

Institut für Kernphysik
Schloßgartenstraße 9
64289 Darmstadt



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Bachelor Thesis

Untersuchung des Sigma Mesons im NJL Modell am kritischen
Punkt des QCD Phasendiagramms

Investigation of the Sigma Meson in the NJL Model at the Critical
Endpoint of the QCD Phase Diagram

Daniel Müller

Betreuung:
Prof. Dr. Jochen Wambach
PD Dr. Michael Buballa

Oktober 2007

Zusammenfassung

Die effektive Quarkmasse und Mesonenmassen werden im Nambu-Jona-Lasinio (NJL) Modell abgeleitet. Über den Imaginärteil des Mesonpropagators werden die Spektralfunktion des Mesons berechnet, welche weitere Informationen enthalten. Diese Arbeit spezialisiert sich dabei auf die Eigenschaften von Sigma und Pi Meson. Insbesondere wird dabei die Spektralfunktion des Sigma Mesons am kritischen Punkt des QCD-Phasendiagramms untersucht. Durch den Phasenübergang zweiter Ordnung an diesem ausgezeichneten Punkt wird hier eine masselose Anregung im Sigma Spektrum erwartet. Diese Resonanz wird im NJL Modell numerisch gezeigt werden, sie tritt jedoch nur im Limes verschwindendem Dreierimpuls auf.

Abstract

The effective quark mass and meson masses are derived in the Nambu-Jona-Lasinio (NJL) model. With the imaginary part of the meson propagator the spectral function of mesons are calculated which gives further information. This work focusses on properties of sigma and pi mesons. Especially the spectral function of the sigma meson at the critical endpoint in the QCD phase diagram is investigated. At this special point the phase transition is of second order and therefore a massless excitation in the sigma spectrum is expected. This resonance is identified numerically in the NJL model. It occurs in the limit of vanishing 3-momentum.

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	2
2	Das Nambu-Jona-Lasinio Modell	3
2.1	Der Nambu-Jona-Lasinio Lagrangian	3
2.2	Symmetrien des NJL Modells	3
3	Konstituentenquarkmasse	5
3.1	Quarks im Vakuum	5
3.2	Quarkmasse im Medium	6
3.3	Das thermodynamische Potential	7
3.4	Regularisierung	8
3.5	Numerische Ergebnisse	9
4	Phasendiagramm und kritischer Endpunkt	10
4.1	Phasendiagramm	10
4.2	Untersuchung des thermodynamischen Potentials	11
4.3	Numerische Auswertung	12
5	Mesonenmasse	16
5.1	Mesonenmasse im Vakuum	16
5.2	Mesonenmasse im Medium	17
5.3	Numerische Ergebnisse	18
6	Spektralfunktionen von Mesonen	20
6.1	Untersuchung des Mesonpropagators	20
6.2	Die Spektralfunktion	21
6.3	Die Spektralfunktion des Sigma Mesons am CEP	22
6.4	Spektralfunktion der Quarkanzahl-Suszeptibilität	24
7	Zusammenfassung und Ausblick	29

1 Einführung

Zur Beschreibung der starken Wechselwirkung stellt die Quantenchromodynamik die heute allgemein anerkannte Eichtheorie dar. Quarks sind die Elementarteilchen in dieser Theorie und wechselwirken unter Austausch von Gluonen untereinander. Quarks und Gluonen tragen eine Farbladung, welche, analog zur elektrischen Ladung bei der elektromagnetischen Wechselwirkung, die Ursache für die stark attraktive Kraft ist. Es gibt sechs verschiedene Quarksorten (up, down, strange, charm, bottom, top), wobei in dieser Arbeit nur die beiden leichtesten Quarks (up, down) betrachtet werden. Die restlichen werden aufgrund ihrer deutlich höheren Masse vernachlässigt. Bei geringen Abständen zwischen den Quarks bzw. hohen Energien kann diese Theorie in Analogie zur Quantenelektrodynamik mit störungstheoretischen Methoden behandelt werden, da hier die Quark-Gluon Kopplung schwach genug wird (Asymptotische Freiheit) ([1], [2]). Dieser Bereich ist daher recht gut verstanden. Bei niedrigeren Energien ist dies aufgrund der dort vorherrschenden starken Kopplung nicht mehr möglich. Das Confinement spielt hier eine große Rolle, welches Quarks nur im gebundenen Zustand als Hadronen zulässt, welche zudem nach außen farbneutral sein müssen.

Daher ist es möglich, zwei verschiedene Phasen zu unterscheiden. Für niedrige Temperaturen und Dichten liegt die hadronische Phase mit gebundenen Quarks vor. Erhöhung des chemischen Potentials, welches die netto Baryonenanzahldichte erhöht, oder Erhöhung der Temperatur, wodurch aufgrund gesteigerter Quark-Antiquark Paarproduktion die absolute Quarkdichte erhöht wird, senkt die Abstände zwischen Quarks und Gluonen, bis das Quark-Gluon Plasma erreicht wird. Hier ist das Confinement aufgehoben und Quarks und Gluonen liegen als freie Teilchen vor. Diese beiden Phasen können in einem Phasendiagramm veranschaulicht werden, wo sie gewöhnlich durch einen Phasenübergang erster Ordnung getrennt sind. In vielen Modellen existiert auch ein kritischer Endpunkt der Phasengrenze (CEP). Dort kann man spezielle Eigenschaften, wie einen Phasenübergang zweiter Ordnung beobachten. Daher ist es auch interessant, Mesonen an diesem Punkt zu untersuchen.

Ein weiterer grundlegender Aspekt in der QCD sind Symmetrien. Wichtig hierbei ist die chirale Symmetrie, welche im Vakuum spontan gebrochen ist und einen komplizierten Vakuumzustand verursacht. Im Medium wird die Symmetrie wiederhergestellt.

In dieser Arbeit wird die das Nambu-Jona-Lasinio (NJL) Modell als effektives Modell zur Beschreibung der QCD verwendet. Es beinhaltet alle globalen Symmetrien der QCD [3], welche in Kapitel 2 untersucht werden, darunter auch das komplexe Verhalten der chiralen Symmetrie. Die Berechnung der effektiven Quarkmasse wird in Kapitel 3 durchgeführt. Mit geeigneter Wahl der freien Parameter Kopplungskonstante und nackte Quarkmasse (Stromquarkmasse) kann ein Phasendiagramm mit Phasengrenze und CEP berechnet werden (Kapitel 4). Die Mesonenmassen werden aus der Resonanz in der Quark-Antiquark Streuung abgeleitet (Kapitel 5). Durch Anschauen der Spektralfunktionen können die Mesonen genauer untersucht werden. Hierbei können auch Moden wie die Quark-Antiquark Paarerzeugung und der Teilchen-Loch-Prozesse identifiziert werden. Von letzterem wird erwartet, dass er im Falle des Sigma Mesons am CEP eine masselose Anregung wird. Die Untersuchung der Spektralfunktion des Sigma Mesons am CEP stellt daher einen Schwerpunkt dieser Arbeit dar (Kapitel 6).

2 Das Nambu-Jona-Lasinio Modell

2.1 Der Nambu-Jona-Lasinio Lagrangian

Das Nambu-Jona-Lasinio Modell wurde anfangs der sechziger Jahre zur Beschreibung wechselwirkender Fermionen entwickelt. Dabei wurden Nukleon-Nukleon Wechselwirkungen beschrieben. Das Modell beinhaltet kein Confinement, da zu dieser Zeit die QCD noch nicht bekannt war und es bei Nukleon-Nukleon Wechselwirkungen kein Confinement gibt. Die Stärken des Modells sind stattdessen die Symmetrien, da neben der Erhaltung der globalen Symmetrien der QCD auch die Brechung der chiralen Symmetrie im Vakuum, sowie deren Wiederherstellung im Medium beschrieben wird. Daher kann das Modell heute recht gut auf Quarkfelder angewendet werden.

Der einfachste Lagrangian für ein Quarkfeld q lautet [4]

$$\mathcal{L} = \bar{q}(i\not{\partial} - m_0)q + g [(\bar{q}q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5\vec{\tau}q)^2] \quad (2.1)$$

m_0 stellt die Stromquarkmasse dar, g ist die Kopplungskonstante der Wechselwirkung und $\vec{\tau}$ sind die Paulimatrizen im Isospinraum. Der erste Term des Lagrangian stellt den Dirac-Beitrag eines freien Fermions dar, während der zweite Term die Vierpunkt-Quark-Antiquark Wechselwirkung in einem skalaren ($\mathbf{1}$) und einem pseudoskalaren ($i\gamma_5\vec{\tau}$) Kanal berücksichtigt. Vektor und axiale Wechselwirkungen werden in dieser Arbeit nicht betrachtet.

2.2 Symmetrien des NJL Modells

Eine wichtige Eigenschaft des NJL Modells ist die Beschreibung der Symmetrien. Der Lagrangian Gl. (2.1) zeigt eine Invarianz unter $U_V(1)$ Transformationen

$$q \rightarrow \exp[-i\alpha]q \quad (2.2)$$

was sofort ersichtlich ist und die Baryonenzahlerhaltung garantiert. Desweiteren ist die Invarianz unter $SU_V(2)$ Rotationen

$$q \rightarrow \exp[-i\vec{\tau} \cdot \vec{\theta}/2]q \quad (2.3)$$

gewährleistet, was für infinitesimale Rotationen $q \rightarrow (1 - i\vec{\tau} \cdot \vec{\theta}/2)q$ sofort ersichtlich ist. Diese Transformation bewirkt eine Flavour Rotation und für den Fall identischer Massen der Quark Flavours ist die Invarianz gewährleistet [5]. In der Natur sind die Massen von up und down Quark fast identisch und unterscheiden sich nur um wenige MeV , daher ist diese Symmetrie recht gut erhalten. Sie zeigt, dass die Quark-Gluon Wechselwirkung unabhängig vom Quark Flavour ist.

Die interessanteste Symmetrie ist die chirale Symmetrie. Der NJL-Lagrangian Gl. (2.1) verletzt diese Symmetrie im Allgemeinen jedoch. Nur im chiralen Limes, d.h. $m_0 = 0$ ist der Lagrangian invariant unter $SU_A(2)$ Transformationen [5]

$$q \rightarrow \exp[-i\gamma_5\vec{\tau} \cdot \vec{\theta}/2]q \quad (2.4)$$

Zum Prüfen der Symmetrie schreibt man zuerst die Exponentialfunktion um

$$\exp[-i\gamma_5\vec{\tau} \cdot \vec{\theta}/2] = \cos \frac{\theta}{2} - i\gamma_5 \frac{\vec{\tau} \cdot \vec{\theta}}{\theta} \sin \frac{\theta}{2} \quad (2.5)$$

Verwendet man noch die Beziehung der Paulimatrizen

$$\tau_i \tau_j = \delta_{ij} + i \epsilon_{ijk} \tau_k \quad (2.6)$$

ergeben die Wechselwirkungsterme

$$\begin{aligned} (\bar{q}q) &\rightarrow (\bar{q}q) \cos \theta - (\bar{q}i\gamma_5 \frac{\vec{\tau} \cdot \vec{\theta}}{\theta} q) \sin \theta \\ (\bar{q}i\gamma_5 \vec{\tau} q) &\rightarrow (\bar{q}i\gamma_5 \vec{\tau} q) + (\bar{q}q) \frac{\vec{\theta}}{\theta} \sin \theta - \bar{q}i\gamma_5 \frac{\vec{\tau} \cdot \vec{\theta}}{\theta} q \frac{\vec{\theta}}{\theta} (1 - \cos \theta) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Setzt man die transformierten Terme in den Lagrangian Gl. (2.1) ein, ergibt sich nach kurzer Rechnung die Invarianz. Dabei sieht man jedoch auch, dass es notwendig war, den beiden Wechselwirkungstermen $(\bar{q}q)^2$ und $(\bar{q}i\gamma_5 \vec{\tau} q)^2$ die selbe Kopplungskonstante g zu geben. Über diese beiden Wechselwirkungsterme wird später die Masse des Sigma und des Pi Mesons berechnet. Für genügend große Kopplungskonstante ist die chirale Symmetrie im Vakuum jedoch durch eine nichtverschwindende effektive Quarkmasse (siehe nächstes Kapitel) spontan gebrochen. Dadurch sind auch die Massen der beiden chiralen Partner Pion und Sigma Meson verschieden. Dies erfordert die Existenz eines masselosen Teilchens, welches man Goldstone-Boson nennt [3]. Dieses ist durch das im chiralen Limes masselosen Pion gegeben.

Wie auch im Lagrangian berücksichtigt, ist die Quarkmasse m_0 in der Natur zwar sehr klein ist, verschwindet aber nicht exakt. Die chirale Symmetrie ist dadurch zusätzlich auch explizit gebrochen. Daher erhält auch das Pion eine geringe Masse. Im Medium bei hohen Temperaturen oder chemischen Potentialen wird die chirale Symmetrie wiederhergestellt.

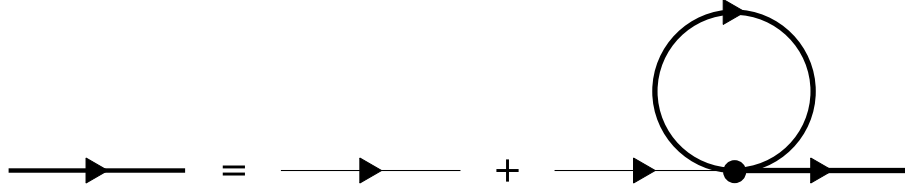


Abbildung 3.1: Quark Propagator

3 Konstituentenquarkmasse

3.1 Quarks im Vakuum

In einem ersten Schritt wird die effektive Quarkmasse (Konstituentenquarkmasse) im Vakuum berechnet. Dazu muss die Wechselwirkung zwischen den Quarks berücksichtigt werden. Abb. 3.1 zeigt die dazugehörige Dyson Gleichung in Hartree Näherung (siehe z.B. [6], [7]). Die nackten Quarkpropagatoren (dünne Linien) hängen von der Stromquarkmasse m_0 ab und sind freie Propagatoren ohne Wechselwirkung, während die Hartreepropagatoren (dicke Linien) von der Konstituentenquarkmasse m abhängen. Der Wechselwirkungsververtex mit Selbstenergieschleife bringt einen Beitrag zur Quarkmasse, sodass m und m_0 verschieden sind. Die Beschreibung mit Hartreepropagatoren (insbesondere als Selbstenergieschleife) verdeutlicht den nichtperturbativen Charakter.

Mit dem (Hartree-)Propagator

$$S^{-1}(k) = \not{k} - m + i\epsilon \quad (3.1)$$

ergibt die Dyson Gleichung

$$S(k) = S_0(k) + S_0(k) \cdot \left[\sum_M \Gamma_M 2ig \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr(\Gamma_M \cdot S(k)) \right] \cdot S(k) \quad (3.2)$$

S_0 ist der nackte Propagator (abhängig von m_0) und M steht für die Wechselwirkungskanäle σ und π .

$$\Gamma_\sigma = \mathbf{1}, \quad \Gamma_\pi = i\gamma_5 \vec{\tau} \quad (3.3)$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $S_0^{-1}(k)$ von links und $S^{-1}(k)$ von rechts und setzt die Propagatoren ein, erhält man

$$m = m_0 + \sum_M \Gamma_M 2ig \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr(\Gamma_M \cdot S(k)) \quad (3.4)$$

Die Spuren müssen im Farb-, Flavour- und Diracraum im σ und π Kanal ausgewertet werden. Da die Paulimatrizen $\vec{\tau}$ spurfrei sind, trägt der Pionkanal nicht bei. Im Sigmakanal ergibt die Spur

$$Tr(\Gamma_\sigma \cdot S(k)) = Tr \left(\mathbf{1} \cdot \frac{\not{k} + m}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \right) = \frac{4N_c N_f m}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (3.5)$$

wobei $N_c = 3$ und $N_f = 2$ die Anzahl der Farben und relevanten Quark Flavours darstellen. Damit erhält man aus Gl. (3.4) die Gap-Gleichung

$$m = m_0 + 8mgN_cN_f iI_{1,vac} \quad (3.6)$$

mit

$$iI_{1,vac} = i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} = \int_0^\infty \frac{d|\vec{k}|}{(2\pi)^2} \frac{|\vec{k}|^2}{\sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2}} \quad (3.7)$$

Im letzten Schritt wurde die Integration über k_0 mit dem Residuensatz ausgeführt und Kugelkoordinaten angewendet. Somit kann die Konstituentenquarkmasse m numerisch berechnet werden.

3.2 Quarkmasse im Medium

Um Massen für nichtverschwindende Temperaturen und chemische Potentiale zu berechnen, wendet man den Matsubara Formalismus an. Hierbei ersetzt man die 4-Impuls-Integrale mit [9]:

$$i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} f(k_0, \vec{k}) \longrightarrow -T \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} f(i\omega_n + \mu, \vec{k}) \quad (3.8)$$

mit den fermionischen Matsubarafrequenzen $\omega_n = (2n + 1)\pi T$. Damit ergibt sich aus Gl. (3.7)

$$iI_1 = -T \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(i\omega_n + \mu)^2 - E_{\vec{k}}^2 + i\epsilon} \quad (3.9)$$

wobei $E_{\vec{k}} = \sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2}$. Dies kann man umschreiben, indem man den Residuensatz rückwärts anwendet.

$$iI_1 = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\pi i} \int_C dz \frac{1}{e^{z/T} + 1} \frac{1}{(z + \mu)^2 - E_{\vec{k}}^2} \quad (3.10)$$

Der Integrationsweg C (siehe Abb. 3.2) enthält alle Pole von $\frac{1}{e^{z/T} + 1}$ bei den Matsubara Frequenzen $i\omega_n$. Da der gesamte Integrand zwei weitere Pole besitzt, kann der Integrationsweg über C' zu C'' deformiert werden und über die beiden anderen Pole stattdessen integriert werden. Nach Ausführung dieser Integration erhält man

$$iI_1 = \int_0^\infty \frac{d|\vec{k}|}{(2\pi)^2} \frac{|\vec{k}|^2}{E_{\vec{k}}} (1 - n_{\vec{k}} - \bar{n}_{\vec{k}})$$

mit $n_{\vec{k}} = \frac{1}{e^{(E_{\vec{k}} - \mu)/T} + 1}$ und $\bar{n}_{\vec{k}} = \frac{1}{e^{(E_{\vec{k}} + \mu)/T} + 1}$

wobei die Gap-Gleichung weiterhin lautet

$$m = m_0 + 8mgN_cN_f iI_1 \quad (3.11)$$

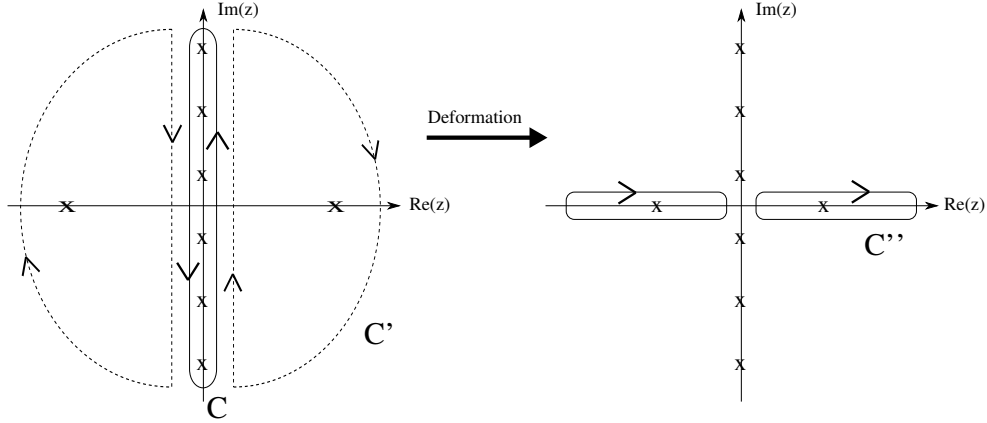


Abbildung 3.2: Integrationswege: links: ursprünglicher Integrationsweg C und erste Deformation C'(gestrichelt), rechts: zweite Deformation C''

3.3 Das thermodynamische Potential

Die Gap-Gleichung Gl. (3.11) besitzt im Allgemeinen mehrere Lösungen. Für verschwindendes chemisches Potential $\mu = 0$ ist nur eine Lösung positiv, welche gleichzeitig die stabile Lösung darstellt. Ist $\mu > 0$ kann es weitere positive Lösungen geben, und mit Ändern der Temperatur oder des chemischen Potentials kann sich auch die Stabilität dieser Lösungen ändern. Daher muss man das thermodynamische Potential miteinbeziehen, um die stabile Lösung zu finden.

In einem ersten Schritt wird der Lagrangian Gl. (2.1) linearisiert

$$(\bar{q}q)^2 = (\langle \bar{q}q \rangle + (\bar{q}q - \langle \bar{q}q \rangle))^2 \approx \langle \bar{q}q \rangle^2 + 2\langle \bar{q}q \rangle(\bar{q}q - \langle \bar{q}q \rangle) = 2\langle \bar{q}q \rangle \bar{q}q - \langle \bar{q}q \rangle^2 \quad (3.12)$$

wobei quadratische Terme der Fluktuation $\bar{q}q - \langle \bar{q}q \rangle$ vernachlässigt wurden. Das Quark-kondensat $\langle \bar{q}q \rangle$ ist definiert durch

$$\langle \bar{q}q \rangle = -i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr}(S(k)) \stackrel{(3.4)}{=} \frac{m_0 - m}{2g} \quad (3.13)$$

Der Term $(\bar{q}i\gamma_5\vec{\tau}q)^2$ trägt nicht bei, da er kein Kondensat erzeugt ($\text{Tr}[i\gamma_5\vec{\tau}]S(k) = 0$). Somit kann der Lagrangian genähert werden:

$$\mathcal{L} \approx \bar{q}(i\cancel{\partial} - m)q - \frac{(m - m_0)^2}{4g} \quad (3.14)$$

wobei $m = m_0 - 2g\langle \bar{q}q \rangle$ die Konstituentenquarkmasse ist. Dieser Lagrangian besitzt einen konstanten Beitrag $-\frac{(m-m_0)^2}{4g}$ sowie den eines freien nichtwechselwirkenden Fermionengas mit Fermionenmasse m . Somit kann das thermodynamische Potential (großkanonische Potential) berechnet werden

$$\begin{aligned} \Omega(T, \mu) &= -\frac{T}{V} \ln \mathcal{Z} = -\frac{T}{V} \ln \text{Tr} \exp \left(-\frac{1}{T} \int d^3x (\mathcal{H} - \mu n) \right) \\ &= \Omega_{free}(T, \mu) + \frac{(m - m_0)^2}{4g} \end{aligned} \quad (3.15)$$

$\Omega_{free}(T, \mu)$ ist das Potential eines freien Fermigas für Fermionenmasse m , welches man in [9] finden kann. Das Endergebnis lautet

$$\Omega(T, \mu) = \frac{(m - m_0)^2}{4g} - 2N_c N_f \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \cdot \left\{ E_{\vec{k}} + T \ln \left(1 + \exp \left(-\frac{E_{\vec{k}} - \mu}{T} \right) \right) + T \ln \left(1 + \exp \left(-\frac{E_{\vec{k}} + \mu}{T} \right) \right) \right\} \quad (3.16)$$

Es kann leicht überprüft werden, dass die Extrembedingung des Potentials bezüglich m zur Gap-Gleichung führt. Im Gegensatz zu dieser gibt das thermodynamische Potential jedoch noch Informationen über die Stabilität der Lösungen, da die stabile Lösung gleichzeitig das globale Minimum des Potential darstellt.

3.4 Regularisierung

Die auftretenden Integrale Gln. (3.11), (3.16) sind divergent und müssen daher reguliert werden. Um später Mesonen mit einem Dreierimpuls betrachten zu können, ist es sinnvoll, eine Lorentz-kovariante Regularisierung anzuwenden. Die Pauli-Villars Regularisierung bietet dies. Dabei wird bei den Integralen folgende Ersetzung angewandt [7]:

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} f(k, m^2) \Rightarrow \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \sum_{j=0}^2 c_j f(k, m^2 + j\Lambda_q^2) \quad (3.17)$$

mit dem Cutoff-Parameter Λ_q und

$$c_0 = 1, \quad c_1 = -2, \quad c_2 = 1 \quad (3.18)$$

Dadurch können Integrale mit quadratischen Divergenzen reguliert werden. Da jedoch das Integral im thermodynamischen Potential Gl. (3.16) eine Divergenz der Ordnung 4 aufweist, bleibt es trotz Pauli-Villars Regularisierung mit Gl. (3.17) divergent. Da das Potential jedoch nur bis auf eine beliebige Konstante (unabhängig von T , μ und m) definiert ist, darf ein unendlicher Vakuum-Beitrag subtrahiert werden.

$$\Omega(T, \mu) = \frac{(m - m_0)^2}{4g} - 2N_c N_f \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ E_{\vec{k}} - E_{\vec{k}, vac} + T \ln \left(1 + \exp \left(-\frac{E_{\vec{k}} - \mu}{T} \right) \right) + T \ln \left(1 + \exp \left(-\frac{E_{\vec{k}} + \mu}{T} \right) \right) \right\} \quad (3.19)$$

Dabei ist $E_{\vec{k}, vac} = \sqrt{\vec{k}^2 + m_{vac}^2}$ und m_{vac} die Konstituentenquarkmasse im Vakuum. Dies ändert nichts an der Ableitung bezüglich m und verursacht nur eine konstante Verschiebung des Potentials. Der Vakuumbeitrag wird auch in die Pauli-Villars Regularisierung miteinbezogen.

$$f(k, m^2, m_{vac}^2) \Rightarrow \sum_{j=0}^2 c_j f(k, m^2 + j\Lambda_q^2, m_{vac}^2 + j\Lambda_q^2) \quad (3.20)$$

Somit erhält man nun ein konvergentes Integral.

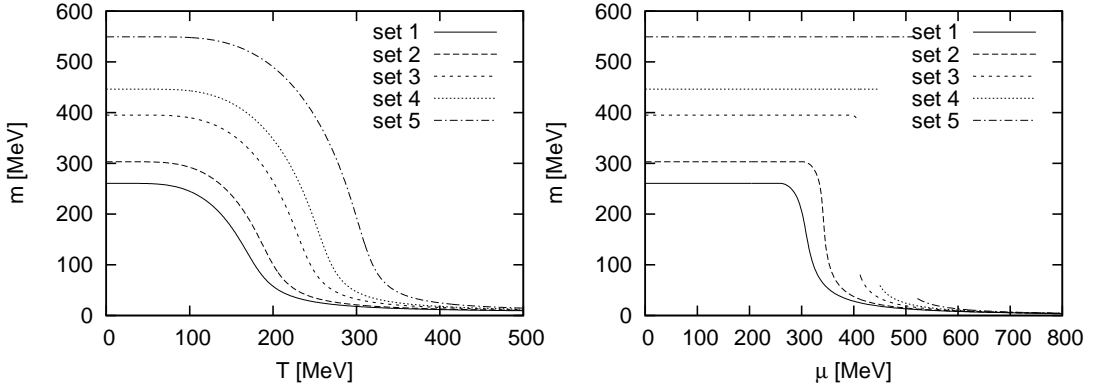


Abbildung 3.3: Abhängigkeit der Konstituentenquarkmasse von der Temperatur bei $\mu = 0$ (links) und vom chemischen Potential bei $T = 0$ (rechts)

3.5 Numerische Ergebnisse

Um die Quarkmasse numerisch berechnen zu können benötigt man die Parameter g , m_0 und Λ_q . Diese werden durch Fit des Quarkkondensats $\langle \bar{q}q \rangle$, der Pionmasse, welche später berechnet wird, und der Pion Zerfallskonstante f_π an ihre empirischen Werte bestimmt. Parametersätze, die zu einer Pionmasse von $m_\pi = 140$ MeV führen (Tab. 1), findet man in [7].

Parametersatz	1	2	3	4	5
Λ_q/MeV	800	800	800	820	852
m_0/MeV	6.13	6.40	6.77	6.70	6.54
$g\Lambda_q^2$	2.90	3.07	3.49	3.70	4.16
m/MeV	260	304	396	446	550

Tabelle 1: Verschiedene Parametersätze mit Modellparametern Λ_q , m_0 und g und daraus resultierenden Konstituentenquarkmassen m

Die Konstituentenquarkmassen erhält man durch Suchen der Nullstelle von Gl. (3.11). Dies wird mit dem Newton-Verfahren mit verschiedenen Startwerten durchgeführt. Die Quarkmasse ist dann die Lösung mit dem niedrigsten thermodynamischen Potential Gl. (3.16). Die Temperaturabhängigkeit der Konstituentenquarkmasse bei $\mu = 0$ ist in Abb. 3.3 auf dem linken Bild dargestellt, sowie die Abhängigkeit vom chemischen Potential bei $T = 0$ auf dem rechten Bild. Die spontan gebrochene chirale Symmetrie sieht man an der nicht verschwindenden Konstituentenquarkmasse im Vakuum. Für größere Werte von T oder μ wird die Quarkmasse sehr klein, was auf die Wiederherstellung der Symmetrie hinweist.

Für weitere numerische Ergebnisse und Diagramme wurde, sofern nicht anders angegeben, immer Parametersatz 3 verwendet.

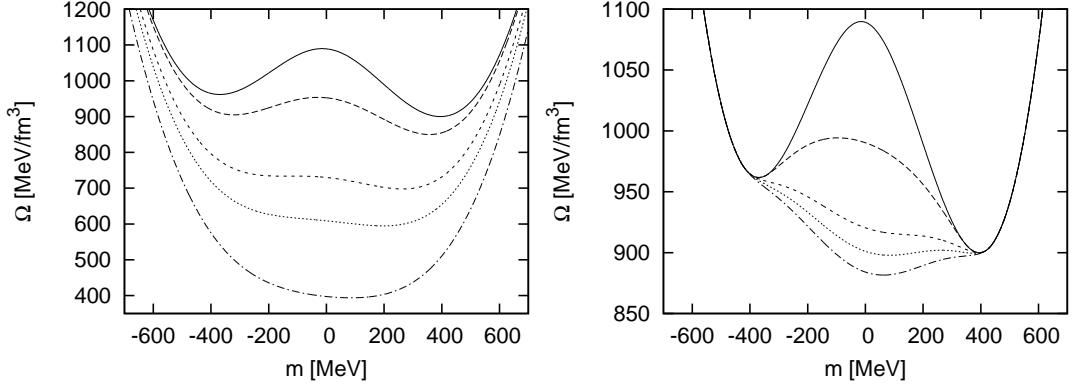


Abbildung 4.1: Entwicklung des thermodynamischen Potentials im Medium: Links: $\mu = 0$, $T = (0, 150, 200, 220, 250)$ MeV von oben, Rechts: $T = 0$, $\mu = (0, 350, 400, 411$ (Phasenübergang), $420)$ MeV von oben

4 Phasendiagramm und kritischer Endpunkt

4.1 Phasendiagramm

Das thermodynamische Potential, das in Kap. 3.3 definiert wurde, gibt Aufschluss darüber, wie sich die Stabilität der Lösungen der Gap-Gleichung entwickelt. Es ist möglich, dass bei Änderung der Temperatur oder des chemischen Potentials eine Lösung instabil und eine weitere stabil wird. Dies spiegelt sich in einer Unstetigkeitsstelle in den $m - T$ oder $m - \mu$ Diagrammen wieder (vgl. Abb. 3.3, rechts, Satz 3-5). Dies ist ein Hinweis auf einen Phasenübergang erster Ordnung. Auch im thermodynamischen Potential direkt lässt sich die Entwicklung der Lösungen beobachten (Abb. 4.1). Im Vakuum gibt es drei Extrema: 2 Minima und dazwischen ein Maximum. Bei $\mu = 0$ findet bei Variation von T kein Phasenübergang statt. Das Minimum bei höheren m bleibt immer das globale Minimum und gibt daher die stabile Lösung. Die anderen Extrema verschwinden auch mit steigender Temperatur. Bei $T = 0$ und steigendem μ ist die Situation anders. Hier entwickelt sich ein weiteres Minimum zwischen den beiden ursprünglichen, welches bei höherem μ das globale Minimum wird. Bei $\mu = 411$ MeV findet daher ein Phasenübergang statt. Bei noch höherem μ verschwinden auch die anderen Extrema.

Bestimmt man alle T - μ -Paare, bei denen ein Phasenübergang auftritt, kann man ein Phasendiagramm zeichnen (Abb. 4.2, links). Hierbei fällt auf, dass für kleines chemisches Potential kein Phasenübergang auftritt und es somit einen Endpunkt der Phasengrenze gibt. Diesen nennt man kritischen Endpunkt (CEP). Dort liegt ein Phasenübergang zweiter Ordnung vor. Beim Parametersatz 3 liegt der CEP etwa bei $T_{cep} = 55$ MeV und $\mu_{cep} = 388$ MeV mit einer Stromquarkmasse $m_0 = 6.77$ MeV. Bei kritischer Temperatur zeigt das $m - \mu$ Diagramm keine Unstetigkeitsstelle, aber stattdessen unendliche Steigung bei kritischem chemischen Potential (Abb. 4.2, rechts).

Das thermodynamische Potential bei kritischer Temperatur ist in Abb. 4.3 dargestellt. Der Phasenübergang zweiter Ordnung zeigt sich im Minimum mit verschwindender Krümmung. Im chiralen Limes wird das Potential symmetrisch bezüglich m .

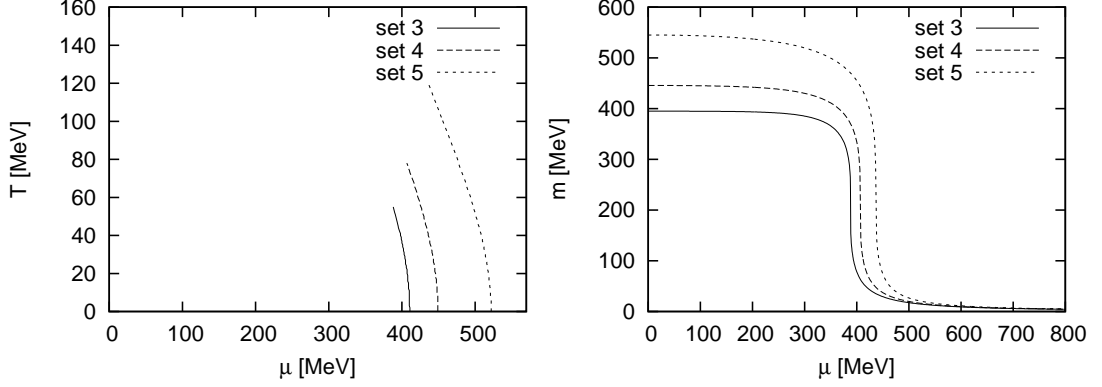


Abbildung 4.2: Phasendiagramm (links) für Parametersätze 3-5 (kein Phasenübergang bei Sätzen 1 und 2), $m - \mu$ Diagramm bei T_{cep} (rechts)

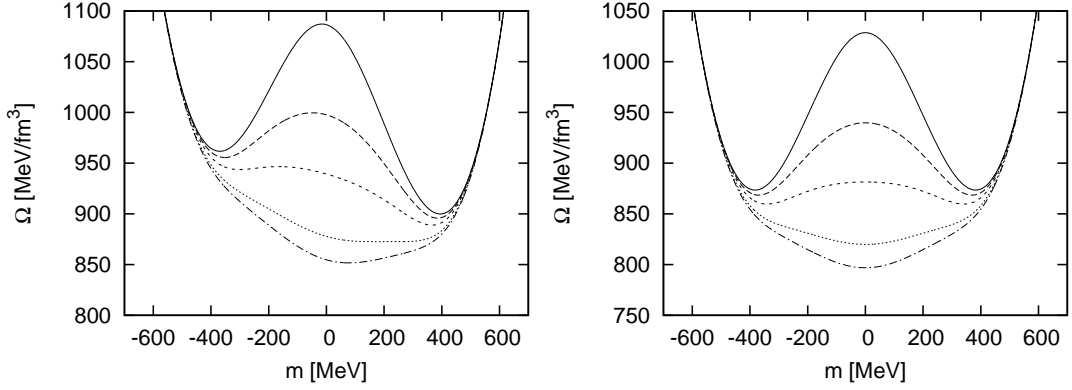


Abbildung 4.3: Links: Thermodynamisches Potential bei $T_{cep} = 55$ MeV und $\mu = (0, 300, 350, 388(= \mu_{cep}), 400)$ MeV von oben, Rechts: selbe Werte im chiralen Limes

4.2 Untersuchung des thermodynamischen Potentials

Führt man die skalare Dichte $\sigma = \langle \bar{q}q \rangle = \frac{m_0 - m}{2g}$ ein, kann man das thermodynamische Potential umschreiben

$$\Omega(T, \mu, m_0; \sigma) = \frac{1}{4g}(2g\sigma)^2 - 2N_c N_f \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} (E_{\vec{k}} - T \ln(1 - n_{\vec{k}}) - T \ln(1 - \bar{n}_{\vec{k}})) \quad (4.1)$$

Die m -Abhängigkeit wurde dabei durch eine σ -Abhängigkeit mit $m = m_0 - 2g\sigma$ ersetzt. Dieses Potential ist jedoch zunächst noch thermodynamisch inkonsistent, denn thermodynamische Konsistenz erfordert [6]:

$$\sigma = \frac{d\Omega}{dm_0} = -2N_c N_f (m_0 - 2g\sigma) I_1 + (2g\sigma + 2N_c N_f 2g(m_0 - 2g\sigma) I_1) \frac{d\sigma}{dm_0} \quad (4.2)$$

Dies bedeutet

$$\sigma + 2N_c N_f (m_0 - 2g\sigma) I_1 = 0 \iff \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma} = 0 \quad (4.3)$$

Letzteres stellt die Gap-Gleichung Gl. (3.11) dar. Die thermodynamische Konsistenz ist somit nur an den Extrempunkten des Potentials gewährleistet. Die Variable σ ist somit nicht unabhängig und kann mit Hilfe der Gap-Gleichung eliminiert werden. Dadurch erhält man das physikalische Potential $\Omega(T, \mu, m_0)$. Abhängige Variablen, wie σ , werden konventionsgemäß hinter einem Semikolon als Variable aufgelistet (vgl. Gl.(4.1)).

Es ist durchaus sinnvoll, das Potential in Abhängigkeit anderer Ordnungsdichten wie der Baryonenanzahldichte ρ oder der Entropiedichte s zu betrachten. Diese sind definiert durch

$$\begin{aligned}\rho &= -\frac{\partial\Omega(T, \mu, m_0)}{\partial\mu} = 2N_c N_f \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} (n_{\vec{k}} - \bar{n}_{\vec{k}}) \\ s &= -\frac{\partial\Omega(T, \mu, m_0)}{\partial T} \\ &= 2N_c N_f \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{T} ((E_{\vec{k}} - \mu)n_{\vec{k}} + (E_{\vec{k}} + \mu)\bar{n}_{\vec{k}}) - (\ln(1 - n_{\vec{k}}) + \ln(1 - \bar{n}_{\vec{k}})) \right)\end{aligned}\tag{4.4}$$

Um die Abhängigkeit des thermodynamischen Potentials von diese Größen zu beschreiben, wird das effektive Landau Potential konstruiert [13]. Zunächst wird die innere Energie eingeführt

$$U(s, \rho, \sigma) = \Omega(T, \bar{\mu}, \bar{m}_0) - \bar{m}_0\sigma + \bar{\mu}\rho + \bar{T}s\tag{4.5}$$

wobei die Parameter $\bar{m}_0(s, \rho, \sigma)$, $\bar{\mu}(s, \rho, \sigma)$ und $\bar{T}(s, \rho, \sigma)$ so gewählt werden, dass die Gln. (4.3) und (4.4) für diese neuen Parameter erfüllt sind. Durch Wiedereinführung von m_0 , μ und T wird das (konsistente) effektive Landau Potential definiert

$$\begin{aligned}\bar{\Omega}(T, \mu, m_0; s, \rho, \sigma) &= U(s, \rho, \sigma) - Ts - \mu\rho + m_0\sigma \\ &= \Omega(\bar{T}, \bar{\mu}, \bar{m}_0) + (\bar{T} - T)s + (\bar{\mu} - \mu)\rho - (\bar{m}_0 - m_0)\sigma\end{aligned}\tag{4.6}$$

Die Extremalbedingung für σ erfordert

$$\begin{aligned}0 &= \frac{d}{d\sigma}\bar{\Omega}(T, \mu, m_0; s, \rho, \sigma) = (m_0 - \bar{m}_0) + \left(\frac{d}{d\bar{T}}\Omega(\bar{T}, \bar{\mu}, \bar{m}_0) + s \right) \frac{d\bar{T}}{d\sigma} \\ &\quad + \left(\frac{d}{d\bar{\mu}}\Omega(\bar{T}, \bar{\mu}, \bar{m}_0) + \rho \right) \frac{d\bar{\mu}}{d\sigma} + \left(\frac{d}{d\bar{m}_0}\Omega(\bar{T}, \bar{\mu}, \bar{m}_0) - \sigma \right) \frac{d\bar{m}_0}{d\sigma}\end{aligned}\tag{4.7}$$

Die letzten drei Summanden verschwinden, da die Terme in Klammer per Definition von \bar{T} , $\bar{\mu}$ und \bar{m}_0 verschwinden. Die Extremalbedingung für σ lautet daher $\bar{m}_0 = m_0$. Analog lässt sich zeigen, dass extremales ρ $\bar{\mu} = \mu$ erfordert und entsprechend extremales s bei $\bar{T} = T$ auftritt. Somit wird bei extremalem σ , ρ und s das ursprüngliche Potential $\Omega(T, \mu, m_0)$ wiederhergestellt.

4.3 Numerische Auswertung

Die Abhängigkeit des thermodynamischen Potentials von zwei Ordnungsdichten wurde numerisch durchgeführt. Beim $\sigma - \rho - \Omega$ Diagramm wurde die s -Abhängigkeit durch

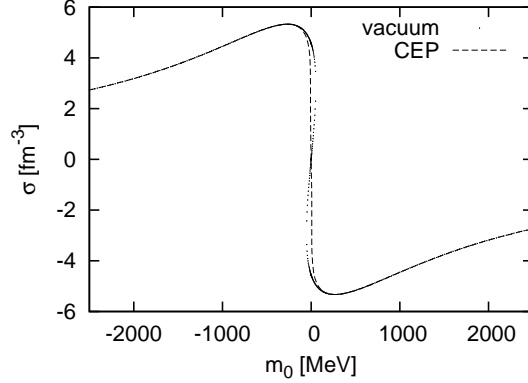


Abbildung 4.4: Lösungen der Gap-Gleichung als Funktion der Stromquarkmasse im Vakuum (Punkte) und am CEP (gestrichelt)

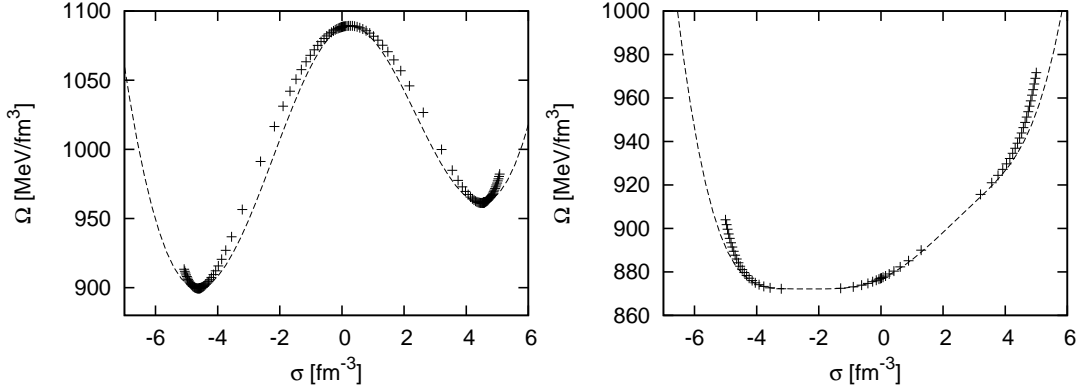


Abbildung 4.5: Vergleich des konsistenten Potentials $\bar{\Omega}$ (Kreuze) und inkonsistenten Potentials $\bar{\Omega}$ (gestrichelte Linie) thermodynamischen Potentials im Vakuum (links) und am CEP (rechts)

Einsetzen der Extremalbedingung $\bar{T} = T$ aufgehoben. Die Abhängigkeit von den anderen Ordnungsdichten kann entsprechend eliminiert werden. Um die explizite Berechnung von \bar{m}_0 und $\bar{\mu}$ mit Gln. (4.3) und (4.4) zu umgehen, werden diese stattdessen vorgegeben und damit σ und ρ berechnet.

Untersucht man jedoch die Gap-Gleichung, fällt auf, dass diese nicht für jedes σ lösbar ist. In Abb. 4.4 sind die Werte von σ , welche die Gap-Gleichung erfüllen, in Abhängigkeit der Stromquarkmasse m_0 aufgetragen. Im Vakuum und am CEP muss daher $|\sigma|$ kleiner als $\approx 6 \text{ fm}^{-3}$ sein, damit die Gap-Gleichung erfüllt werden kann.

Das konsistente thermodynamische Potential Gl. (4.6) ist daher nur für beschränktes σ definiert. Der Unterschied zwischen dem konsistenten und inkonsistenten Potential (Gl. (4.1)) ist in Abb. 4.5 dargestellt. An den Extrempunkten sind sie identisch, aber unterscheiden sich sonst, speziell für große $|\sigma|$, wo das konsistente Potential nicht einmal definiert ist.

Die Konturplots des thermodynamischen Potentials am CEP in Abhängigkeit von σ

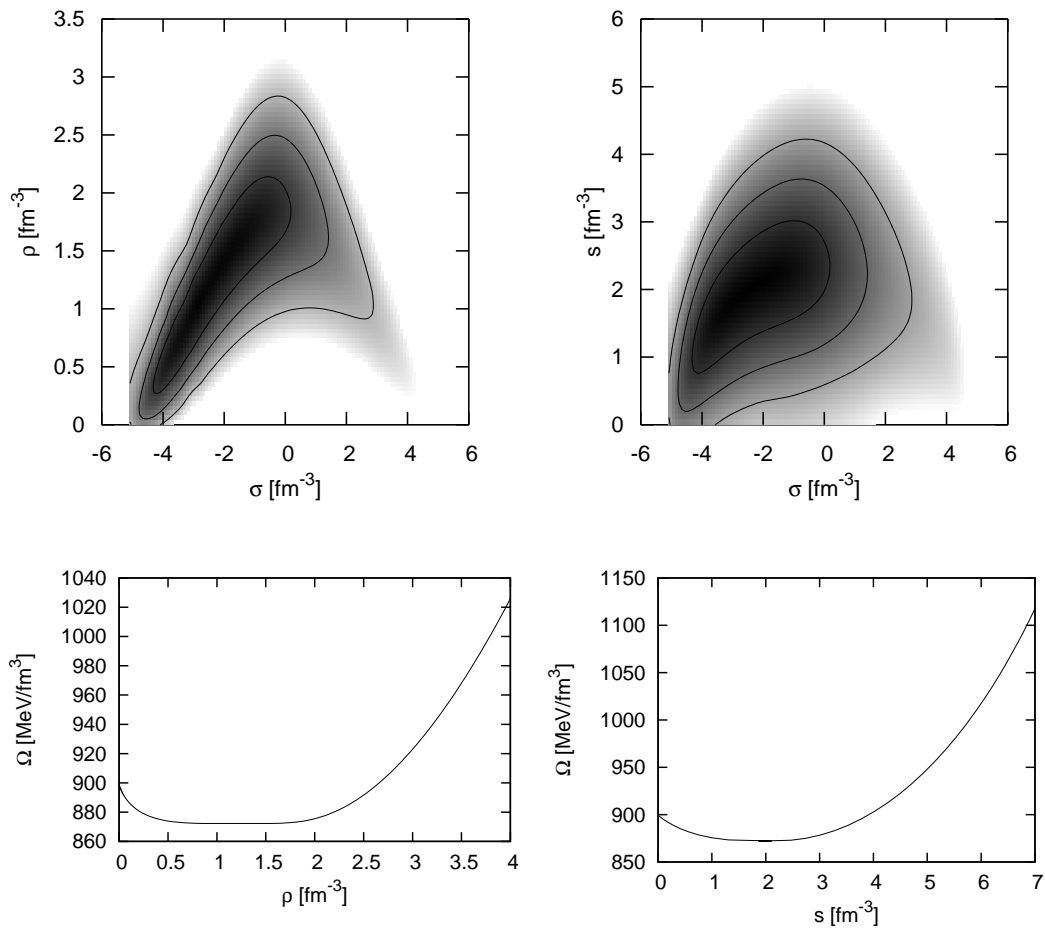


Abbildung 4.6: Thermodynamisches Potential $\bar{\Omega}$ am CEP in Abhängigkeit von ρ (links) und s (rechts). Oben sind Konturplots mit σ als zusätzliche Ordnungsdichte abgebildet. Je dunkler die Farbe, desto niedriger ist das Potential

und zusätzlich ρ oder s sind in Abb. 4.6 abgebildet. Die Ergebnisse stimmen recht gut mit denen von H.Fujii und M. Ohtani [13] überein. Bei kleiner Baryonenanzahldichte zeigt das Potential zwei Äste minimalen Potentials bei positivem und negativem σ . Aufgrund explizit gebrochener chiraler Symmetrie sind diese unsymmetrisch und der Ast bei negativen σ zeigt das tiefere Minimum. Bei höherem ρ oder s verschmelzen die beiden Äste. Das thermodynamische Potential in Abhängigkeit von nur einer Ordnungsdichte ρ und s zeigt ähnliches Verhalten wie die σ -Abhängigkeit. Ein Minimum mit verschwindender Krümmung tritt am CEP auf.

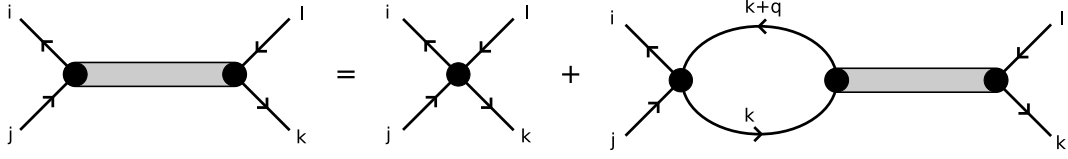


Abbildung 5.1: Bethe-Salpeter Gleichung für den Mesonpropagator

5 Mesonenmasse

5.1 Mesonenmasse im Vakuum

Im NJL-Modell werden Mesonen als Resonanz in der Quark-Antiquark Streuung beschrieben. Die dazugehörige Bethe-Salpeter Gleichung in Random-Phase-Approximation (Abb. 5.1, siehe z.B. [6], [7], [8]) liefert die Gleichung

$$T_{M,ijkl}(q) = K_{M,ijkl} + K_{M,ijab}J_{bcda}(q)T_{M,cdkl}(q) \quad (5.1)$$

$$\text{mit } J_{bcda} = \left[i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} S_{bc}(k+q)S_{da}(k) \right]$$

mit dem Viererimpuls q des Mesons, der Streumatrix T und dem Streukern

$$K_{M,ijkl} = 2g\Gamma_{M,ij}\Gamma_{M,kl} \quad (5.2)$$

Mit dem Ansatz

$$T_{M,ijkl} = \Gamma_{M,ij}D_M(q)\Gamma_{M,kl} \quad (5.3)$$

und dem Mesonpropagator $D_M(q)$, wird aus Gl. (5.1)

$$\Gamma_{M,ij}D_M(q)\Gamma_{M,kl} = 2g\Gamma_{M,ij}\Gamma_{M,kl} + 2g\Gamma_{M,ij}\Gamma_{M,ab}J_{bcda}\Gamma_{M,cd}D_M(q)\Gamma_{M,kl} \quad (5.4)$$

Somit kann der Mesonpropagator bestimmt werden

$$D_M(q) = \frac{2g}{1 - 2g\Pi_M(q)} \quad (5.5)$$

$$\text{mit } \Pi_M(q) = i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr [\Gamma_M S(k+q)\Gamma_M S(k)]$$

Die beiden Vertizes Γ_M in Gl. (5.5) müssen identisch sein, da der Mischungsterm zwischen Sigma und Pi Mesonen bei der Spurbildung verschwindet. Somit werden die Integrale getrennt für Sigma und Pi Mesonen ausgewertet

$$Tr [\Gamma_\sigma S(k+q)\Gamma_\sigma S(k)] = \frac{4N_c N_f (k^2 + kq \pm m^2)}{((k+q)^2 - m^2 + i\epsilon)(k^2 - m^2 + i\epsilon)} \quad (5.6)$$

Nach wenigen einfachen Umformungen ergeben sich die Mesonpolarisationsfunktionen Π_M

$$\Pi_\sigma = 4N_c N_f i I_1 - (q^2 - 4m^2) 2N_c N_f I(q)$$

$$\Pi_\pi = 4N_c N_f i I_1 - q^2 2N_c N_f I(q)$$

$$\text{mit } I(q) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{((k+q)^2 - m^2 + i\epsilon)(k^2 - m^2 + i\epsilon)}$$

Der Mesonpropagator $D_M(q)$ kann als effektiver Mesonenaustausch in der Quark-Antiquark Streuung interpretiert werden [6]. Die Mesonenmasse wird daher am Pol des Mesonpropagator definiert

$$D^{-1}(q)|_{q_0=q_{0,pol}} = 0 \implies m_M^2 = q_{0,pol}^2 - \vec{q}^2 \quad (5.7)$$

5.2 Mesonenmasse im Medium

Im Medium wird erneut der Matsubara Formalismus angewandt. Das Integral $I(q)$ wird daher mit den Substitutionen

$$i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} f(k_0, \vec{k}) \longrightarrow -T \sum_n \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} f(i\omega_n + \mu, \vec{k}) \quad (5.8)$$

$$i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} f(k_0 + q_0, \vec{k} + \vec{q}) \longrightarrow -T \sum_n \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} f(i\omega_n + i\omega_m + \mu, \vec{k} + \vec{q}) \quad (5.9)$$

ausgewertet, wobei $\omega_m = 2m\pi T$ eine bosonische Matsubarafrequenz darstellt.

Die Summen werden analog zum Fall der Quarkmassen in Kap. 3.2 ausgewertet, mit dem Zwischenergebnis

$$iI(i\omega_m, \vec{q}) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{k}+\vec{q}} E_{\vec{k}}} (1 - n_{\vec{k}} - \bar{n}_{\vec{k}}) \cdot \left(\frac{E_{\vec{k}+\vec{q}} + E_{\vec{k}}}{(i\omega_m)^2 - (E_{\vec{k}+\vec{q}} + E_{\vec{k}})^2} + \frac{E_{\vec{k}+\vec{q}} - E_{\vec{k}}}{(i\omega_m)^2 - (E_{\vec{k}+\vec{q}} - E_{\vec{k}})^2} \right) \quad (5.10)$$

Nutzt man aus, dass der Vakuumbeitrag invariant unter $\vec{k} \rightarrow -\vec{k} - \vec{q}$ Transformationen ist und setzt man die analytische Fortsetzung $i\omega_m \rightarrow q_0$ ein, erhält man das Ergebnis

$$iI(q) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{1}{E_{\vec{k}}} \frac{1}{q_0^2 - s_E^2} - \frac{n_{\vec{k}} + \bar{n}_{\vec{k}}}{2E_{\vec{k}+\vec{q}} E_{\vec{k}}} \left(\frac{s_E}{q_0^2 - s_E^2} + \frac{d_E}{q_0^2 - d_E^2} \right) \right\} \quad (5.11)$$

mit $s_E = E_{\vec{k}+\vec{q}} + E_{\vec{k}}$, $d_E = E_{\vec{k}+\vec{q}} - E_{\vec{k}}$

Hierbei tritt nun jedoch das Problem auf, dass der Integrand Pole besitzt, welche zu Divergenzen führen. Die Cauchyschen Hauptwerte des Integrals an diesen Polen sind jedoch konvergent. Daher betrachtet man das Integral mit der Substitution $q_0 \rightarrow q_0 + i\epsilon$ im Limes $\epsilon \rightarrow 0^+$ und wendet die Sokhotsky-Plemelj Identität

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x - a \pm i\epsilon} = Pr \left(\frac{1}{x - a} \right) \mp i\pi\delta(x - a) \quad (5.12)$$

an. $Pr()$ ist der Cauchysche Hauptwert. Somit besitzt das Integral jedoch auch einen Imaginärteil falls Pole auftreten.

In diesem Fall wird die Mesonenmasse, in Analogie zu Gl. (5.7), als Nullstelle des Realteils des inversen Mesonpropagator definiert.

$$Re(D^{-1}(q))|_{q^2=m_M^2} = 0 \quad (5.13)$$

5.3 Numerische Ergebnisse

Zur Bestimmung der Mesonenmasse muss der Realteil von Gl. (5.11) und somit Cauchysche Hauptwerte berechnet werden. Letztere werden analytisch gelöst, indem man die Pole vorher separiert und die Winkelintegration durchführt. Dabei sei $c := \cos(\angle(\vec{k}, \vec{q}))$ und $c_0(|\vec{k}|)$ eine Polstelle von $f(\vec{k})$, so dass $f(\vec{k}) = \frac{\tilde{f}(|\vec{k}|, c)}{c - c_0(|\vec{k}|)}$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} f(\vec{k}) &= \int_0^\infty \frac{d|\vec{k}||\vec{k}|^2}{(2\pi)^2} \int_{-1}^1 dc f(|\vec{k}|, c) = \int_0^\infty \frac{d|\vec{k}||\vec{k}|^2}{(2\pi)^2} \int_{-1}^1 dc \frac{\tilde{f}(|\vec{k}|, c)}{c - c_0(|\vec{k}|)} \\
&= \int_0^\infty \frac{d|\vec{k}||\vec{k}|^2}{(2\pi)^2} \int_{-1}^1 dc \left(\frac{\tilde{f}(|\vec{k}|, c) - \tilde{f}(|\vec{k}|, c_0(|\vec{k}|))}{c - c_0(|\vec{k}|)} + \frac{\tilde{f}(|\vec{k}|, c_0(|\vec{k}|))}{c - c_0(|\vec{k}|)} \right) \\
&= \int_0^\infty \frac{d|\vec{k}||\vec{k}|^2}{(2\pi)^2} \left(\int_{-1}^1 dc \frac{\tilde{f}(|\vec{k}|, c) - \tilde{f}(|\vec{k}|, c_0(|\vec{k}|))}{c - c_0(|\vec{k}|)} + \tilde{f}(|\vec{k}|, c_0(|\vec{k}|)) \ln \left| \frac{1 - c_0(|\vec{k}|)}{-1 - c_0(|\vec{k}|)} \right| \right)
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Dies wird auf alle Pole von Gl. (5.11) angewandt und anschließend, nach Pauli-Villars Regularisierung, die $|\vec{k}|$ -Integration numerisch durchgeführt.

Die Temperaturabhängigkeit der Mesonenmasse ist in Abb. 5.2 dargestellt. Im chiralen Fall (rechts) sowie im nichtchiralen Fall (links) ist die chirale Symmetrie im Vakuum durch die unterschiedlichen Massen von Pion und Sigma Meson spontan gebrochen. Bei höheren Temperaturen werden sowohl Konstituentenquarkmasse als auch der Unterschied zwischen Pion und Sigma Meson Masse sehr klein und die chirale Symmetrie ist wiederhergestellt. Bis dahin bleibt das Pion fast masselos und die Masse des Sigma Mesons ist geringfügig größer als die doppelte Konstituentenquarkmasse. Im chiralen Limes ist dies exakt erfüllt. Das Pion übernimmt daher die Rolle des masselosen Goldstone-Bosons.

Die Abhängigkeit vom chemischen Potential ist ähnlich und in Abb. 5.3 dargestellt. Als Unterschied kann man hier einen Phasenübergang durch die Unstetigkeitsstelle erkennen.

Der Einfluss des Dreierimpulses auf die Mesonenmasse ist in Abb. 5.4 dargestellt. Im Vakuum gibt es kein ausgezeichnetes Inertialsystem. Somit muss die Mesonenmasse unabhängig vom Dreierimpuls sein. Im Medium ist jedoch das Ruhesystem des Medium solch ein ausgezeichnetes System. Dadurch ist die Mesonenmasse nicht mehr invariant und sinkt mit zunehmendem Dreierimpuls.

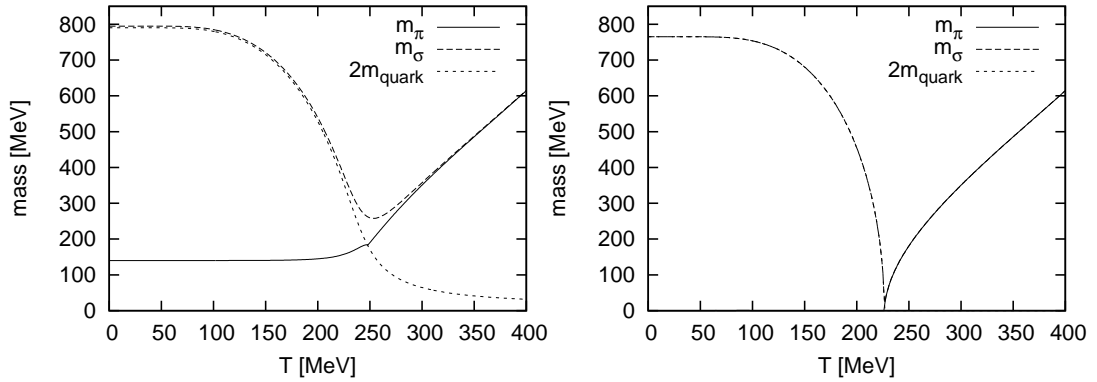


Abbildung 5.2: Links: Temperaturabhängigkeit der Masse von Pion und Sigma Meson für $\mu = 0$ und $|\vec{q}| = 100$ MeV. Die doppelte Quark Masse ist auch abgebildet. Rechts: selbes Diagramm im chiralen Limes ($m_0 = 0$)

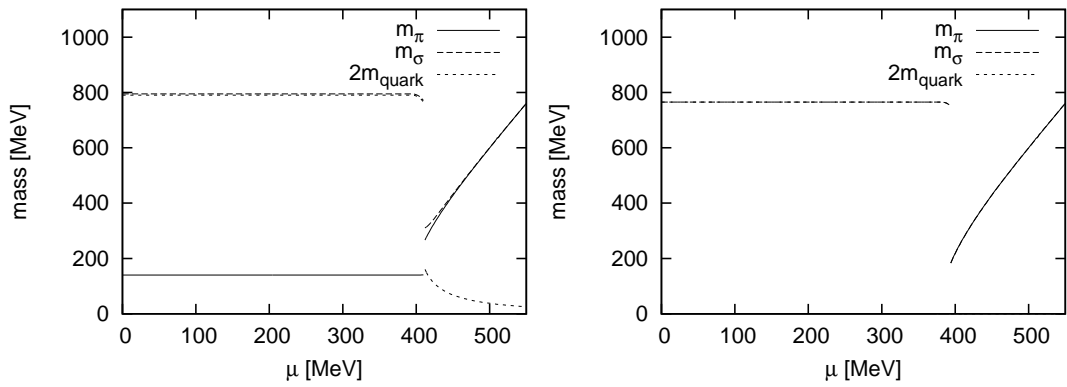


Abbildung 5.3: Links: Abhängigkeit der Masse des Pions und Sigma Mesons vom chemischen Potential für $T = 0$ und $|\vec{q}| = 100$ MeV. Rechts: selbes Diagramm im chiralen Limes

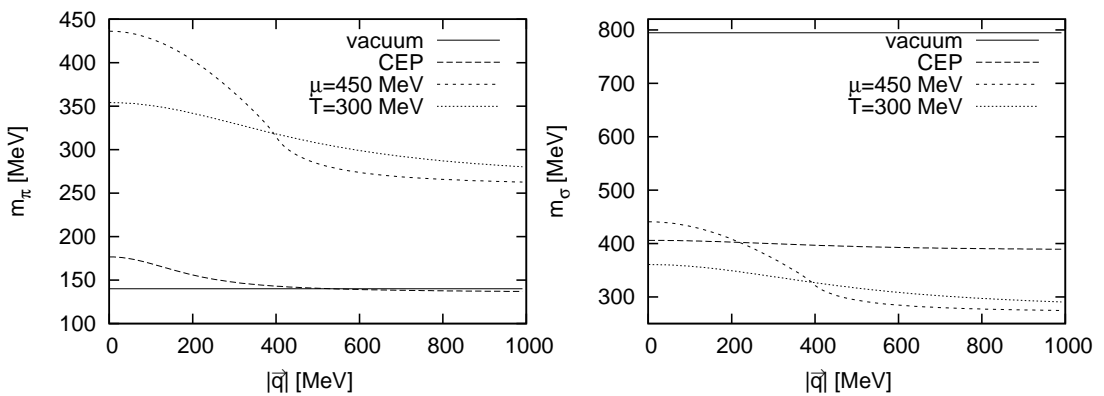


Abbildung 5.4: Abhängigkeit der Mesonenmasse vom Dreierimpuls. Falls nicht angegeben ist $T = 0$ und $\mu = 0$. Links: Pion, Rechts: Sigma Meson

6 Spektralfunktionen von Mesonen

6.1 Untersuchung des Mesonpropagators

Wie in Kap. 5.2 gezeigt, kann das Integral $I(q)$ einen Imaginärteil besitzen. Dieser kann analytisch berechnet werden. In einem ersten Schritt erhält man mit (5.11) und (5.12)

$$\begin{aligned} \text{Im } iI(q) = & -\frac{1}{8\pi} \int_m^\infty dE_{\vec{k}} \sqrt{E_{\vec{k}}^2 - m^2} \int_{-1}^1 dc \left\{ \left(\frac{1}{s_E} - \frac{n_{\vec{k}} + \bar{n}_{\vec{k}}}{2E_{\vec{k}+\vec{q}}} \right) [\delta(q_0 - s_E) - \delta(q_0 + s_E)] \right. \\ & \left. - \frac{n_{\vec{k}} + \bar{n}_{\vec{k}}}{2E_{\vec{k}+\vec{q}}} [\delta(q_0 - d_E) - \delta(q_0 + d_E)] \right\} \end{aligned} \quad (6.1)$$

Um die Winkelintegration durchzuführen, benötigt man die Bedingungen, wann die Pole auftreten. Mit $\vec{q} \neq 0$ ergeben sich die Pole zu

$$\begin{aligned} E_{\vec{k}+\vec{q}} \pm E_{\vec{k}} &= (+/- q_0) \\ \rightarrow c &= \frac{q_0^2 - \vec{q}^2 - / + 2q_0 E_{\vec{k}}}{2|\vec{k}||\vec{q}|} \wedge (+/- q_0) \mp E_{\vec{k}} \geq 0 \end{aligned} \quad (6.2)$$

wobei \pm die beiden singulären Terme $\frac{1}{q_0 - s_E}$ und $\frac{1}{q_0 - d_E}$ und $+/-$ die beiden verschiedenen Lösungen jedes der beiden Terme unterscheidet. Die Beschränkung $c \in [-1, 1]$ liefert die Bedingungen

$$\begin{aligned} E_{\vec{k}} \left\{ \begin{array}{l} \in \\ \notin \end{array} \right\} & \left[(\pm \cdot +/-) \frac{q_0}{2} - \sqrt{\Delta}, (\pm \cdot +/-) \frac{q_0}{2} + \sqrt{\Delta} \right] \text{ für } \begin{cases} q^2 - 4m^2 > 0 \\ q^2 < 0 \end{cases} \\ \text{mit } \Delta &= \frac{\vec{q}^2}{4} \left(1 - \frac{4m^2}{q_0^2 - \vec{q}^2} \right) \end{aligned} \quad (6.3)$$

Berücksichtigt man dies alles, treten die Pole nur unter folgenden Voraussetzungen auf

- $\frac{1}{q_0 - s_E}$ hat Pole, falls $\frac{q_0}{2} - \sqrt{\Delta} < E_{\vec{k}} < \frac{q_0}{2} + \sqrt{\Delta}$ und $q^2 > 4m^2$
- $\frac{1}{q_0 + s_E}$ hat Pole, falls $-\frac{q_0}{2} - \sqrt{\Delta} < E_{\vec{k}} < -\frac{q_0}{2} + \sqrt{\Delta}$ und $q^2 > 4m^2$
- $\frac{1}{q_0 - d_E}$ hat Pole, falls $E_{\vec{k}} > -\frac{q_0}{2} + \sqrt{\Delta}$ und $q^2 < 0$
- $\frac{1}{q_0 + d_E}$ hat Pole, falls $E_{\vec{k}} > \frac{q_0}{2} + \sqrt{\Delta}$ und $q^2 < 0$

Damit kann man das Integral Gl. (6.1) auswerten. Zusätzlich sei noch $q_0 > 0$.

$$\text{Im } iI(q) = \begin{cases} \frac{1}{8\pi} \frac{1}{|\vec{q}|} \left(-\sqrt{\Delta} + 2 \int_{q_0/2 - \sqrt{\Delta}}^{q_0/2 + \sqrt{\Delta}} dE_{\vec{k}} (n_{\vec{k}} + \bar{n}_{\vec{k}}) \right) & \text{für } q^2 - 4m^2 > 0 \\ \frac{1}{8\pi} \frac{2}{|\vec{q}|} \int_{-q_0/2 + \sqrt{\Delta}}^{q_0/2 + \sqrt{\Delta}} dE_{\vec{k}} (n_{\vec{k}} + \bar{n}_{\vec{k}}) & \text{für } q^2 < 0 \end{cases} \quad (6.4)$$

Zur numerischen Berechnung müssen die Imaginärteile auch Pauli-Villars regularisiert werden. Dieser Imaginärteil hat Auswirkungen auf den Mesonpropagator Gl. (5.5)

$$D_M(q) = \frac{2g}{1 - 2g\Pi_M(q)} \quad (6.5)$$

mit

$$\begin{aligned} \Pi_\sigma &= 4N_c N_f i I_1 - (q_0^2 - \vec{q}^2 - 4m^2) 2N_c N_f I(q) \\ \Pi_\pi &= 4N_c N_f i I_1 - (q_0^2 - \vec{q}^2) 2N_c N_f I(q) \end{aligned} \quad (6.6)$$

Falls $\text{Im } I(q) = 0$ ersetzt man $q_0 \rightarrow q_0 + i\epsilon$ mit kleinem ϵ und vernachlässigt quadratische Terme von ϵ . Dies ergibt den Imaginärteil

$$\begin{aligned} \text{Im } D(q) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{Im} \left(\frac{2g}{1 - 2g\text{Re } \Pi(q) + 8gq_0 N_c N_f i I(q) i\epsilon} \right) \\ &\stackrel{(5.12)}{=} -\frac{2\pi g}{8gq_0 N_c N_f i I(q)} \cdot \delta \left(\frac{1 - 2g\text{Re } \Pi(q)}{8gq_0 N_c N_f i I(q)} \right) \end{aligned} \quad (6.7)$$

Der Imaginärteil des Mesonpropagators verschwindet somit, außer für $q^2 = m_M^2$. Hier liegt ein Delta-Peak vor.

Falls $\text{Im } I(q) \neq 0$ besitzt auch $\Pi_M(q)$ einen Imaginärteil. Somit ergibt sich der Mesonpropagator

$$\begin{aligned} \text{Re } D(q) &= 2g \frac{1 - 2g\text{Re } \Pi}{(1 - 2g\text{Re } \Pi)^2 + (2g\text{Im } \Pi)^2} \\ \text{Im } D(q) &= 2g \frac{2g\text{Im } \Pi}{(1 - 2g\text{Re } \Pi)^2 + (2g\text{Im } \Pi)^2} \end{aligned} \quad (6.8)$$

Anstelle des Pols besitzt der Realteil nun einen Nulldurchgang mit danebenliegenden Maxima. Aus dem Delta-Peak des Imaginärteils wurde auch ein Peak endlicher Breite und Höhe.

6.2 Die Spektralfunktion

Die Spektralfunktion ist proportional zum Imaginärteil des Mesonpropagators. Sie wird definiert als [11]

$$\rho_{spec}(q) = \frac{2}{4g^2} \text{Im } D(q) = \frac{2\text{Im } \Pi}{(1 - 2g\text{Re } \Pi)^2 + (2g\text{Im } \Pi)^2} \quad (6.9)$$

Sie zeigt verschiedene Moden in einem speziellen Wechselwirkungskanal. Gemäß Gl. (6.4) besitzt sie einen raumartigen Beitrag falls der Dreierimpuls nicht 0 ist, welcher als Absorption oder Emission eines Mesons durch ein Quark oder Antiquark interpretiert werden kann. Dies wird auch Teilchen-Loch-Prozess genannt. Zudem gibt es einen zeitartigen Anteil für $q^2 > 4m^2$. Dies beschreibt die Bildung oder Vernichtung eines Quark-Antiquark Paares [12]. Ein dritter Beitrag gibt die Resonanz Gl. (5.13) $1 - 2g\text{Re } (\Pi(q))|_{q^2=m_M^2} = 0$. Falls $\text{Im } (\Pi(q))|_{q^2=m_M^2} = 0$ wird diese durch einen Delta-Peak Gl. (6.7) in der Spektralfunktion bei $q^2 = m_M^2$ dargestellt. Anderenfalls liegt die

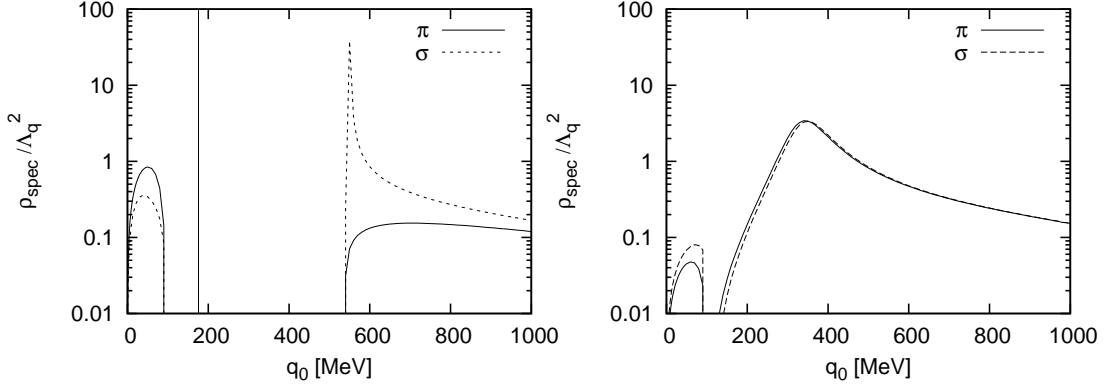


Abbildung 6.1: Spektralfunktion des Pions (durchgezogen) und Sigma Mesons (gestrichelt) bei $\mu = 0$ und $|\vec{q}| = 100$ MeV. Links: $T = 200$ MeV, Rechts: $T = 300$ MeV

Resonanz im zeitartigen Beitrag des Spektrums. Hierbei ist der Peak endlich und wird mit zunehmendem $\text{Im } iI$ flacher.

Das Spektrum des Pi und Sigma Mesons ist in Abb. 6.1 bei verschiedenen Temperaturen dargestellt. Bei $T = 200$ MeV besteht der Hauptunterschied im Peak durch die Resonanz. Während die Pionresonanz durch den Deltapeak gegeben ist, was als stabiles Meson interpretiert werden kann¹, liegt die Resonanz des Sigmamesons als schmaler endlicher Peak im zeitartigen Bereich des Spektrums vor. Das Sigmameson kann daher in ein Quark-Antiquark-Paar zerfallen. Mit steigender Temperatur nähern sich die beiden Spektren an und sind bei $T = 300$ MeV bereits fast identisch, was auf die Wiederherstellung der chiralen Symmetrie hindeutet. Da die beiden Peaks jedoch bereits recht breit und relativ flach sind, sind die Mesonenmoden kaum ausgeprägt.

6.3 Die Spektralfunktion des Sigma Mesons am CEP

Der kritische Endpunkt stellt den Endpunkt des Phasenübergangs erster Ordnung dar. Hier selbst liegt ein Übergang zweiter Ordnung vor, wodurch die Krümmung des thermodynamischen Potentials verschwindet. Auch bei einer positiven Stromquarkmasse impliziert dies eine masselose Anregung im Sigmaspektrum [11]. Das Sigma Meson selbst besitzt hier jedoch eine Masse in der Größenordnung der doppelten Konstituentenquarkmasse $2m$. Das NJL Modell bietet aber mit dem Teilchen-Loch-Prozess eine Mode an, die am CEP tatsächlich eine masselose Resonanz liefert. Das raumartige Spektrum des Sigma Mesons, worin diese Mode zu erkennen ist, kann man in Abb. 6.2 sehen. In allen Diagrammen ist $|\vec{q}| = 100$ MeV und die Temperatur sowie das chemische Potential werden um die kritischen Werte variiert. Mit zunehmendem Abstand von den kritischen Werten wird das Maximum flacher und verschiebt sich zu höheren Werten von q_0 . Am kritischen Punkt dagegen ist das Maximum tatsächlich eine scharfe hohe Resonanz nahe bei $q_0 = 0$.

¹Das Pion ist zwar ein instabiles Teilchen, es zerfällt bei dieser Temperatur und diesem chemischen Potential jedoch über die schwache Wechselwirkung. Dies ist deutlich schwächer als der hadronische Zerfall und daher nicht berücksichtigt.

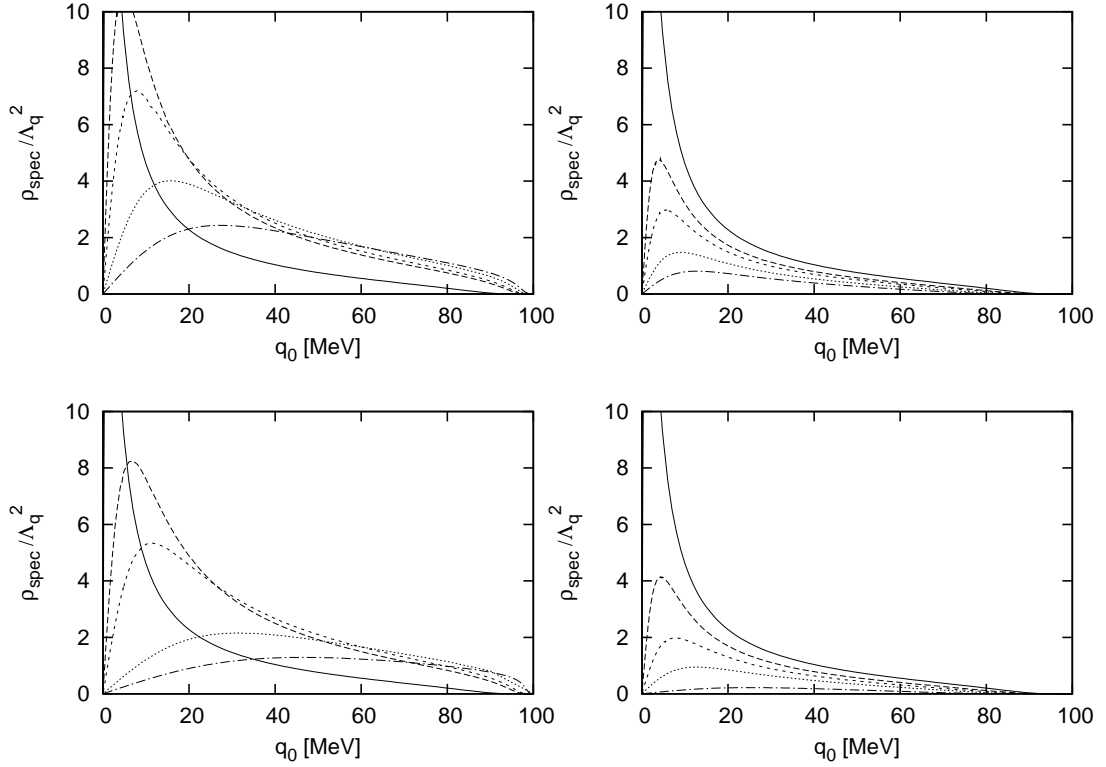


Abbildung 6.2: Raumartiger Peak der Spektralfunktion des σ Mesons mit $|\vec{q}| = 100$ MeV. Oben: $\mu = \mu_{cep}$, das Spektrum bei $T_{cep} = 55$ MeV ist in beiden Diagrammen (durchgezogene Linie). Gestrichelte Linien: Links: Temperaturen größer als T_{cep} : $T = (56, 57, 60, 65)$ MeV von oben, Rechts: Temperaturen kleiner als T_{cep} : $T = (54, 53, 50, 45)$ MeV von oben. Unten: $T = T_{cep}$, das Spektrum bei $\mu_{cep} = 388$ MeV ist in beiden Diagrammen (durchgezogene Linie). Gestrichelte Linien: Links: μ größer als μ_{cep} : $\mu = (389, 390, 395, 400)$ MeV von oben, Rechts: μ kleiner als μ_{cep} : $\mu = (387, 385, 380, 350)$ MeV von oben

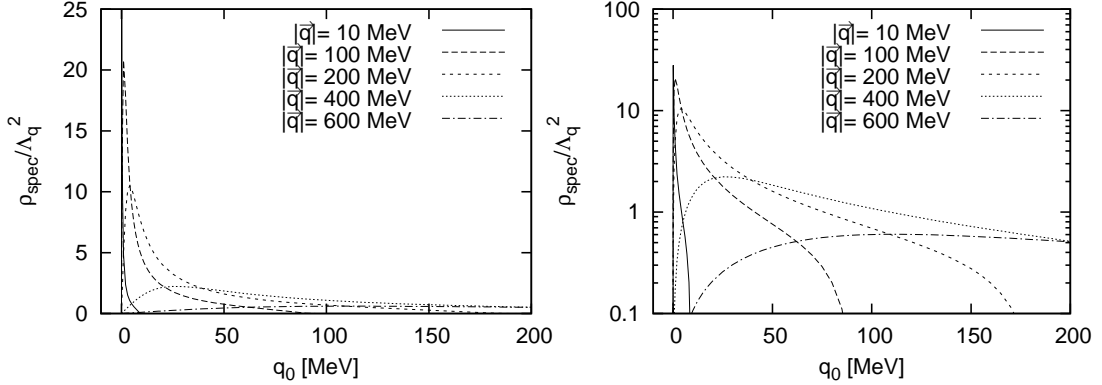


Abbildung 6.3: Raumartiger Beitrag der Sigma Meson Spektralfunktion am CEP für verschiedene $|\vec{q}|$ in linearer (links) und logarithmischer (rechts) Darstellung

Neben Temperatur und chemischem Potential hat auch der Dreierimpuls Einfluss auf das Spektrum. So ist der Peak im raumartigen Bereich auch davon abhängig. Dies ist in Abb. 6.3 dargestellt. Das Maximum divergiert am Ursprung nur für $|\vec{q}| \rightarrow 0$. Mit größeren Dreierimpulsen wird der Peak flacher und zu größeren q_0 verschoben. Die masselose Anregung im Sigmaspektrum am CEP existiert daher nur im Limes $|\vec{q}| \rightarrow 0$. Die 3-dimensionale Darstellung (Abb. 6.4, oben) zeigt diesen Sachverhalt. Während die Form des zeitartigen Meson Peaks kaum vom Dreierimpuls abhängt, wird der raumartige Peak flacher und breiter mit wachsendem $|\vec{q}|$.

Da der raumartige Beitrag auf $q_0 < |\vec{q}|$ beschränkt ist, wandert der dort liegende Peak zwangsläufig Richtung $q_0 = 0$ mit abnehmendem $|\vec{q}|$. Dies ist daher auch unabhängig von Temperatur und chemischem Potential. Die 3-dimensionalen Plots bei nichtkritischen Werten sind in Abb. 6.4 unten dargestellt. Im Gegensatz zu kritischen Werten divergiert der Peak hier jedoch nicht im Ursprung und verschiebt sich mit wachsendem $|\vec{q}|$ deutlich schneller zu höheren Energien. Dies wird in Abb. 6.5 genauer betrachtet. Am CEP bleibt der Peak recht lange bei kleinen Energien, während weiter entfernt vom CEP die Peakposition anfangs fast linear mit $|\vec{q}|$ wächst. Die Peakhöhe ist bei niedrigen $|\vec{q}|$ am CEP deutlich höher als bei anderen Temperaturen und Potentialen.

6.4 Spektralfunktion der Quarkanzahl-Suszeptibilität

Als weitere Spektralfunktion kann man auch die Spektralfunktion der Quarkanzahl-Suszeptibilität betrachten. Dazu muss zunächst die Responsefunktion $\chi_{\mu\mu}(q)$ berechnet werden. Die Responsefunktionen sind definiert als [11]

$$\chi_{ab}(q) = \Pi_{ab}(q) + \Pi_{am_0}(q) \frac{1}{1 - 2g\Pi_{m_0m_0}(q)} 2g\Pi_{m_0b}(q) \quad (a, b = \mu, m_0) \quad (6.10)$$

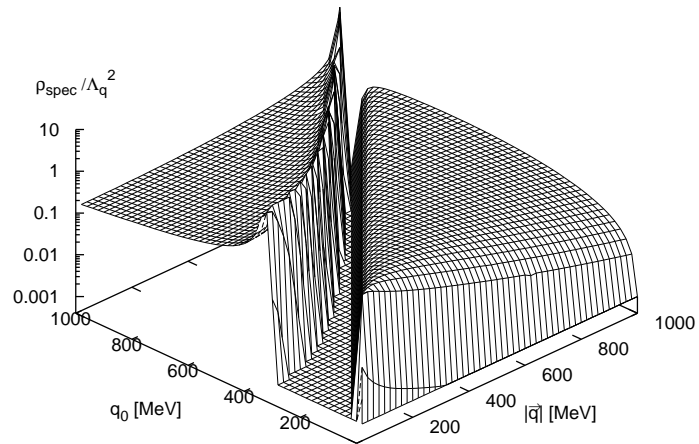
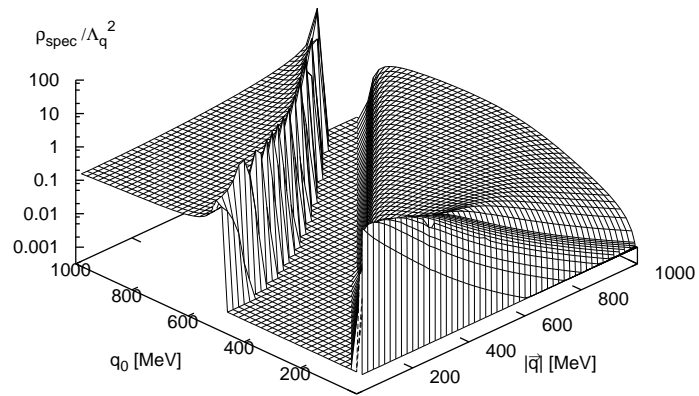


Abbildung 6.4: 3-dimensionale Plots der Sigma Spektralfunktion in der $q_0 - |\vec{q}|$ -Ebene am CEP (oben) und bei ($T = 200$ MeV, $\mu = 188$ MeV, unten)

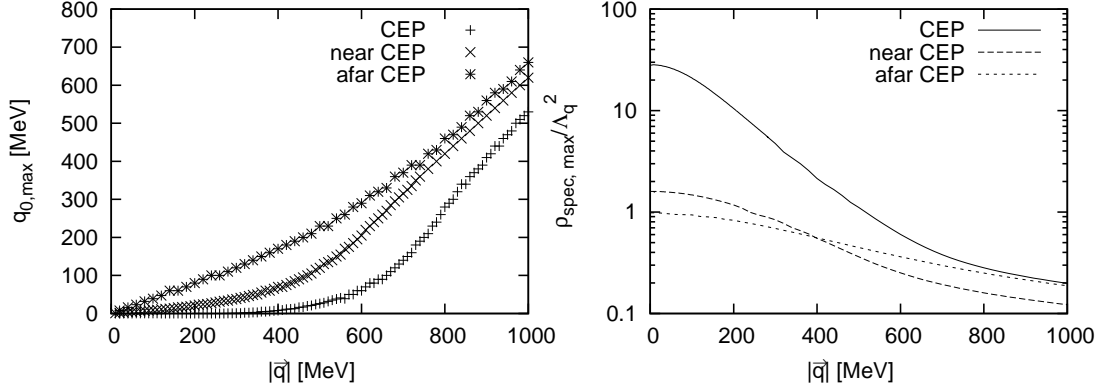


Abbildung 6.5: Peakpositionen q_0 (links) und Peakhöhen (rechts) im raumartigen Spektrum in Abhängigkeit von $|\vec{q}|$ am CEP, nahe des CEP ($T = 50$ MeV, $\mu = 388$ MeV) und bei ($T = 200$ MeV, $\mu = 188$ MeV)

Die benötigten Polarisationsfunktionen sind im skalaren (Sigma) Kanal

$$\begin{aligned}
\Pi_{m_0 m_0}(q) &= i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} [S(k+q)S(k)] \stackrel{(5.5)}{=} \Pi_\sigma(q) \\
\Pi_{\mu\mu}(q) &= i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} [S(k+q)\gamma_0 S(k)\gamma_0] \\
\Pi_{m_0\mu}(q) &= \Pi_{\mu m_0}(q) = i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} [S(k+q)S(k)\gamma_0]
\end{aligned} \tag{6.11}$$

Π_σ wurde bereits im vorherigen Kapitel berechnet, für die beiden anderen Polarisationsfunktionen erhält man nach Berechnen der Spuren und Matsubarasummen folgende Terme

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mu\mu}(q) &= 4N_c N_f \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{4E_{\vec{k}+\vec{q}} E_{\vec{k}}} (1 - n_{\vec{k}} - \bar{n}_{\vec{k}}) \\
&\cdot \left\{ \left(\frac{1}{q_0 - s_E} - \frac{1}{q_0 + d_E} \right) (2E_{\vec{k}}^2 - q_0 E_{\vec{k}} + \vec{k}\vec{q}) \right. \\
&\left. + \left(\frac{1}{q_0 - d_E} - \frac{1}{q_0 + s_E} \right) (2E_{\vec{k}}^2 + q_0 E_{\vec{k}} + \vec{k}\vec{q}) \right\}
\end{aligned} \tag{6.12}$$

$$\begin{aligned}
\Pi_{m_0\mu}(q) &= 4N_c N_f m i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{2k_0 + q_0}{((k+q)^2 - m^2)(k^2 - m^2)} \\
&\stackrel{(*)}{=} 4N_c N_f m \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{4E_{\vec{k}+\vec{q}} E_{\vec{k}}} (n_{\vec{k}} - \bar{n}_{\vec{k}}) \\
&\cdot \left\{ \left(\frac{1}{q_0 - s_E} - \frac{1}{q_0 + d_E} \right) (-2E_{\vec{k}} + q_0) \right. \\
&\left. + \left(\frac{1}{q_0 - d_E} - \frac{1}{q_0 + s_E} \right) (-2E_{\vec{k}} - q_0) \right\}
\end{aligned} \tag{6.13}$$

Im Schritt (*) wurde berücksichtigt, dass das Integral über den Viererimpuls antisymmetrisch unter der Transformation $k \rightarrow -k - q$ ist und somit der Vakuumbeitrag verschwindet.

Die Spektralfunktion der Quarkanzahl-Suszeptibilität wird nun definiert als²

$$\rho_{\mu\mu}(q) = 2\text{Im } \chi_{\mu\mu}(q) = 2\text{Im } \Pi_{\mu\mu} + 4g \frac{1}{|1 - 2g\Pi_{m_0 m_0}|^2} \cdot (2\text{Re } \Pi_{m_0\mu} \cdot \text{Im } \Pi_{m_0\mu}(1 - 2g\text{Re } \Pi_{m_0 m_0}) + ((\text{Re } \Pi_{m_0\mu})^2 - (\text{Im } \Pi_{m_0\mu})^2)2g\text{Im } \Pi_{m_0 m_0}) \quad (6.14)$$

Die Imaginärteile der Polarisationsfunktionen werden dabei analog zu Kap. 6.1 berechnet.

$$\text{Im } \Pi_{\mu\mu} = -\frac{N_c N_f}{4\pi} \frac{1}{|\vec{q}|} \begin{cases} \int_{q_0/2-\sqrt{\Delta}}^{q_0/2+\sqrt{\Delta}} dE_{\vec{k}} (1 - n_{\vec{k}} - \bar{n}_{\vec{k}}) (\frac{1}{2}q^2 - 2q_0 E_{\vec{k}} + 2E_{\vec{k}}^2) & \text{für } q^2 - 4m^2 > 0 \\ \int_{-q_0/2+\sqrt{\Delta}}^{\infty} dE_{\vec{k}} (1 - n_{\vec{k}} - \bar{n}_{\vec{k}}) (\frac{1}{2}q^2 + 2q_0 E_{\vec{k}} + 2E_{\vec{k}}^2) \\ - \int_{q_0/2+\sqrt{\Delta}}^{\infty} dE_{\vec{k}} (1 - n_{\vec{k}} - \bar{n}_{\vec{k}}) (\frac{1}{2}q^2 - 2q_0 E_{\vec{k}} + 2E_{\vec{k}}^2) & \text{für } q^2 < 0 \end{cases} \quad (6.15)$$

$$\text{Im } \Pi_{m_0\mu} = -\frac{N_c N_f}{4\pi} \frac{m}{|\vec{q}|} \begin{cases} \int_{q_0/2-\sqrt{\Delta}}^{q_0/2+\sqrt{\Delta}} dE_{\vec{k}} (n_{\vec{k}} - \bar{n}_{\vec{k}}) (q_0 - 2E_{\vec{k}}) & \text{für } q^2 - 4m^2 > 0 \\ \int_{-q_0/2+\sqrt{\Delta}}^{\infty} dE_{\vec{k}} (n_{\vec{k}} - \bar{n}_{\vec{k}}) (-q_0 - 2E_{\vec{k}}) \\ - \int_{q_0/2+\sqrt{\Delta}}^{\infty} dE_{\vec{k}} (n_{\vec{k}} - \bar{n}_{\vec{k}}) (q_0 - 2E_{\vec{k}}) & \text{für } q^2 < 0 \end{cases} \quad (6.16)$$

Die Divergenzen durch die Integrale werden wieder durch Pauli-Villars Regularisierung behoben. Der Faktor m vor den Integralen in $\text{Im } \Pi_{m_0\mu}$ wird jedoch nicht in die Regularisierung miteinbezogen. Zur praktischen Berechnung kann man anstelle von „ ∞ “ jede beliebige reelle Zahl als obere Integrationsgrenze einsetzen, da das (unbestimmte) Integral selbst von der Masse m unabhängig ist und somit der Beitrag durch die ebenfalls von m unabhängige obere Integrationsgrenze bei Pauli-Villars Regularisierung verschwindet.

Die statischen Suszeptibilitäten

$$\chi_{ab} = -\frac{\partial^2 \Omega}{\partial a \partial b}, \quad (a, b = T, \mu, m_0) \quad (6.17)$$

²Nach kurzer Rechnung kann man feststellen, dass die analoge Definition $\rho_{spec}(q) = 2\text{Im } \chi_{m_0 m_0}(q)$ äquivalent zur Definition Gl. (6.9) im Falle des Sigma Kanals ist

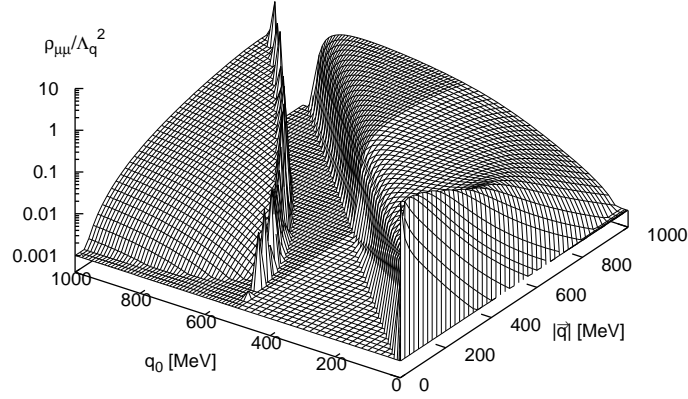


Abbildung 6.6: 3-dimensionaler Plot der Spektralfunktion der Quarkanzahl-Suszeptibilität in der $q_0 - |\vec{q}|$ -Ebene am CEP

welche am CEP aufgrund des dort vorliegenden Phasenübergangs zweiter Ordnung divergieren [11], stellen gerade den q -Grenzwert der Responsefunktionen dar [12].

$$\chi_{ab} = \lim_{|\vec{q}| \rightarrow 0} \chi_{ab}(q_0 = 0, |\vec{q}|) \quad (6.18)$$

Daher ist es naheliegend, dass am kritischen Punkt auch eine Divergenz der Spektralfunktion der Quarkanzahl-Suszeptibilität bei $q_0 = 0, |\vec{q}| = 0$ auftritt. Die 3-dimensionale Darstellung in Abb. 6.6 verdeutlicht dies. Die Divergenz im Ursprung ist erkennbar und besitzt die gleiche Form wie die der Sigma Spektralfunktion.

7 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde zunächst die effektive Quarkmasse im NJL Modell in Hartree Näherung als Lösung der Gap-Gleichung numerisch berechnet. Der komplexe Vakuumzustand mit spontan und explizit gebrochener chiralen Symmetrie sowie deren Wiederherstellung im Medium konnten an den Ergebnissen beobachtet werden.

Da die Gap-Gleichung bei niedrigeren Temperaturen und chemischen Potentialen mehrere Lösungen zuließ, wurde die stabile Lösung mit Hilfe des thermodynamischen Potentials bestimmt. Mit dessen Hilfe konnte ein Phasendiagramm berechnet werden, das zudem einen kritischen Endpunkt (CEP) aufzeigte. Weitere Untersuchung des Potentials zeigte, dass dieses nur für einen beschränkten Bereich der Variablen σ , ρ und s thermodynamisch konsistent dargestellt werden kann. Am CEP verschwand die Krümmung des Potentials in Abhängigkeit von allen 3 Variablen.

Die Massen von Pion und Sigma Meson wurden anschließend als Resonanz in der Quark-Antiquark Streuung in den jeweiligen Kanälen berechnet. Die beiden Massen waren als weitere Folge der gebrochenen chiralen Symmetrie verschieden und durch die niedrige Masse konnte das Pion als Goldstone-Boson der Symmetriebrechung identifiziert werden. Es konnte zudem gezeigt werden, dass die Massen zwar im Medium, jedoch nicht im Vakuum vom Dreierimpuls abhängen.

Die Spektralfunktionen in den Wechselwirkungskanälen wurden zur weiteren Analyse betrachtet. Neben der Mesonresonanz konnten weitere Moden wie Teilchen-Loch-Prozesse im raumartigen Bereich sowie Quark-Antiquark Paarerzeugung und -vernichtung im zeitartigen Bereich identifiziert werden. Die aufgrund des am CEP flachen thermodynamischen Potentials erwartete masselose Resonanz im Sigmaspektrum konnte numerisch gezeigt werden. Sie tritt jedoch nur im Limes $|\vec{q}| \rightarrow 0$ auf. Mit zunehmendem Dreierimpuls verschiebt sich diese Resonanz zu höheren Energien und wird flacher. Entfernt man sich vom CEP ist zwar auch noch ein Peak bei $q_0 = 0, |\vec{q}| = 0$ zu identifizieren, dieser ist jedoch deutlich flacher und verschiebt sich mit zunehmendem $|\vec{q}|$ schneller zu höheren Energien. Die Spektralfunktion der Quarkanzahl-Suszeptibilität zeigte im raumartigen Bereich identisches Verhalten.

Für die weitere Forschung wäre es nun interessant, den Einfluss weiterer Wechselwirkungskanäle, wie axiale und Vektorwechselwirkungen, zu betrachten. Speziell der Wechselwirkungskanal $(\bar{q}\gamma_\mu q)(\bar{q}\gamma^\mu q)$, welcher das Omega Meson generiert, spielt eine große Rolle, da eine Mischung zwischen der Omega und der Sigma Polarisationsfunktion auftreten kann. Im Vakuum verschwindet der Mischungsbeitrag zwar, im Medium und speziell am CEP kann dieser jedoch das Sigmaspektrum beeinflussen.

Literatur

- [1] D. J. Gross, F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **30**, 1343 (1973)
- [2] H. D. Politzer, Phys. Rev. Lett. **30**, 1346 (1973)
- [3] U. Vogl and W. Weise, Progr. Part. Nucl. Phys. **27**, 195 (1991)
- [4] Y. Nambu, G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. **124**, 246 (1961)
- [5] G. Ripka, *Quarks bound by chiral fields*, Oxford University Press, Oxford 1997
- [6] M. Buballa, Phys. Rep. **407**, 205 (2005)
- [7] M. Oertel, *Investigation of meson loop effects in the Nambu-Jona-Lasinio model*, Dissertation, TU Darmstadt 2000
- [8] S. P. Klevansky, Rev. Mod. Phys. **64**, 649 (1992)
- [9] J. I. Kapusta, *Finite-Temperature Field Theory*, Cambridge University Press 1989
- [10] D. Nickel, *Chirale Extrapolation mit dem $1/N_C$ korrigierten NJL-Modell*, Diplomarbeit, TU Darmstadt 2003
- [11] H. Fujii, Phys. Rev. D **67**, 094018 (2003)
- [12] H. Fujii and M. Ohtani, arXiv:hep-ph/0403039
- [13] H. Fujii and M. Ohtani, Phys. Rev. D **70** 014016 (2004)

Danksagung

Mein erster Dank gilt Herrn Prof. Dr. Jochen Wambach, der mir die Möglichkeit gab, diese interessante Arbeit in seiner Arbeitsgruppe zu schreiben.

Besonders möchte ich mich bei Herrn PD Dr. Michael Buballa für die Betreuung der Arbeit bedanken. Er war jederzeit bereit, die komplizierten Sachverhalte zu erklären und auftretende Fragen zu beantworten.

Weiterhin möchte ich mich bei Klaus Heckmann für die viele nützliche Tipps und besonders für die Hilfestellungen beim Einstieg in die Arbeit bedanken.

Bedanken möchte ich mich auch bei meinem Bürokollegen David Scheffler für die vielen Hinweise zum Programmieren und, wie auch der gesamten Theorie-Abteilung des IKP, für die angenehme Atmosphäre und Hilfsbereitschaft.

Zuletzt möchte ich mich noch bei meinen Eltern für ihre Unterstützung während meines Studiums und ihr anhaltendes Interesse bedanken.