda_{\text{pv}} \rightarrow \infty$ geht der Kopplungs-Faktor gegen $g_{\text{pv}} = 3,812$, was bereits aus dem chiralen Limes bekannt ist. Die Pion-Zerfallskonstante erreicht bei $\Lambda_{\text{pv}} = 10^6$ MeV den Wert $f_{\pi} = 322,865$ MeV womit sie leicht unter der im chiralen Limes und 3,865 MeV unter der entsprechenden Zerfallskonstanten bei der Cut-Off Regularisierung aus Tabelle 6.10 liegt.

Des weiteren ist die Masse m beim höchsten untersuchten Cut-Off mit $m = 5,21 \cdot 10^{-5}$ MeV noch beinahe doppelt so groß wie die der Cut-Off Regularisierung mit $m = 2,30 \cdot 10^{-5}$ MeV, aber hier gilt trotzdem auch $\lim_{\Lambda_{\text{pv}} \rightarrow \infty} m = 0$.

Zuletzt wird erneut die Pion-Zerfallskonstante konstant auf ihrem Anfangswert von $f_{\pi} = 92,4$ MeV gehalten und die dazu berechneten Parameter bei größeren Λ_{pv} in den Tabellen 6.15 sowie 6.16 aufgeführt.

$\Lambda_{\text{pv}}[\text{MeV}]$	g_{pv}	$M[\text{MeV}]$	$f_{\pi}[\text{MeV}]$	$m[\text{MeV}]$
815,912	5,549	300	92,4	9,519
900	4,942	262,409	92,4	7,984
947	4,747	249,048	92,4	7,305
1000	4,587	237,324	92,4	6,648

Tabelle 6.15: Parameter-Sets für festgehaltene Pion-Zerfallskonstante f_{π} unter Erhöhung des Cut-Off Parameters Λ_{pv}

Verglichen mit den entsprechenden Parameter-Sets im chiralen Limes aus Tabelle 6.5 ist g_{pv} für jedes Λ_{pv} gemittelt 0,153 MeV kleiner und M etwa 0,05 MeV größer und die Werte fallen langsam ab.

Gegenüber der Cut-Off Regularisierung in Tabelle 6.11 fällt die nackte Quark-Masse hier deutlich höher aus so wie auch der Kopplungs-Faktor, während sich die Konstituenten-Masse im Mittel gleich schnell verringert. Dennoch sind g_{pv} und m beispielsweise bei $\Lambda_{\text{pv}} = 1000$ MeV kleiner als für festgehaltenes M mit $g_{\text{pv}} = 5,036$ und $m = 7,268$ MeV, was bedeutet, dass sie rascher abnehmen.

$\Lambda_{\text{pv}}[\text{MeV}]$	g_{pv}	$M[\text{MeV}]$	$f_{\pi}[\text{MeV}]$	$m[\text{MeV}]$
1000	4,587	237,324	92,4	6,648
10000	3,814	119,778	92,4	0,111
100000	3,812	93,691	92,4	0,00143
500000	3,812	83,733	92,4	0,0000651
1000000	3,812	80,525	92,4	0,0000171

Tabelle 6.16: Verhalten der Parameter bei $f_{\pi} = \text{const}$ für $\Lambda_{\text{pv}} \rightarrow \infty$

Wie anhand von Tabelle 6.16 zu erkennen, besitzt der Kopplungs-Faktor auch diesmal einen Grenzwert von $\lim_{\Lambda_{\text{pv}} \rightarrow \infty} g_{\text{pv}} = \frac{\pi^2}{9 \ln(\frac{4}{3})}$, wohingegen die beiden Massen gegen Null konvergieren. Den betrachteten Verlauf von Λ_{pv} über liegen diese immer etwas über denen aus Tabelle 6.12 in der Cut-Off Regularisierung, vergleichbar anhand der Werte $M = 79,763$ MeV und $m = 7,46 \cdot 10^{-6}$ MeV bei $\Lambda_{\text{pv}} = 10^6$ MeV. Auch im Vergleich mit der Pauli-Villars Regularisierung im chiralen Limes in Tabelle 6.8 sind Ähnlichkeiten im Verhalten und Betrag der effektiven Masse sowie des Kopplungs-Faktors auszumachen, was wiederum darauf hindeutet, dass für $\Lambda_{\text{pv}} \rightarrow \infty$ der Fall $m \rightarrow 0$ vorliegt.

7 Fazit und Ausblick

Ausgehend von $M = 300$ MeV und $f_\pi = 92,4$ MeV wurden sowohl im chiralen Limes als auch für $m \neq 0$ jeweils die Parameter g , M , f_π , m und der CEP numerisch mittels Cut-Off und Pauli-Villars Regularisierung bei Erhöhung des Regularisierungs-Parameters Λ berechnet.

Im chiralen Limes gilt für den Startwert in Cut-Off Regularisierung $\Lambda_{\text{co}} = 664,281$ MeV und $g_{\text{co}} = 2,098$ und in Pauli-Villars Regularisierung $\Lambda_{\text{pv}} = 815,852$ MeV und $g_{\text{pv}} = 5,731$.

Unabhängig vom Regularisierung-Schema nehmen Kopplungs-Faktor und Konstituenten-Masse bei konstantem f_π ab und die Pion-Zerfallskonstante bei konstantem M mit wachsendem Cut-Off zu. Für beide Regularisierungen fällt die effektive Quark-Masse bzw. steigt die Zerfallskonstante in etwa gleich schnell und nimmt auch ähnliche Werte an und es gilt $\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} M = 0$ für $f_\pi = \text{const}$ und $\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} f_\pi = \infty$ für $M = \text{const}$.

Damit wären theoretisch für $\Lambda \rightarrow \infty$ die Quarks masselos und die Pionen würden sofort nach ihrer Entstehung wieder zerfallen. Im Gegensatz zu einem renormierbaren Modell entspricht dieses Verhalten der Parameter für unendlichen Cut-Off nicht der Wirklichkeit, sodass also der Regularisierungs-Parameter nicht beliebig hohe Werte annehmen kann, ohne dabei die Gültigkeit des Modells zu beeinflussen.

Auch bewegt sich die Phasengrenze im T - μ -Diagramm in beiden Fällen vom Ursprung weg, wobei dies bei Pauli-Villars langsamer geschieht, und der kritische Endpunkt wandert zu niedrigen Temperaturen und verschwindet schließlich, bei Cut-Off früher als bei Pauli-Villars Regularisierung, sodass ab dann nur ein Phasenübergang zweiter Ordnung vorliegt. Dies ist in Cut-Off Regularisierung und festem M bei $\Lambda_{\text{co}} = 960$ MeV und bei festem f_π bei $\Lambda_{\text{co}} = 785$ MeV der Fall, während in Pauli-Villars Regularisierung der CEP bis $\Lambda_{\text{pv}} = 1147$ MeV bzw. $\Lambda_{\text{pv}} = 947$ MeV bestehen bleibt.

Bei konstantem f_π fällt generell g schneller ab, die Phasengrenze verschiebt sich zuerst zum Ursprung bevor sie sich zu großen T und μ ausdehnt und der kritische Endpunkt bleibt kürzer bestehen als für konstantes M .

Unabhängig von der Wahl des konstanten Parameters, jedoch nicht von der Regularisierung, ist der Grenzwert des Kopplungs-Faktors mit $\lim_{\Lambda_{\text{co}} \rightarrow \infty} g_{\text{co}} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1,64493$ und $\lim_{\Lambda_{\text{pv}} \rightarrow \infty} g_{\text{pv}} = \frac{\pi^2}{9 \ln(\frac{4}{3})} \approx 3,81193$. Da dieser im Unendlichen konstant bleibt, verschwindet überall die Kopplungs-Konstante mit $G = g \Lambda^{-2}$.

Fern vom chiralen Limes sind die Startwerte mit $\Lambda_{\text{co}} = 664,349$ MeV und $g_{\text{co}} = 2,061$ in Cut-Off, sowie $\Lambda_{\text{pv}} = 815,912$ MeV und $g_{\text{pv}} = 5,549$ in Pauli-Villars Regularisierung sehr ähnlich zu denen im chiralen Limes. Das Verhalten aller Parameter für wachsenden Cut-Off gleicht ebenfalls dem im chiralen Limes und auch die berechneten Parameter-Werte weichen oft nur um wenige MeV ab.

Die eingeführte nackte Quark-Masse m ist anfangs bei Pauli-Villars Regularisierung mit $m = 9,519$ MeV fast doppelt so groß wie die $m = 5,327$ MeV der Cut-Off Regularisierung. Des weiteren nimmt sie bei konstanter Masse schneller ab als bei konstanter Pion-Zerfallskonstante und für beide Regularisierungen und unabhängig von der Konstanten ergibt sich für $\Lambda \rightarrow \infty$ der Grenzwert $m \rightarrow 0$, sodass wieder der chirale Limes vorliegt.

Noch zu ergänzen wäre hier die numerische Auswertung der Ginsburg-Landau Koeffizienten sowie deren Nullstellen bei nicht-verschwindender nackter Quark-Masse für die betrachteten Parameter-Sets. Damit sollte dann die Bestimmung der Lage der Phasengrenze, der Spinodalen und des trikritischen Punktes im Phasendiagramm möglich sein und deren Verhalten für $\Lambda \rightarrow \infty$ könnte untersucht und mit den chiralen Verläufen verglichen werden.

Problematisch ist außerdem, dass das NJL-Modell in den hier betrachteten 3 + 1-Dimensionen nicht-renormierbar ist, was es nur zu einer effektiven Feldtheorie macht, die nach wie vor eine Erweiterung auf höhere Regularisierungs-Parameter benötigt. Ideal wäre die Entwicklung neuer alternativer Modelle zur besseren Beschreibung der starken Wechselwirkung, in welchen die auszeichnenden Phänomene der QCD, also Confinement und asymptotische Freiheit, von vornherein implementiert sind.

8 Quellenangabe

8.1 Literatur

- [1] David Griffiths. *Introduction to Elementary Particles*. John Wiley & Sons. Second, Revised Edition, 2008.
- [2] Michael Buballa. *NJL-model analysis of dense quark matter*. Elsevier, Physics Reports, Vol. 407, No. 4-6, S. 205-376, 2005. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2004.11.004>. URL: <https://arxiv.org/pdf/hep-ph/0402234v2.pdf>.
- [3] Y. Nambu und G. Jona-Lasinio. *Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. I*. American Physical Society, Physical Review, Vol. 122, No. 1, S. 345-358, 1961. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRev.122.345>. URL: <https://journals.aps.org/pr/pdf/10.1103/PhysRev.122.345>.
- [4] Y. Nambu und G. Jona-Lasinio. *Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. II*. American Physical Society, Physical Review, Vol. 124, No. 1, S. 246-254, 1961. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRev.124.246>. URL: <https://journals.aps.org/pr/pdf/10.1103/PhysRev.124.246>.
- [5] S. P. Klevansky. *The Nambu—Jona-Lasinio model of quantum chromodynamics*. American Physical Society, Reviews of Modern Physics, Vol. 64., No. 3, S. 649-708, 1992. DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.64.649>. URL: <https://journals.aps.org/rmp/pdf/10.1103/RevModPhys.64.649>.
- [6] Micaela Oertel. *Investigation of meson loop effects in the Nambu—Jona-Lasinio model*. Dissertation, Technische Universität Darmstadt, 2000. URL: <https://arxiv.org/pdf/hep-ph/0012224v1.pdf>.
- [7] Peter Schmäuser. *Feynman-Graphen und Eichtheorien für Experimentalphysiker*. Springer-Verlag, Vol. 295, 2011. URL: <https://link.springer.com/book/10.1007%2F3-540-18797-9>.
- [8] M. Oertel, M. Buballa und J. Wambach. *Meson-loop effects in the NJL model at zero and non-zero temperature*. Springer, Physics of Atomic Nuclei, Vol. 64, No. 4, S. 698-726, 2001. URL: <https://arxiv.org/pdf/hep-ph/0008131.pdf>.
- [9] Dominik Nickel. *Inhomogeneous phases in the Nambu—Jona-Lasinio and quark-meson model*. American Physical Society, Physical Review D, Vol. 80, No. 7, 2009. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.80.074025>. URL: <https://arxiv.org/pdf/0906.5295.pdf>.
- [10] J. I. Kapusta und P. V. Landshoff. *Finite-temperature field theory*. IOP Publishing, Journal of Physics G: Nuclear und Particle Physics, Vol. 15, No. 3, S. 267-285, 1989. URL: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0954-3899/15/3/005/pdf>.
- [11] M. Buballa und S. Carignano. *Influence of quark masses and strangeness degrees of freedom on inhomogeneous chiral phases*, 2019. URL: <https://arxiv.org/pdf/1906.03241.pdf>.
- [12] Barry R. Holstein. *How large is F_π ?* Elsevier, Physics Letters B, Vol. 244, No. 1, S. 83-87, 1990. DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(90\)90273-9](https://doi.org/10.1016/0370-2693(90)90273-9). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269390902739>.

-
- [13] Robin Alexander Beck. *Taylor series expansion of the Ginzburg-Landau coefficients in the NJL model*. Bachelor-Thesis, Technische Universität Darmstadt, 2019. URL: <https://theorie.ikp.physik.tu-darmstadt.de/nhq/downloads/thesis/bachelor.beck.pdf>.
- [14] David Scheffler. *NJL model study of the QCD phase diagram using the Taylor series expansion technique*. Bachelor-Thesis, Technische Universität Darmstadt, 2007. URL: <https://theorie.ikp.physik.tu-darmstadt.de/nhq/downloads/thesis/bachelor.scheffler.pdf>.
- [15] Lukas Henry Seifert. *Phasengrenzen farbsupraleitender und inhomogener Phasen im NJL-Modell*. Bachelor-Thesis, Technische Universität Darmstadt, 2019. URL: <https://theorie.ikp.physik.tu-darmstadt.de/nhq/downloads/thesis/bachelor.seifert.pdf>.
- [16] Sven Möller. *Pion-Pion Scattering and Shear Viscosity in the Nambu—Jona-Lasinio Model*. Master-Thesis, Technische Universität Darmstadt, 2012. URL: <https://theorie.ikp.physik.tu-darmstadt.de/nhq/downloads/thesis/master.moeller.pdf>.

8.2 Abbildungen

- [17] Elementarteilchen (zuletzt besucht: 04.09.21, 22:20). URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Elementarteilchen>.
- [18] Phasen der QCD und von QCD-ähnlichen Theorien (zuletzt besucht: 04.09.21, 22:20). URL: <https://quant.uni-graz.at/forschungsprojekte>.

Alle weiteren Abbildungen wurden selbst erstellt.

8.3 Hilfsmittel

- Wolfram Mathematica 12.2
- TeXstudio 3.1.1

9 Erklärung zur Abschlussarbeit

Hiermit versichere ich, Patrick Falk, die vorliegende Bachelor-Thesis gemäß §22 Abs. 7 APB der TU Darmstadt ohne Hilfe Dritter und nur mit den angegebenen Quellen und Hilfsmitteln angefertigt zu haben. Alle Stellen, die Quellen entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht worden. Diese Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen.

Mir ist bekannt, dass im Falle eines Plagiats (§38 Abs. 2 APB) ein Täuschungsversuch vorliegt, der dazu führt, dass die Arbeit mit 5,0 bewertet und damit ein Prüfungsversuch verbraucht wird. Abschlussarbeiten dürfen nur einmal wiederholt werden.

Darmstadt, den 06. September 2021



Patrick Falk