



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Institut für Kernphysik
Schlossgartenstraße 9
64289 Darmstadt

Bachelor-Thesis

Quarksterne bei endlicher Temperatur und Gravitationswellenemission von kompakten Objekten

Fabia Schindler

Betreuung:

Professor Dr. Jochen Wambach

PD Dr. Michael Buballa

September 2010

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Grundlagen	4
2.1	Kernmaterie unter extremen Bedingungen	4
2.2	Kompakte Objekte	6
2.3	Die allgemeine Relativitätstheorie	7
2.3.1	Die Einsteinschen Feldgleichungen	7
2.3.2	Kugelsymmetrische Lösung der Feldgleichungen	10
3	Masse-Radius-Beziehungen	12
3.1	Lösen der Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Gleichungen	12
3.2	Zustandsgleichungen	13
3.2.1	Das freie Neutronengas	13
3.2.2	Quarkmaterie bei $T = 0$	15
3.2.3	Quarkmaterie bei $T \neq 0$	17
3.2.4	Übersicht der verwendeten Zustandsgleichungen	18
3.3	Ergebnisse	20
4	Gravitationswellenemission von Neutronensternen	22
4.1	Schwingungszustände von Sternen	22
4.2	Schrödingergleichung für axiale w-Moden	24
4.3	Formalismus	26
4.4	Ergebnisse	27
5	Zusammenfassung und Ausblick	31
A	Einheiten und Konstanten	32
B	Rekursionsbedingung der Kettenbruch-Methode	32
C	Kettenbruchmethode für schwarze Löcher	33

1 Einleitung

Die starke Wechselwirkung ist Ursache eines Effekts der als Confinement bezeichnet wird und zur Folge hat, dass Quarks unter normalen Umständen nur gebunden, in farbneutralen Objekten, auftreten. Unter extremen Bedingungen, das heißt hohen Temperaturen und/oder Dichten, wird im Rahmen der Quantenchromodynamik (QCD) ein Materiezustand vorausgesagt, in dem das Confinement aufgehoben ist und sich Quarks und Gluonen asymptotisch frei verhalten. Die Erforschung des sogenannten Quark-Gluon-Plasmas ist in der Physik von zentralem Interesse, da ein besseres Verständnis der Eigenschaften von Quarks und Gluonen sowie der starken Wechselwirkung als eine der fundamentalen Kräfte grundlegend für die Forschung im Bereich der Teilchenphysik sowie der Physik dichter Materie ist.

Das Erzeugen eines Quark-Gluon-Plasmas im Labor ist auf Grund der dazu erforderlichen extremen Bedingungen höchst anspruchsvoll. In Teilchenbeschleunigern werden schwere Ionen mit ultrarelativistischen Geschwindigkeiten zur Kollision gebracht, um das Quark-Gluon-Plasma in einer sehr geringen Menge zu erzeugen. Auf Grund der Kurzlebigkeit des Materiezustands ist ein direkter Nachweis nicht möglich. Beim Abkühlen der Materie entstehen vor allem Hadronen, deren Spektroskopie es ermöglicht, Rückschlüsse über die Eigenschaften der für kurze Zeit entstandene Form der Materie zu ziehen. Die größten Erfolge in diesem Forschungsbereich sind bislang am RHIC-Collider in Brookhaven erzielt worden. Weitere wichtige Fortschritte sind durch das Projekt FAIR in Darmstadt zu erwarten.

Das natürliche Auftreten einer Phase aus quasi-freien Quarks wird im Inneren von Neutronensternen vermutet. Diese entstehen unter gegebenen Umständen bei Supernovaexplosionen massereicher Sterne und weisen derartig hohe Dichten auf, dass sie zu den kompakten Objekten des Universums zählen. Das Auftreten einer Quarkphase neben der hadronischen Materie im Neutronenstern würde sich auf diverse Eigenschaften wie die Masse, den Radius und das Rotationsverhalten des Objektes auswirken. Da Neutronensterne wahrscheinlich die einzigen Objekte sind, in denen die notwendigen Bedingungen für die Existenz hadronischer Materie in unterschiedlichen Phasen realisiert sind, wird deren Erforschung auch weiterhin dazu beitragen, die offenen Fragen im Bereich der Physik dichter Materie zu klären.

In dieser Arbeit werden die Masse-Radius-Beziehungen von Neutronensternen, bestehend aus Quarkmaterie, untersucht. Der Schwerpunkt wird dabei auf den Einfluss der Temperatur im Stern gelegt. Die Zustandsgleichungen, die den Berechnungen zugrunde liegen, werden im Rahmen des Bag-Modells konstruiert. In Kapitel 2 wird die Physik kompakter Objekte und Materie unter extremen Bedingungen behandelt. Des Weiteren werden die Grundlagen der allgemeinrelativistischen Beschreibung kompakter Objekte dargestellt. In Kapitel 3 werden die verwendeten Zustandsgleichungen und der numerische Formalismus eingeführt und die Ergebnisse dieser Arbeit dargelegt. Kapitel 4 soll als Einblick in die Thematik der Gravitationswellenemission von kompakten Objekten dienen, da diese in Zukunft mit Hilfe von Laserinterferometern wie z.B. LIGO, Virgo

oder GEO600 Aufschluss über die Materie im Inneren von kompakten Objekten geben soll.

2 Grundlagen

Dieses Kapitel soll dem grundlegenden Verständnis der vorliegenden Arbeit dienen und einen Bezug zu dem Forschungsgebiet der Materie unter extremen Bedingungen, speziell im Zusammenhang mit kompakten Objekten, herstellen.

Hierzu wird in Kapitel 2.1 der Übergang von hadronischer Materie zu einer Quarkphase bei hohen Dichten und/oder Temperaturen behandelt. In Kapitel 2.2 werden wichtige Eigenschaften kompakter Objekte dargestellt, wobei der Schwerpunkt auf der inneren Struktur von Neutronensternen liegt. Kapitel 2.3 stellt die Grundlagen der mathematischen Beschreibung im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie zusammen.

2.1 Kernmaterie unter extremen Bedingungen

Zusammen mit den Leptonen bilden Quarks die Elementarteilchen des Standardmodells der Teilchenphysik. Im Folgenden sollen die Eigenschaften von Kernmaterie, also gebundenen Nukleonen, behandelt werden, die ihrerseits aus Quarks zusammengesetzt sind. Diese tragen den Spin $\frac{1}{2}$ und sind somit Fermionen. Die Baryonenzahl eines Quarks beträgt $\frac{1}{3}$. Man unterscheidet zwischen verschiedenen Arten von Quarks, die als Flavours bezeichnet werden und sich in der Masse, der elektrischen Ladung sowie den Quantenzahlen Isospin, Strangeness, Charm, Bottomness und Topness unterscheiden. Für diese Arbeit werden Massen sowie Ladungen unterschiedlicher Flavours benötigt. Diese sind in Tabelle 1 zusammengestellt. Die Werte wurden [1] entnommen. Für eine ausführliche Darstellung der weiteren Eigenschaften sei auf [2] verwiesen.

Quarks tragen eine sogenannte Farbladung, welche die Werte rot, grün und blau annehmen kann. Analog zur elektrischen Ladung und der elektromagnetischen Wechselwirkung, ist die Farbladung für die starke Wechselwirkung zwischen Teilchen verantwortlich. Zu jedem Quark existiert ein Antiteilchen, das als Antiquark bezeichnet und mit einem Balken über dem entsprechenden Symbol gekennzeichnet wird (\bar{u}, \bar{d}, \dots). Wie alle Antiteilchen tragen die Antiquarks den gleichen Spin sowie die gleiche Masse des zugehörigen Teilchens. Außer dem Spin weisen alle Quantenzahlen das entgegengesetzte Vorzeichen auf. Die Farbe der Antiquarks ist die entgegengesetzte des zugehörigen Quarks und wird als Antifarbe (antirrot, antigrün bzw. antiblau) bezeichnet.

Wie bereits erwähnt wurde, unterliegen Quarks der starken Wechselwirkung. Im Rahmen der QCD wird die Wechselwirkung zwischen Teilchen mit Farbladung durch den Austausch von Eichbosonen beschrieben. Die Austauschteilchen der QCD sind die sogenannten Gluonen. Sie tragen ebenfalls eine Farbe und wechselwirken somit sowohl untereinander als auch mit Quarks. Eine wichtige Eigenschaft der QCD ist die asymptotische Freiheit. Diese beschreibt die Abnahme der Stärke der starken Wechselwirkung bei kleinen Abständen. Als Konsequenz

<i>Name</i>	<i>Symbol</i>	<i>Masse in MeV</i>	<i>Ladung/e</i>
Up	u	5	2/3
Down	d	7	-1/3
Strange	s	150	-1/3
Charm	c	1500	2/3
Bottom	b	5000	-1/3
Top	t	>100000	2/3

Tabelle 1: Masse und Ladung der unterschiedlichen Quark-Flavours.

hieraus verhalten sich Quarks bei großer Dichte annähernd wie freie Teilchen. Eine weitere Eigenschaft der QCD ist das bereits erwähnte Confinement, das auch als Farbeinschluss bezeichnet wird. Es besagt, dass Farbladungen niemals isoliert auftreten. Hieraus kann der Zusammenschluss zu farbneutralen Teilchen gefolgert werden. Farbneutralität lässt sich entweder durch den Zusammenschluss eines Quarks und eines Antiquarks, welche Farbe und zugehörige Antifarbe tragen, oder dreier Teilchen bzw. Antiteilchen unterschiedlicher Farbe erreichen. Im ersten Fall hat das entstandene Teilchen ganzzahligen Spin. Es handelt sich demzufolge um ein Boson. Man spricht auch von Mesonen. Im zweiten Fall entsteht ein Baryon bzw. ein Antibaryon. Da Baryonen aus drei Quarks bestehen, tragen diese halbzahligen Spin und sind somit Fermionen. Die wohl prominentesten Vertreter der Baryonen sind die Nukleonen. Das Proton besteht aus zwei Up- und einem Down-Quark, während das Neutron aus einem Up- und zwei Down-Quarks zusammengesetzt ist.

Ist Kernmaterie extremen Bedingungen, das heißt hohen Dichten und/oder Temperaturen, ausgesetzt, kann es zu einem Phasenübergang von hadronischer Materie zu einem Quark-Gluon-Plasma kommen. Hier ist das Confinement aufgehoben und die Quarks und Gluonen verhalten sich quasi-frei. Die Existenz von Quarkmaterie in verschiedenen Phasen sowie die Eigenschaften der zugehörigen Phasenübergänge sind bislang ungewiss. Eine theoretische Vorstellung des Phasendiagramms der QCD ist in Abbildung 1 dargestellt. Für Temperaturen unterhalb des kritischen Punktes handelt es sich um einen Phasenübergang erster Ordnung, während der Phasenübergang oberhalb des kritischen Punktes kontinuierlich ist. Die Lage der Koexistenzkurve und des kritischen Punktes sind Gegenstand der Forschung. Berechnungen im Rahmen der Gitter-QCD ergeben für verschwindendes chemisches Potential eine kritische Temperatur in der Größenordnung von $(173 \pm 15) \text{ MeV}$ [3]. Bei niedriger Dichte und steigender Temperatur geht die Kernmaterie zunächst in eine gasförmige hadronische Phase über. Betrachtet man Kernmaterie bei niedrigen Temperaturen und ansteigender Dichte, können sich innerhalb der hadronischen Phase zunächst Mesonen und später Baryonen bilden. Ist das Confinement aufgebrochen, besteht die Möglichkeit, dass sich die Quarks zu Paaren zusammenschließen. In Analogie zu dem Zusammenschluss von Elektronen zu Cooper-Paaren in Supraleitern, spricht man in diesem Zusammenhang von Farbsupraleitung.

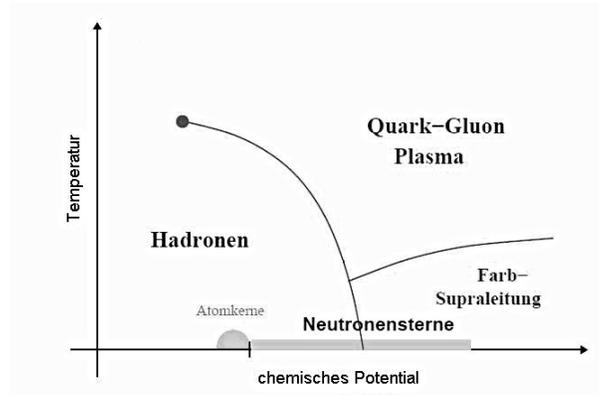


Abbildung 1: Phasendiagramm der QCD

2.2 Kompakte Objekte

Zu den kompakten Objekten des Universums zählen weiße Zwerge, Neutronensterne und schwarze Löcher. Sie entstehen durch den gravitativen Kollaps eines massereichen Sterns, am Ende der Sternentwicklung.

Kommen die Fusionsprozesse im Inneren eines Sterns zum Erliegen, kann der Strahlungsdruck dem Gravitationsdruck nicht mehr standhalten. Die Sternmaterie befindet sich nicht mehr im hydrostatischen Gleichgewicht und kollabiert. Durch die starke Komprimierung der Materie können thermodynamische Phasenübergänge stattfinden. Das Endprodukt eines gravitativen Kollapses hängt maßgeblich von der Masse des Sterns ab.

Auf Grund des Pauliprinzips können Fermionen nicht beliebig stark komprimiert werden. Bei vergleichsweise geringen Massen des kollabierenden Sterns reicht der sogenannte Entartungsdruck der Elektronen aus, um den Gravitationsdruck zu kompensieren. In diesem Fall entsteht ein weißer Zwerg mit einer typischen Masse von etwa einer Sonnenmasse (M_{\odot}) und einem Radius von etwa $5 \cdot 10^3 km$. Ist die Masse des Sterns größer als die sogenannte Chandrasekhar-Grenze ($M_C = 1,47 M_{\odot}$), reicht der Entartungsdruck der Elektronen nicht aus, um den gravitativen Druck zu kompensieren. Die Materie wird so stark verdichtet, dass inverser β -Zerfall stattfindet.



Auf Grund der herrschenden Ladungsneutralität im Stern, kann es so theoretisch zu einer vollständigen Neutronisierung der Materie kommen. Der auf diese Weise entstandene Neutronenstern ist durch den Entartungsdruck der Neutronen stabil. Die Masse von Neutronensternen beträgt etwa $1,5 M_{\odot}$, bei Radien in der Größenordnung von $10 km$. Ist eine gewisse obere Massengrenze überschritten, kollabiert der Neutronenstern zu einem schwarzen Loch. Diese maximale Masse wird Oppenheimer-Volkoff-Grenzmasse genannt und hängt stark von der Beschaffenheit der Materie im Sterninneren ab. Je nach Wahl der Zustandsglei-

chung, können theoretische Werte zwischen 1,5 und 3 Sonnenmassen berechnet werden.

Neben der Struktur von Neutronensternen ist vor allem die Zusammensetzung der Materie im inneren Kern ungewiss. Die Dichte nimmt von der Oberfläche zum Sterninneren hin zu, sodass sich unterschiedliche Phasen der Materie, die miteinander im Gleichgewicht stehen, schalenförmig anordnen. Das hier beschriebene Modell ist [4] entnommen.

Die äußere Kruste des Neutronensterns wird von einem Gitter aus Eisenatomen und einem entarteten Fermigas aus Elektronen gebildet. Mit steigender Dichte sind die Atomkerne auf Grund des inversen β -Zerfalls stärker mit Neutronen angereichert. Ab einer Dichte von $4,3 \cdot 10^{11} \frac{g}{cm^3}$, die als neutron-drip-density bezeichnet wird, ist es den Neutronen möglich, den Kernverbund zu verlassen. Hier beginnt die innere Kruste des Neutronensterns, bestehend aus einer hadronischen Phase aus neutronenreichen Atomkernen und einer Neutronenflüssigkeit. Gleicht die Dichte im Neutronenstern der Dichte von Kernmaterie, ist die Neutronisierung abgeschlossen. Es sind keine Atomkerne mehr vorhanden. Der äußere Kern enthält Neutronen, Protonen und Elektronen. Ebenso ist das Auftreten von Hyperonen, also Baryonen, die mindestens ein Strange-Quark enthalten, sowie Kaonen, bei denen es sich um Mesonen aus Quark und Anti-quark handelt, möglich. Die Dichte steigt auf zwei- bis dreifache Kerndichte an. Im inneren Kern werden Dichten bis zu zehnfacher Kerndichte erreicht, sodass die Bildung eines Quark-Gluon-Plasmas denkbar ist.

In dieser Arbeit finden verschiedene Zustandsgleichungen Anwendung. Deshalb ist es im weiteren Verlauf sinnvoll, den Begriff Neutronenstern im Zusammenhang mit rein hadronischer Materie zu nutzen. Als Quarksterne werden demnach Sterne bezeichnet, die aus einer reinen Quarkphase bestehen. Diese Art von Stern soll hier im Vordergrund stehen. Neben Up- und Down-Quarks enthalten die Quarksterne hier auch Strange-Quarks, weshalb man in diesem Zusammenhang auch von Strange-Stars spricht. Sterne, die einen dichten inneren Kern aus Quarkmaterie enthalten, der von einem hadronischen Mantel umschlossen ist, werden als Hybridsterne bezeichnet.

2.3 Die allgemeine Relativitätstheorie

2.3.1 Die Einsteinschen Feldgleichungen

Da kompakte Objekte derartig hohe Dichten aufweisen, dass sie die Raumzeit sehr stark krümmen, ist eine Beschreibung im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie (ART) nötig. Im folgenden Abschnitt sollen die wichtigsten Zusammenhänge, die zum allgemeinen Verständnis dieser Arbeit notwendig sind, dargestellt werden. Für das ausführliche Studium der ART ist [5] zu empfehlen. Für die spezielle Beschreibung kompakter Objekte auf allgemeinrelativistischem Hintergrund sei auf [6] verwiesen.

Die ART stellt eine Erweiterung der speziellen Relativitätstheorie (SRT) dar, welche die Gravitation mit einschließt. Dies geschieht durch die Krümmung der vierdimensionalen Raumzeit, die durch die Gravitation verursacht wird. Quelle

der Gravitation ist die Energie einer Masseverteilung.
 Der Zusammenhang zwischen der Krümmung der Raumzeit und der Energie der Masseverteilung wird durch die Einsteinschen Feldgleichungen beschrieben.

$$G^{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu} \quad (2)$$

$G^{\mu\nu}$ wird als Einsteintensor bezeichnet und beschreibt die Krümmung des vierdimensionalen Raums auf Grundlage der Riemannschen Differentialgeometrie. Der Energie-Impuls-Tensor $T^{\mu\nu}$ beschreibt die Energie der Masseverteilung. Für die Einsteinkonstante gilt $\kappa \equiv \frac{8\pi G}{c^4}$. Hierbei steht G für die Gravitationskonstante.

Der vierdimensionale Raum sei durch die generalisierten Koordinaten $q = (q^1, q^2, q^3, q^4)$ beschrieben, wobei die Indizes 1-3 für die räumlichen Komponenten stehen und Index 4 die zeitliche Komponente darstellt. Aufgespannt sei der Raum durch die Basisvektoren $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$.

Eine infinitesimale Verschiebung in diesem Raum wird durch

$$d\vec{s} = \sum_{\mu=0}^4 dq^\mu \vec{e}_\mu \equiv dq^\mu \vec{e}_\mu \quad (3)$$

beschrieben, wobei im zweiten Schritt die Einsteinsche Summenkonvention¹ eingeführt wurde, die auch im Folgenden verwendet wird.

Betrachtet man infinitesimale Verschiebungen eines Punktes im Raum, können diese als Verschiebungen in einem Tangentialraum beschrieben werden, der lokal in diesem Punkt definiert wird. Dieser soll im Gegensatz zu dem allgemeinen vierdimensionalen Raum der Minkowski-Metrik genügen.

Das Abstandsquadrat

$$(d\vec{s})^2 = \sum_{\mu=1}^4 \sum_{\nu=1}^4 (\vec{e}_\mu \vec{e}_\nu) dq^\mu dq^\nu = g_{\mu\nu} dq^\mu dq^\nu \quad (4)$$

definiert die Metrik $g_{\mu\nu} = \vec{e}_\mu \vec{e}_\nu$. Diese hängt von der Wahl der Koordinaten ab und ist nur in Kombination mit den infinitesimalen Verschiebungen, also in Form des Abstandsquadrates, von physikalischer Bedeutung.

Um eine Orthonormalitätsbedingung im Tangentialraum einzuführen, wird ein zweiter Satz von Basisvektoren $(\vec{e}^1, \vec{e}^2, \vec{e}^3, \vec{e}^4)$ konstruiert, der die Bedingung $\vec{e}^\mu \vec{e}_\nu = \delta_\nu^\mu$ erfüllt. Man spricht von der reziproken Basis.

Für die infinitesimale Verschiebung dq_μ gilt demnach

$$d\vec{s} = dq_\mu \vec{e}^\mu \quad (5)$$

und die zugehörige Metrik $g^{\mu\nu} = \vec{e}^\mu \vec{e}^\nu$ ist durch das Abstandsquadrat

$$(d\vec{s})^2 = g^{\mu\nu} dq_\mu dq_\nu \quad (6)$$

¹Über doppelt auftretende Indizes wird summiert.

definiert.

Aus der Konstruktion der reziproken Basis geht u.a. hervor, dass die Metrik der ursprünglichen Basis gleich der Inversen der reziproken Basis ist. Des Weiteren wird ersichtlich, dass Multiplikation mit den metrischen Tensoren zu Erhöhung bzw. Erniedrigung der Indizes führt.

$$g^{\mu\nu} = (g^{-1})_{\mu\nu} \quad (7)$$

$$dq^\mu = g^{\mu\nu} dq_\nu, \quad dq_\mu = g_{\mu\nu} dq^\nu \quad (8)$$

Mit diesem Wissen lässt sich der folgende Ausdruck aufstellen, den man als affinen Zusammenhang bezeichnet.

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} \left(\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial q^\mu} + \frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial q^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial q^\sigma} \right) \quad (9)$$

Dieser beschreibt die Änderung eines Basisvektors bei der infinitesimalen Verschiebung eines Punktes im vierdimensionalen Vektorraum.

Mit Hilfe dieses Zusammenhangs lässt sich der Riemannsche Krümmungstensor $R_{\mu\rho\nu}^\lambda$ aufstellen. Dieser beschreibt die lokale Krümmung des Raums.

$$R_{\mu\rho\nu}^\lambda = \left(\frac{\partial}{\partial q^\rho} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \Gamma_{\rho\sigma}^\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \right) - \left(\frac{\partial}{\partial q^\nu} \Gamma_{\mu\rho}^\lambda + \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda \Gamma_{\mu\rho}^\sigma \right) \quad (10)$$

Aus dem Riemannschen Krümmungstensor lassen sich der Ricci-Tensor $R_{\mu\nu}$ sowie das Krümmungsskalar R berechnen. Für diese gilt per Definition:

$$R_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\lambda\nu}^\lambda, \quad R \equiv R_\mu^\mu \quad (11)$$

Mit Hilfe dieser beiden Ausdrücke lässt sich der Einsteintensor aufstellen:

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} \quad (12)$$

Bei vorgegebener Metrik ist die linke Seite der Einsteingleichungen demzufolge bekannt.

Jetzt soll der Energie-Impuls-Tensor untersucht werden. Im Hinblick auf die spätere Betrachtung von Sternen, deren Inneres näherungsweise durch eine ideale Flüssigkeit beschrieben werden soll, betrachten wir eine solche Flüssigkeit, die sich mit der konstanten Geschwindigkeit $\vec{v} = v\vec{e}_3$ im Laborsystem bewegt. Das Laborsystem sei durch die räumlichen Basisvektoren $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ beschrieben. Die Basis des Ruhesystems der Flüssigkeit wird mit $(\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3)$ bezeichnet. Der Index 4 steht weiterhin für die zeitliche Komponente.

Für den Energie-Impuls-Tensor gilt

$$T = T^{\mu\nu} \vec{e}_\mu \vec{e}_\nu = \bar{T}^{\mu\nu} \vec{\alpha}_\mu \vec{\alpha}_\nu \quad (13)$$

wobei die Komponenten $\bar{T}^{\mu\nu}$ im Ruhesystem der Flüssigkeit im Rahmen der SRT beschrieben werden können. Diese stehen in folgendem Zusammenhang mit dem Druck p und der Energiedichte ε :

$$\bar{T}^{ij} = p\delta^{ij}, \quad \bar{T}^{44} = \varepsilon \quad (14)$$

Der Basiswechsel zwischen dem Inertialsystem und dem Ruhesystem der Flüssigkeit kann mit Hilfe der Matrixdarstellung der Lorenztransformation durchgeführt werden.

$$a = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \begin{pmatrix} \sqrt{1-\beta^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\beta^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & \beta & 1 \end{pmatrix} \quad (15)$$

Mit der Darstellung der Vierergeschwindigkeit

$$u^\mu = \gamma(\vec{v}, c) = \gamma(0, 0, v, c), \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c} \quad (16)$$

gilt für die Komponenten der Matrix a :

$$a_\mu^4 = \frac{1}{c}u^\mu, \quad a_i^\mu a_\nu^\mu = g^{\mu\nu} + \frac{1}{c^2}u^\mu u^\nu \quad (17)$$

Für die Transformation von Tensoren gilt:

$$T^{\mu\nu} = a_\mu^\mu a_\nu^\nu \bar{T}^{\mu'\nu'} \quad (18)$$

Somit ergibt sich zusammenfassend der folgende Ausdruck für den Energie-Impuls-Tensor der idealen Flüssigkeit im Inertialsystem:

$$T^{\mu\nu} = P g^{\mu\nu} + (\varepsilon - P) \frac{1}{c^2} u^\mu u^\nu \quad (19)$$

2.3.2 Kugelsymmetrische Lösung der Feldgleichungen

Im Hinblick auf die Behandlung von Sternen sollen nun die Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen, innerhalb und außerhalb einer kugelförmigen Masseverteilung mit Radius R und Masse M , angegeben werden.

Als generalisierte Koordinaten werden Kugelkoordinaten $q = (r, \theta, \varphi, ct)$ verwendet². Betrachtet man den statischen Fall, hängt die Metrik lediglich von den räumlichen Koordinaten ab.

Als Ansatz für das Abstandsquadrat wird

$$(d\vec{s})^2 = e^{2\lambda(r)}(dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + r^2 \sin^2(\theta)(d\varphi)^2 - e^{2\nu(r)}(cdt)^2 \quad (20)$$

gewählt, wobei die Funktionen $\lambda(r)$ und $\nu(r)$ zu bestimmen sind.

Aus dem Ausdruck des Verschiebungsquadrates lassen sich die Komponenten der Metrik direkt ablesen.

²Die zeitliche Komponente wird weiterhin mit dem Index 4 versehen.

$$\begin{aligned}
g_{rr} &= e^{2\lambda(r)} & g_{\mu\nu} &= 0 & \text{für } \mu &\neq \nu \\
g_{\theta\theta} &= r^2 & g^{\mu\nu} &= 0 & \text{für } \mu &\neq \nu \\
g_{\varphi\varphi} &= r^2 \sin^2(\theta) & g^{\mu\nu} &= \frac{1}{g_{\mu\nu}} & \text{für } \mu &= \nu \\
g_{44} &= -e^{2\nu(r)} & & & &
\end{aligned} \tag{21}$$

Wie in Kapitel 2.3.1 beschrieben, lässt sich hieraus der Einsteintensor berechnen. Der Energie-Impuls-Tensor für eine ideale Flüssigkeit wurde dort ebenfalls eingeführt.

Auch wenn sich die Zahl der zu berechnenden Elemente der auftretenden Tensoren durch Ausnutzung deren Symmetrie reduzieren lässt, ist die Rechnung lang und soll hier deshalb nicht explizit durchgeführt werden. Eine ausführliche Darstellung ist in [5] zu finden.

Zunächst soll die Lösung außerhalb der Masseverteilung angegeben werden. Da sich im Außenraum keine Masse und somit keine Quelle der Gravitation befindet, gilt $R_{\mu\nu} = 0$. Demnach ist das explizite Aufstellen des Einsteintensors nicht notwendig. Es genügt die Ausdrücke des Ricci-Tensors zu betrachten. Man erhält die folgenden Ausdrücke für die Funktionen $\lambda(r)$ und $\nu(r)$:

$$e^{2\lambda(r)} = \frac{1}{1 - \frac{R_S}{r}}, \quad e^{2\nu(r)} = 1 - \frac{R_S}{r} \tag{22}$$

Hierbei wurde der Schwarzschildradius³ $R_S \equiv \frac{2MG}{c^2}$ eingeführt.

Setzt man diese Ausdrücke in (21) ein, erhält man die sogenannte Schwarzschildmetrik.

Um eine Lösung für den Innenraum der Masseverteilung zu erhalten, müssen die Einsteingleichungen explizit aufgestellt werden. Man erhält

$$e^{2\lambda(r)} = \frac{1}{1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r}} \tag{23}$$

wobei unter $m(r)$ die eingeschlossene Masse der Massenverteilung in Abhängigkeit der Koordinate r zu verstehen ist.

$$m(r) = \int_0^r r'^2 \frac{\varepsilon(r')}{c^2} dr' \tag{24}$$

Einen Ausdruck für $\nu(r)$ erhält man durch Integration der folgenden Gleichung:

$$\frac{d\nu(r)}{dr} = -\frac{1}{p(r) + \varepsilon(r)} \frac{dp(r)}{dr} \tag{25}$$

Der Ausdruck für $\frac{dp(r)}{dr}$ zusammen mit (24) sowie einer Zustandsgleichung in der Form $\varepsilon(p)$, werden als die Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) Gleichungen bezeichnet. Sie lauten

³Für Neutronensterne gilt $R_S > R$. Anderenfalls handelt es sich um ein schwarzes Loch.

$$\begin{aligned} \frac{dp(r)}{dr} &= -\frac{Gm(r)\varepsilon(r)}{c^2 r^2} \left(\frac{1 + \frac{p(r)}{\varepsilon(r)}}{1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r}} \right) \left(1 + \frac{4\pi p(r)r^3}{m(r)c^2} \right) \\ \frac{dm(r)}{dr} &= 4\pi r^2 \frac{\varepsilon(r)}{c^2} \\ \varepsilon &= \varepsilon(p) \end{aligned} \tag{26}$$

und bilden die Grundlage dieser Arbeit.

3 Masse-Radius-Beziehungen

In diesem Kapitel wird der Zusammenhang von Masse und Radius stabiler Sternkonfigurationen behandelt. Von zentralem Interesse ist die maximale Masse, die ein Stern erreichen kann, bevor er zu einem schwarzen Loch kollabiert. In Kapitel 3.1 wird die numerische Methode zur Behandlung des Problems dargestellt. Kapitel 3.2 behandelt die Zustandsgleichungen, die den Rechnungen zugrunde liegen. Die Ergebnisse sind in Kapitel 3.3 zusammengefasst.

3.1 Lösen der Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Gleichungen

Um die Masse und den Radius eines Sternes bei vorgegebenem Zentraldruck p_c zu berechnen, müssen die TOV-Gleichungen (26) gelöst werden. Hierzu werden diese mit einem Eulerverfahren vom Mittelpunkt des Sterns bis zu dessen Rand numerisch integriert.

Für die Startwerte gilt:

$$r = 0, \quad m = 0, \quad p = p_c \tag{27}$$

Die Wahl der Schrittweite Δr muss gewährleisten, dass die Werte des Drucks und der eingeschlossenen Masse innerhalb eines Schritts annähernd konstant bleiben. Diese Forderung ist mit $\Delta r = 1m$ erfüllt.

Nach (26) wird die Änderung des Drucks Δp und der eingeschlossenen Masse Δm nach jedem Schritt aus⁴

$$\Delta m = 4\pi r^2 \varepsilon \Delta r, \quad \Delta p = -\frac{Gm\varepsilon}{r^2} \left(\frac{1 + \frac{p}{\varepsilon}}{1 - \frac{2Gm}{r}} \right) \left(1 + \frac{4\pi p r^3}{m} \right) \Delta r \tag{28}$$

berechnet, wobei für ε die jeweilige Zustandsgleichung in der Form $\varepsilon = \varepsilon(p)$ eingesetzt wird.

Da der Druck an der Oberfläche des Sterns verschwindet, lautet die Abbruchbedingung der Integration $p < 0$.

Für die in Kapitel 3.3 dargestellten Masse-Radius-Beziehungen wird die gesamte Masse des Sterns, nach obigem Schema, für verschiedene Zentraldrücke bestimmt.

⁴Es werden natürliche Einheiten $\hbar = c = 1$ verwendet.

3.2 Zustandsgleichungen

3.2.1 Das freie Neutronengas

Zur Herleitung der Zustandsgleichung des freien Fermigas bei verschwindender Temperatur betrachtet man zunächst ein kubisches Volumen der Kantenlänge L , in dem sich N freie Fermionen befinden. Das Potential im Inneren des Volumens sei $V = 0$, während außerhalb $V = \infty$ gilt. Dann nimmt die stationäre Schrödingergleichung die Form

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}) \quad (29)$$

an. Mit dem Ansatz einer ebenen Welle $\psi(\vec{r}) \sim e^{i\vec{k}\vec{r}}$, bestimmen sich die Eigenwerte zu $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$. Durch die Wahl periodischer Randbedingungen

$$\psi(x, y, z) = \psi(x + L, y, z) = \psi(x, y + L, z) = \psi(x, y, z + L) \quad (30)$$

erhält man die folgenden Zusammenhänge für die Komponenten der Wellenvektoren:

$$k_i = \frac{2\pi}{L}n_i, \quad n_i \text{ ganzzahlig}, \quad i = (x, y, z) \quad (31)$$

Jeder Zustand nimmt demnach das Volumen $V_Z = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^3$ im \vec{k} -Raum ein. Für die Zustandsdichte ρ_Z gilt somit $\rho_Z = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3$. Um die Anzahl N der Teilchen zu berechnen, muss über die Zustandsdichte integriert werden, wobei die Verteilungsfunktion $f(\vec{k})$ der Fermionen berücksichtigt werden muss.

$$N = \int \rho_Z f(\vec{k}) d^3k = \frac{V}{(2\pi)^3} \int f(\vec{k}) d^3k \quad (32)$$

Für die Teilchendichte ρ ergibt sich somit der folgende Zusammenhang:

$$\rho = \frac{N}{V} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int f(\vec{k}) d^3k = \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{k_F} k^2 dk \quad (33)$$

Hierbei wurde u.a. genutzt, dass die Verteilung der Fermionen, bei Vernachlässigung der Wechselwirkung, der Fermiverteilung genügt. Da an dieser Stelle Materie bei verschwindender Temperatur beschrieben wird, sind alle Zustände bis zur Fermienergie besetzt. Die Integration über die Winkelanteile liefert einen Faktor von 4π . Der Faktor γ steht für den Entartungsgrad der Zustände. Da es sich hier um eine Beschreibung von Neutronen handeln soll, gilt auf Grund der zwei möglichen Spinorientierungen $\gamma = 2$.

Um die Energiedichte zu berechnen, muss der Ausdruck im letzten Integral von (33) mit der Zustandsenergie multipliziert werden. Für diese gilt⁵ $E(p) = \sqrt{pc^2 + m^2c^4}$. Da in dieser Arbeit natürliche Einheiten verwendet werden (siehe Anhang A), gilt $p = \hbar k = k$ und $E(k) = \sqrt{k^2 + m^2}$.

⁵Da wechselwirkungsfreie Teilchen betrachtet werden, entspricht die Energie der kinetischen Energie.

$$\varepsilon = \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{k_F} k^2 E(k) dk \quad (34)$$

Durch Lösen der Integrale (33) und (34) und Ausnutzen von

$$p = -\frac{\partial E}{\partial V} = \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} - \varepsilon \quad (35)$$

lässt sich ein Ausdruck für den Druck herleiten [1]. Zusammenfassend ergeben sich folgende Zusammenhänge für Energiedichte, Druck und Teilchendichte des idealen Fermigases bei $T = 0$:

$$\varepsilon = \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{k_F} k^2 E(k) dk \quad (36)$$

$$p = \frac{1}{3} \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{k_F} \frac{k^2}{E(k)} k^2 dk \quad (37)$$

$$\rho = \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{k_F} k^2 dk \quad (38)$$

Berücksichtigt man, dass die Fermienergie auf Grund der Einschränkung $T = 0$ dem chemischen Potential μ entspricht

$$\mu = E_F = E(k_F) = \sqrt{k_F^2 + m^2} \quad (39)$$

erhält man nach Lösen der Integrale:

$$\varepsilon = \frac{\gamma}{8\pi^2} \left[\mu k (\mu^2 - \frac{1}{2} m^2) - \frac{1}{2} m^4 \ln\left(\frac{\mu + k}{m}\right) \right] \quad (40)$$

$$p = \frac{\gamma}{24\pi^2} \left[\mu k (\mu^2 - \frac{5}{2} m^2) + \frac{3}{2} m^4 \ln\left(\frac{\mu + k}{m}\right) \right] \quad (41)$$

$$\rho = \frac{k^3}{3\pi^2} \quad (42)$$

Da in diesen Ausdrücken lediglich die Fermiimpulse k_F auftreten, wird der Index F auf Grund der Übersichtlichkeit nicht ausgeschrieben. Alle auftretenden Impulse lassen sich durch (39) eliminieren. Zur Beschreibung des freien Neutronengases muss die Teilchenmasse m durch die Masse des Neutrons m_N ersetzt werden. Wie bereits erläutert, gilt für Neutronen $\gamma = 2$.

Um die Zustandsgleichung in der benötigten Form $\varepsilon(p)$ zu erhalten, wird (41) zunächst numerisch nach $\mu(p)$ aufgelöst und anschließend in (40) eingesetzt.

3.2.2 Quarkmaterie bei $T = 0$

Wie in [1] soll im Folgenden eine Zustandsgleichung für Quarkmaterie bei verschwindender Temperatur auf Grundlage des Bag-Modells konstruiert werden. Dieses Modell dient der Beschreibung der in Kapitel 2.1 beschriebenen Eigenschaften, Confinement und asymptotischer Freiheit, der QCD. Innerhalb eines Bags, also eines bestimmten Volumens, herrscht asymptotische Freiheit. Die darin enthaltenen Quarks können sich frei bewegen. Dagegen können sie außerhalb nicht als freie Teilchen auftreten. Es herrscht Confinement. Dementsprechend lassen sich insbesondere Hadronen als Bags beschreiben. Hohe Dichten führen dazu, dass sich die Bags überlappen, so dass ein einheitliches Volumen entsteht, in dem sich die Quarks frei bewegen können. Dies entspricht dem Quark-Gluon-Plasma. Die sogenannte Bagkonstante B kann als Druckunterschied zwischen dem Außen- und Innenraum des Bags aufgefasst werden. Zur Beschreibung der Energiedichte eines Hadrons muss einerseits die kinetische Energie der Quarks im Bag berücksichtigt werden. Andererseits muss die Energie, die aufgebracht werden muss, um ein Volumen zu schaffen, in dem sich die Quarks frei bewegen können, mit einfließen.

Der verwendete Wert für die Bag-Konstante beträgt $B^{\frac{1}{4}} = 145 \text{ MeV}$ [1]. Für den Einfluss des Wertes B auf die Masse-Radius-Beziehungen von Sternen, sei auf die Arbeit [7] verwiesen.

Da sich die Quarks innerhalb des Bags wie freie Teilchen verhalten, finden die in Kapitel 3.2.1 hergeleiteten Zusammenhänge für das ideale Fermigas Verwendung. Es gilt:

$$p = \sum_i p_i - B \quad (43)$$

$$\varepsilon = \sum_i \varepsilon_i + B \quad (44)$$

An dieser Stelle wurde bereits berücksichtigt, dass Quarkmaterie aus unterschiedlichen Teilchen besteht. Die Ausdrücke für Energiedichte und Druck der Materie ergeben sich als Summe der Ausdrücke der jeweiligen Teilchensorte i . Da im Folgenden neben Up-, Down- und Strange-Quarks auch Elektronen zugelassen werden sollen, empfiehlt es sich Druck und Energiedichte in folgender Form zu schreiben:

$$p = \sum_f p_f + p_e - B \quad (45)$$

$$\varepsilon = \sum_f \varepsilon_f + \varepsilon_e + B \quad (46)$$

Hierbei steht der Index e für die Elektronen und f für die unterschiedlichen Quark-Flavours (u, d, s). Diese Art der Darstellung bietet sich an, da der Entartungsgrad γ für Quarks und Elektronen verschieden ist. Wie bereits für Neutronen beschrieben, müssen für Elektronen die zwei möglichen Spinorientierungen

berücksichtigt werden. Es gilt $\gamma = 2$. Im Fall von Quarks ergeben sich auf Grund der drei möglichen Farbladungen zusätzliche Freiheitsgrade und somit $\gamma = 6$. Für das weitere Vorgehen macht man sich die Baryonenzahlerhaltung sowie die Ladungsneutralität, im Stern zu nutze. Es gilt

$$\sum_f q_f \rho_f + q_e \rho_e = 0 \quad (47)$$

wobei hier wieder über die Teilchendichten aller enthaltenen Teilchen summiert wird und die Vorfaktoren q_i der Ladung der jeweiligen Teilchen entsprechen. Aus (42) und (39) folgt:

$$\sum_f q_f k_f^3 + q_e k_e^3 = 0, \quad k_i = \sqrt{\mu_i^2 - m_i^2} \quad (48)$$

Im Fall des freien Neutronengases, lässt sich das chemische Potential bei der Konstruktion der Zustandsgleichung, eliminieren. In dem hier vorliegenden Fall von Materie, die aus mehreren Teilchensorten gebildet wird, treten ebenso viele chemische Potentiale wie unterschiedliche Teilchen auf. Deshalb stellt man das chemische Potential für jede Teilchensorte in folgender Form auf:

$$\mu_i = b_i \mu_B + q_i \mu_L \quad (49)$$

Hierbei steht b_i für die Baryonenzahl der Teilchen. Somit gilt:

$$\mu_e = -\mu_L \quad \mu_u = \frac{1}{3}\mu_B + \frac{2}{3}\mu_L \quad \mu_d = \mu_s = \frac{1}{3}\mu_B - \frac{1}{3}\mu_L \quad (50)$$

Aus (40) und (41) erhält man in beschriebener Weise und unter Berücksichtigung der verschiedenen Entartungsfaktoren für Elektronen und Quarks die folgenden Ausdrücke für Energiedichte und Druck:

$$\varepsilon = \sum_f \frac{3}{4\pi^2} \left[\mu_f k_f (\mu_f^2 - \frac{1}{2}m_f^2) - \frac{1}{2}m_f^4 \ln\left(\frac{\mu_f + k_f}{m_f}\right) \right] \quad (51)$$

$$+ \frac{1}{4\pi^2} \left[\mu_e k_e (\mu_e^2 - \frac{1}{2}m_e^2) - \frac{1}{2}m_e^4 \ln\left(\frac{\mu_e + k_e}{m_e}\right) \right] + B$$

$$p = \sum_f \frac{1}{4\pi^2} \left[\mu_f k_f (\mu_f^2 - \frac{5}{2}m_f^2) + \frac{3}{2}m_f^4 \ln\left(\frac{\mu_f + k_f}{m_f}\right) \right] \quad (52)$$

$$+ \frac{1}{12\pi^2} \left[\mu_e k_e (\mu_e^2 - \frac{5}{2}m_e^2) + \frac{3}{2}m_e^4 \ln\left(\frac{\mu_e + k_e}{m_e}\right) \right] - B$$

Zunächst werden alle auftretenden chemischen Potentiale durch (49) ersetzt, so dass alle Gleichungen lediglich von den Variablen μ_B und μ_L abhängen. Einen Zusammenhang zwischen μ_B und μ_L liefert (48). Analog zum Vorgehen in Kapitel 3.2.1, erhält man die Zustandsgleichung in der Form $\varepsilon(p)$.

3.2.3 Quarkmaterie bei $T \neq 0$

Zur Beschreibung des Fermigas bei verschwindender Temperatur wurde die Tatsache genutzt, dass alle Zustände mit Energien, bis hin zur Fermienergie, die gleiche Besetzungswahrscheinlichkeit aufweisen. Dies ist bei endlichen Temperaturen nicht gegeben. Bei steigender Temperatur können Fermionen, nahe der Fermikante, Energieniveaus oberhalb der Fermienergie besetzen. Dies hat zur Folge, dass Zustände mit Energien unterhalb der Fermienergie unbesetzt sind. Dieses temperaturabhängige Verhalten wird im Fall nicht wechselwirkender Fermionen durch die Fermiverteilung beschrieben.

$$f(k) = \frac{1}{e^{\frac{E(k)-\mu}{T}} + 1}, \quad E(k) = \sqrt{m^2 + k^2} \quad (53)$$

Berücksichtigt man dies in den Gleichungen (32) bis (38), so ergeben sich die folgenden Ausdrücke für Energiedichte, Druck und Teilchendichte:

$$\varepsilon = \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^\infty k^2 E(k) (f^+(k) + f^-(k)) dk \quad (54)$$

$$p = \frac{1}{3} \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{k^2}{E(k)} k^2 (f^+(k) + f^-(k)) dk \quad (55)$$

$$\rho = \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^\infty k^2 (f^+(k) - f^-(k)) dk \quad (56)$$

Die Gleichungen

$$f^+(k) = \frac{1}{e^{\frac{E(k)-\mu}{T}} + 1}, \quad f^-(k) = \frac{1}{e^{\frac{E(k)+\mu}{T}} + 1} \quad (57)$$

berücksichtigen, dass Antiteilchen das negative chemische Potential der zugehörigen Teilchen spüren. Zu Druck und Energiedichte tragen sowohl Teilchen als auch Antiteilchen bei. Im Zusammenhang mit der Teilchendichte muss berücksichtigt werden, dass Antiteilchen eine negative Baryonenzahl besitzen. Gleichung (56) ist daher als Netto-Baryonendichte aufzufassen.

Analog zu dem Vorgehen in Kapitel 3.2.2 ergibt sich für Materie, bestehend aus Quarks und Elektronen, im Bag-Modell:

$$\varepsilon = \sum_f \frac{3}{\pi^2} \int_0^\infty k^2 E_f(k) (f_f^+(k) + f_f^-(k)) dk \quad (58)$$

$$+ \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty k^2 E_e(k) (f_e^+(k) + f_e^-(k)) dk + B$$

$$p = \sum_f \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{k^2}{E_f(k)} k^2 (f_f^+(k) + f_f^-(k)) dk \quad (59)$$

$$+ \frac{1}{3\pi^2} \int_0^\infty \frac{k^2}{E_e(k)} k^2 (f_e^+(k) + f_e^-(k)) dk - B$$

$$\rho = \sum_f \frac{3}{\pi^2} \int_0^\infty k^2 (f_f^+(k) - f_f^-(k)) dk + \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty k^2 (f_e^+(k) - f_e^-(k)) dk \quad (60)$$

mit

$$f_i^\pm(k) = \frac{1}{e^{\frac{E_i(k) \mp \mu_i}{T}} + 1}, \quad E_i(k) = \sqrt{m_i^2 + k^2} \quad (61)$$

Das Aufstellen der Zustandsgleichung in der Form $\varepsilon(p)$ erfolgt ebenfalls analog. Es lässt sich jedoch keine analytische Lösung für die Integrale in (54) bis (56) finden, so dass diese numerisch berechnet werden müssen. In [1] wird eine Näherung vorgeschlagen, in der alle Teilchen als masselos angenommen werden. In diesem Fall lassen sich analytisch sehr einfache Gleichungen für Energiedichte, Druck und Teilchendichte finden. Da in dieser Arbeit jedoch Materie untersucht werden soll, die neben Up- und Down- auch Strange-Quarks enthält, deren Masse im Vergleich sehr groß ist, würde dies hier keine gute Näherung darstellen.

3.2.4 Übersicht der verwendeten Zustandsgleichungen

Das freie Neutronengas (FN)

Nicht wechselwirkende Neutronen bei $T = 0$.

Die Zustandsgleichung wurde in Kapitel 3.2.1 konstruiert.

Wechselwirkende Neutronen (PA)

Die Materie besteht wie im Fall des FN lediglich aus Neutronen. Es wird jedoch zusätzlich eine Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung zugelassen. Hierauf soll im Weiteren nicht näher eingegangen werden, da die numerischen Ergebnisse, basierend auf der genannten Zustandsgleichung, in dieser Arbeit lediglich dem Vergleich von Literaturwerten dienen soll (siehe Kapitel 4.4).

Da die Zustandsgleichung von V. R. Pandharipande konstruiert wurde, soll sie in dieser Arbeit mit PA abgekürzt werden. Die Zustandsgleichung lässt sich in tabellierter Form in [8] (Table 2) finden. Zusätzlich wurde die tabellierte Niederenergiezustandsgleichung aus [9] (Table 5; Abschnitte: Feynman-Metropolis-Teller, Present Calculation, Baym-Bethe-Pethick EOS bis $p < 0,285 \frac{MeV}{fm^3}$ und $\varepsilon < 47,41 \frac{MeV}{fm^3}$), verwendet.

Quarkmaterie bei $T = 0$ (QT0)

Materie bestehend aus Elektronen, Up-, Down- und Strange-Quarks. Zur Konstruktion der Zustandsgleichung wird der Ansatz für Baryonenzahlerhaltung und Ladungsneutralität sowie die Gleichungen (51) und (52) verwendet.

Quarkmaterie bei $T \neq 0$ (QTX)

Die Materie besteht ebenfalls aus Elektronen, Up-, Down- und Strange-Quarks. Neben den Gleichungen (58) und (59) wird ebenfalls der Ansatz für Baryonenzahlerhaltung und Ladungsneutralität verwendet.

Im weiteren Verlauf wird die Bezeichnung QTX genutzt, wobei X für die Temperatur in MeV steht.

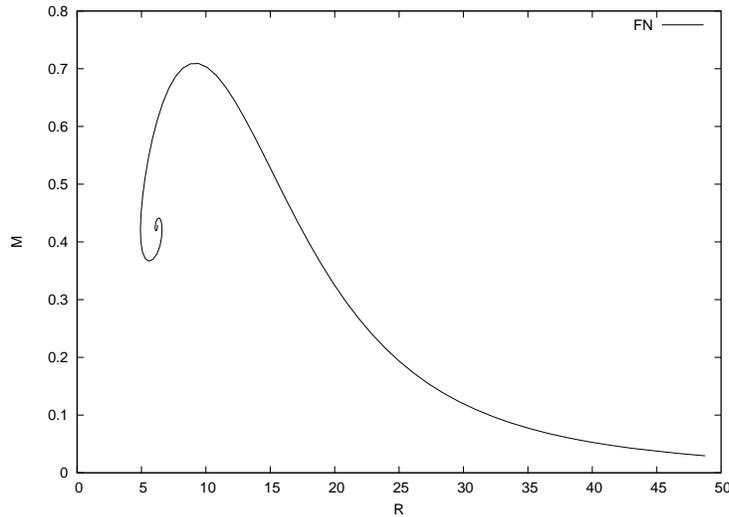


Abbildung 2: Masse-Radius-Beziehung der Zustandsgleichung FN. M ist in Einheiten der Sonnenmasse angegeben, während R in km aufgetragen ist.

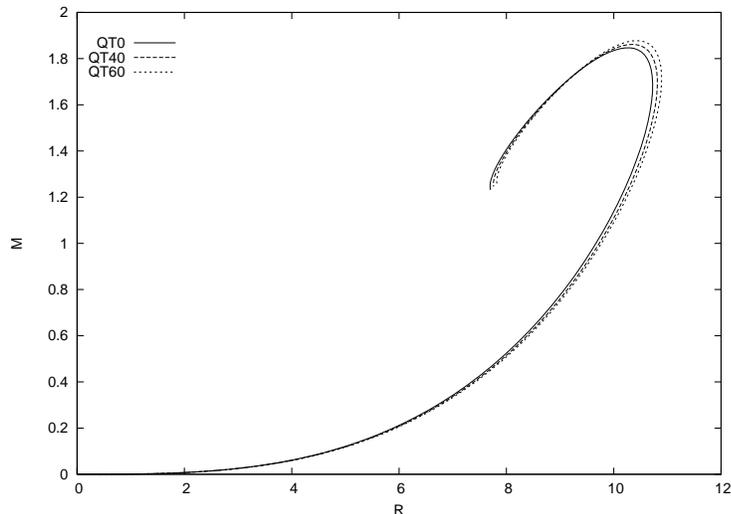


Abbildung 3: Masse-Radius-Beziehung der Zustandsgleichungen QTX für die Temperaturen 0, 40 und 60 MeV . M ist in Einheiten der Sonnenmasse angegeben, während R in km aufgetragen ist.

3.3 Ergebnisse

In Abbildung 2 ist die Masse-Radius-Beziehung von Neutronensternen, denen die Zustandsgleichung des freien Neutronengases zugrunde liegt, abgebildet. Die maximale Masse, die ein solcher Stern erreichen kann bevor er zu einem schwarzen Loch kollabiert, beträgt $M_{max} = 0,709M_{\odot}$. Dieser Wert ist auf Grund der vorausgesetzten Wechselwirkungsfreiheit der Neutronen im Stern sehr gering. Die abstoßende Kraft zwischen den Neutronen bewirkt einen Anstieg des Drucks im Inneren des Sterns, der dem Gravitationsdruck entgegenwirkt. Somit können stabile Sternkonfigurationen mit einer höheren Masse erreicht werden. In Kapitel 4.4 wird die Zustandsgleichung PA behandelt, die eine Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung beinhaltet. Die Masse-Radius-Beziehung ist in Abbildung 5 dargestellt. Im Vergleich zu den Ergebnissen des freien Neutronengases, wird für die maximal erreichbare Masse ein realistischerer Wert von $M_{max} = 1,659M_{\odot}$ bestimmt.

Abbildung 3 stellt die Masse-Radius-Beziehung von Sternen, bestehend aus Strange-Quarkmaterie, dar. Das Verhalten für kleine Massen und Radien weicht stark von dem gefundenen Zusammenhang für Neutronensterne ab. Während die Masse von Neutronensternen für große Radien kleiner wird, zeigt sich im Fall von Quarksternen das entgegengesetzte Verhalten. Ursache hierfür ist die starke Wechselwirkung, durch welche die Quarkmaterie gebunden ist. Die Gravitation führt lediglich zu einer zusätzlichen Verdichtung der Materie.

Für den Temperaturbereich von $T = (0 - 60)MeV$ wurden die Werte der maximalen Masse zu $M_{max} = (1,847 - 1,878)M_{\odot}$ bestimmt.

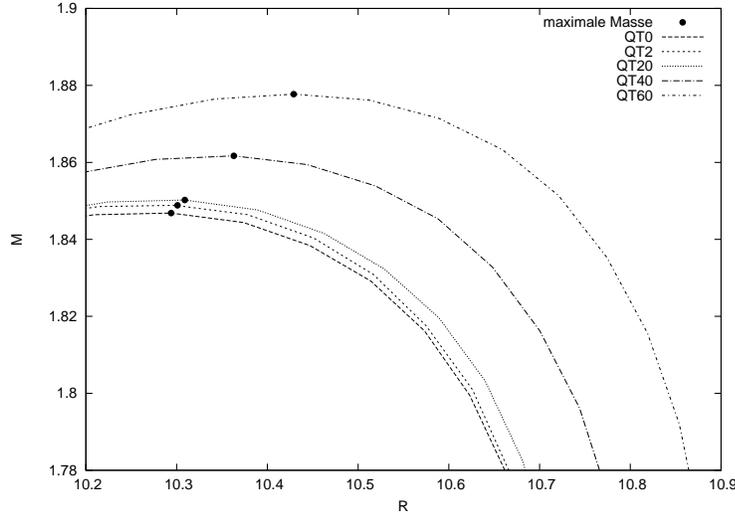


Abbildung 4: Masse-Radius-Beziehung der Zustandsgleichungen QTX für die Temperaturen 0, 20, 40 und 60 MeV . M ist in Einheiten der Sonnenmasse angegeben, während R in km aufgetragen ist. Für jede Zustandsgleichung ist die maximale Masse gekennzeichnet.

Aus Abbildung 3 ist ersichtlich, dass der Einfluss der Temperatur auf die Masse-Radius-Beziehung gering ist. Abbildung 4 zeigt den Bereich der maximalen Massen für die Temperaturen $T = 0, 20, 40$ und $60 MeV$. Bei gleicher Masse weisen Sterne mit höherer Temperatur einen größeren Radius auf. Auch die maximale Masse sowie der zugehörige Sternradius werden mit steigender Temperatur größer. Beide Effekte werden mit wachsender Temperatur deutlicher. Der hier behandelte Temperaturbereich geht jedoch weit über die Temperaturen, die im Inneren von Neutronensternen herrschen hinaus. Lediglich bei der Entstehung eines kompakten Objekts durch eine Supernovaexplosion werden Temperaturen im Bereich von einigen $10 MeV$ erreicht [1]. Innerhalb von wenigen Sekunden kühlt der Stern durch Emission von energiereichen Neutrinos auf sehr viel niedrigere Temperaturen $T < 1 MeV$ ab. In Tabelle 2 sind die maximalen Massen der stabilen Sternkonfigurationen aller verwendeten Zustandsgleichungen mit zugehörigen Radien und Zentraldrücken aufgelistet. Für $T = 2 MeV$, was bereits einen zu großen Wert für die Temperatur im Inneren eines Neutronensterns darstellt, ergeben sich maximale Massen und zugehörige Radien, die um lediglich $\Delta M \approx 0,002 M_{\odot}$ und $\Delta R \approx 0,004 km$ von den Werten abweichen, die für Materie bei verschwindender Temperatur bestimmt wurden.

Zustandsgleichung	M in M_\odot	R in km	p_c in $10^9 MeV^4$
PA	1,659	8,364	8,997
FN	0,709	9,437	1,456
QT0	1,847	10,294	2,369
QT2	1,849	10,298	
QT20	1,850	10,309	
QT40	1,862	10,363	
QT60	1,878	10,429	

Tabelle 2: Maximale Masse und zugehöriger Radius sowie Zentraldruck aller verwendeten Zustandsgleichungen.

4 Gravitationswellenemission von Neutronensternen

Es besteht große Hoffnung, dass die Detektion von Gravitationswellen die Erforschung der Materie im Inneren von kompakten Objekten in Zukunft stark vorantreibt. Demnach ist es von zentralem Interesse, die Ursache der Gravitationswellenemission zu verstehen und einen Zusammenhang zu den Eigenschaften der Quelle zu schaffen. Vor allem bei der Entstehung eines kompakten Objekts wird dieses in starke Schwingungen versetzt, die durch das Abstrahlen von Gravitationswellen gedämpft sind. Man spricht von quasi-normalen Schwingungen, die sich durch die Komplexwertigkeit ihrer Eigenfrequenzen auszeichnen. Der Realteil beschreibt die Frequenz ν der Schwingung, während der Imaginärteil mit der Dämpfungszeit τ in Verbindung steht.

$$\omega = \omega_r + i\omega_i \quad (62)$$

$$\omega_r = 2\pi\nu, \quad \omega_i = \frac{1}{\tau} \quad (63)$$

In Kapitel 4.1 soll ein Überblick über die gängige Klassifizierung der Schwingungszustände von kompakten Objekten gegeben werden. Kapitel 4.2 dient der Entwicklung einer einfachen mathematischen Beschreibung von axialen w -Moden, die sich durch besonders schnelle Dämpfung auszeichnen und deshalb im Zusammenhang mit Gravitationswellendetektion im Vordergrund stehen. Eine Möglichkeit, die Frequenzen und Dämpfungszeiten dieser Moden bei vorgegebener Zustandsgleichung zu bestimmen, ist die sogenannte Kettenbruchmethode. Diese wird in Kapitel 4.3 vorgestellt. In Kapitel 4.4 werden die numerischen Ergebnisse präsentiert.

4.1 Schwingungszustände von Sternen

Für die Klassifizierung von Schwingungsmoden werden diese zunächst in Fluid- und Raumzeitmoden unterteilt. In dieser Arbeit werden ausschließlich nicht rotierende Sterne und axiale Schwingungen betrachtet. In diesem Fall treten keine

Fluidmoden auf. Zur Vollständigkeit sollen jedoch die Eigenschaften der, für die Gravitationswellenforschung gängigsten, Fluidmoden aufgeführt werden. Charakteristisch für die Raumzeitmoden, die auch als w -Moden bezeichnet werden, ist das Fehlen jeglicher Fluidbewegung. Die Ursache für das Auftreten dieser Schwingungszustände liegt in der Krümmung der Raumzeit.

In dieser Arbeit werden Quadrupolschwingungen ($l = 2$) betrachtet. Für jedes l gibt es unendlich viele Schwingungszustände. Diesen wird eine Ordnung zugeteilt, wobei wachsende Ordnung wachsenden Werten von ω_r entspricht. Alle angegebenen Werte sind [10] entnommen und beziehen sich auf die Schwingungszustände niedrigster Ordnung von Neutronensternen. Der angegebenen Quelle ist ebenfalls zu entnehmen, dass Schwingungszustände sowohl mit wachsendem l als auch mit wachsender Ordnung, im Hinblick auf Gravitationswellenemission, an Signifikanz verlieren. Des Weiteren ergeben sich für die Werte von Frequenz und Dämpfungszeit für axiale und polare w -Moden vergleichsweise geringe Unterschiede.

Fluidmoden

- **f-Mode (fundamental)**

Die Frequenz beträgt $(1,5-3)kHz$. Sie verhält sich proportional zum mittleren Druck im Stern und zeigt kaum Abhängigkeit von dessen innerer Struktur. Die Dämpfungszeit liegt im Bereich von $(0,1-0,5)s$.

- **p-Mode (pressure)**

Die Schwingung ist über den Druck als rücktreibende Kraft beschreibbar, die ein ausgelenktes Fluidteilchen zurück in dessen Gleichgewichtslage bringt. Der Frequenzbereich für diese Mode beträgt $(4-7)kHz$. Die Dämpfungszeit liegt in der Größenordnung von einigen Sekunden.

- **g-Mode (gravity)**

Die Rücktreibende Kraft ist der Auftrieb, der Inhomogenitäten entlang einer Äquipotentialfläche ausgleicht. Die Frequenz nimmt Werte unterhalb $100Hz$ an, während die Dämpfungszeit Tage bis Jahre beträgt.

w -Moden

- **w^I -Mode (curvature)**

Die Frequenz beträgt $(5-12)kHz$. Die Dämpfungszeit liegt im Bereich von einigen zehntel Millisekunden. Sie fällt langsam mit steigender Ordnung der Mode und steigt mit zunehmender Kompaktheit des Sterns.

- **w^{II} -Mode (trapped)**

Diese Moden treten lediglich für Sterne mit⁶ $R \leq 3M$ auf. Mit steigender Kompaktheit werden die ersten w^I - zu w^{II} -Moden. Diese zeichnen sich durch Frequenzen aus, die Werte zwischen einigen hundert Hz und einigen

⁶ An dieser Stelle wird das Einheitensystem $G = c = 1$ verwendet. Dies hat zur Folge, dass Radius und Masse die selbe Dimension besitzen.

kHz annehmen. Die Dämpfungszeit liegt im Bereich von einigen zehntel Sekunden.

- **w^{III} -Moden (interface)**

Diese Moden weisen Dämpfungszeiten unterhalb einer zehntel Millisekunde und Frequenzen im Bereich von $(2-15)Hz$ auf. Im Gegensatz zu den restlichen w -Moden geht man von einer begrenzten Anzahl von interface-Moden aus.

Eine Unterscheidung zwischen den unterschiedlichen w -Moden ist demnach über das Verhalten der Dämpfung möglich.

4.2 Schrödingergleichung für axiale w -Moden

Schwingungszustände von kompakten Objekten werden im Rahmen der Störungstheorie untersucht. Hierbei wird die Metrik in folgender Form geschrieben.

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^0 + h_{\mu\nu} \quad (64)$$

$g_{\mu\nu}^0$ stellt die ungestörte Hintergrundmetrik dar, für welche die Lösungen der Einsteingleichungen bekannt sind. In diesem speziellen Fall finden die in Kapitel 2.3.2 beschriebenen Lösungen, innerhalb und außerhalb einer kugelsymmetrischen, statischen Masseverteilung, Verwendung, um den ungestörten Stern zu beschreiben. Die Störung, in diesem Fall die Schwingung des Sterns, wird durch die Metrik $h_{\mu\nu}$ beschrieben, wobei $|h_{\mu\nu}| \ll |g_{\mu\nu}^0|$ erfüllt sein muss. Sie führt zu einer Änderung der Einsteinschen Feldgleichungen um $\delta G_{\mu\nu} = \kappa \delta T_{\mu\nu}$. Die Lösung der Einsteingleichungen für den Störungsterm der Metrik wird für den Fall eines schwarzen Lochs in [11] durchgeführt. Zusätzlich dazu sind die Unterschiede, die sich bei der Beschreibung eines Sterns ergeben, in übersichtlicher Form in [12] dargelegt. Hier soll lediglich die prinzipielle Vorgehensweise erläutert werden.

Zunächst werden zwei Basen eingeführt, die es ermöglichen, alle auftretenden Vierervektoren und Tensoren nach Kugelflächenfunktionen zu entwickeln, wobei die Entwicklungskoeffizienten durch das Lösen der Einsteingleichungen bestimmt werden können. Dadurch ist eine Aufteilung der Störung h in

$$h = h^{ax} + h^{pol} \quad (65)$$

möglich, wobei sich der axiale Anteil h^{ax} unter der Paritätstransformation $r \rightarrow r, \varphi \rightarrow \pi + \varphi, \theta \rightarrow \pi - \theta$ wie $(-1)^{(l+1)}$ verhält, also ungerade Parität aufweist und sich der polare Anteil h^{pol} , mit gerader Parität, wie $(-1)^l$ transformiert.

Im Fall nicht rotierender Sterne können die Einsteinschen Feldgleichungen für die Anteile h^{ax} und h^{pol} getrennt betrachtet werden.

Mit Hilfe einer Koordinatentransformation $x'^i = x^i + \xi^i$, wobei $\vec{\xi}$ mit der eingeführten Basis ebenfalls nach Kugelflächenfunktionen entwickelt wird, lassen sich einige Komponenten von h eliminieren.

Anschließend wird eine Fouriertransformation aller zeitabhängigen Größen⁷ durchgeführt. Durch das Aufstellen der Einsteingleichungen zeigt sich, dass sich alle Winkelanteile eliminieren lassen.

Weiterhin werden die Funktionen $Z(r)$, $V(r)$ und die Koordinate r_* eingeführt, so dass sich die letzten Ausdrücke, die aus den Einsteinschen Feldgleichungen gewonnen wurden, in der Form

$$\frac{d^2 Z(r)}{dr_*^2} + [\omega^2 - V(r)]Z(r) = 0 \quad (66)$$

schreiben lassen.

Dies wird in den angegebenen Quellen für den axialen sowie den polaren Anteil durchgeführt. Da in dieser Arbeit lediglich der axiale Fall betrachtet wird, soll die Notation $Z^{ax}(r) \equiv Z(r)$ gelten.

Das beschriebene Schema muss einerseits für den Fall innerhalb des Sterns und andererseits im Außenraum durchgeführt werden.

Außerhalb des Sterns stellt $g_{\mu\nu}^0$ die Schwarzschildmetrik dar. Wie bereits in Kapitel 2.3.2 erläutert, muss nach Lösungen gesucht werden, für die der Einstein-tensor verschwindet. Die Ausdrücke für das Potential $V(r)$ und die Koordinate r_* lauten

$$V(r) = \frac{r - 2M}{r^4} (l(l+1)r - 6M) \quad (67)$$

$$r_* = 2M \ln(r - 2M) \quad (68)$$

wobei die gesamte Masse des Sterns im Folgenden mit M bezeichnet wird. Für die eingeschlossene Masse wird $m(r)$ geschrieben.

Innerhalb des Sterns wird der Energie-Impuls-Tensor für die Lösung der Einsteingleichungen benötigt (siehe Kapitel 2.3.2). In den Ausdrücken für $V(r)$ und r_* treten neben den metrischen Funktionen $\nu(r)$ und $\lambda(r)$ auch der Druck und die Energiedichte auf.

$$V(r) = \frac{e^{2\nu(r)}}{r^3} (l(l+1)r + 4\pi r^3 (\varepsilon(r) - p(r)) - 6m(r)) \quad (69)$$

$$r_* = \int_0^r e^{\lambda(r)-\nu(r)} dr \quad (70)$$

Innerhalb sowie außerhalb des Sterns ist Gleichung (66) konsistent mit den Einsteingleichungen, wenn sich $Z(r)$ im Unendlichen wie eine rein auslaufende Welle

$$r \rightarrow \infty \quad Z(r) \rightarrow e^{-i\omega r} \quad (71)$$

verhält.

⁷Hier treten die Frequenzen ω , die es zu bestimmen gilt, auf.

4.3 Formalismus

Wie es nun möglich ist, die Funktion $Z(r)$ bzw. die komplexen Eigenfrequenzen $\omega = \omega_r + i\omega_i$ der Gleichung (66) zu bestimmen, soll im Folgenden erläutert werden.

Da die Frequenzen der hier behandelten w -Moden im Vergleich zu anderen Schwingungszuständen hohe Imaginärteile aufweisen, ist der Umgang mit dem Verhalten im Unendlichen schwierig, jedoch nach (71) notwendig. Eine Möglichkeit dieses Problem zu lösen, ist die Verwendung einer Kettenbruchmethode, die in [13] vorgestellt wird.

Analog sollen hier im Folgenden die geometrischen Einheiten $2M = c = G = 1$ verwendet werden.

Zunächst wird der folgende Ansatz für die Funktion $Z(r)$ gewählt,

$$Z(r) = \chi(r) \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n \quad (72)$$

$$\chi(r) = (r-1)^{-i\omega} e^{-i\omega r}, \quad y = 1 - \frac{A}{r}$$

wobei der Abstand A die Bedingung $R < A < 2R$ erfüllen muss. R ist der Radius des Sterns.

Für die Koeffizienten a_n kann eine 4-Term-Rekursionsbedingung aufgestellt werden, die sich wiederum auf eine 3-Term-Bedingung reduzieren lässt.

$$\hat{\alpha}_n a_{n+1} + \hat{\beta}_n a_n + \hat{\gamma}_n a_{n-1} = 0 \quad \text{für } n \geq 2 \quad (73)$$

Alle benötigten Ausdrücke sind in Anhang B zusammengestellt. Für eine ausführliche Lektüre sei auf die in [13] aufgeführte Literatur verwiesen.

Der Ansatz (72) für $Z(r)$ entspricht nur dann, wie gefordert, einer rein auslaufenden Welle im Unendlichen, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist⁸:

$$f_n(\omega) = \hat{\beta}_n - \frac{\hat{\alpha}_n \hat{\gamma}_{n+1}}{\hat{\beta}_{n+1} - \frac{\hat{\alpha}_{n+1} \hat{\gamma}_{n+2}}{\hat{\beta}_{n+2} - \frac{\hat{\alpha}_{n+2} \hat{\gamma}_{n+3}}{\hat{\beta}_{n+3} - \dots}}} - \frac{\hat{\alpha}_{n-1} \hat{\gamma}_n}{\hat{\beta}_{n-1} - \frac{\hat{\alpha}_{n-2} \hat{\gamma}_{n-1}}{\hat{\beta}_{n-2} - \dots - \frac{\hat{\alpha}_0 \hat{\gamma}_1}{\hat{\beta}_0}}} = 0 \quad (74)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

Die Funktionen $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ und $\hat{\gamma}$ folgen aus der Rekursionsbedingung (73) und können gemäß Anhang B berechnet werden. Hierfür benötigt man die Werte der Funktion $Z(r)$ und deren Ableitung $Z'(r) = \frac{dZ(r)}{dr}$ an der Stelle $r = A$.

Nachstehend soll das Vorgehen für die numerische Bestimmung der komplexen Nullstellen der Ausdrücke (74) beschrieben werden.

Ziel ist es zunächst, die Schrödinger-ähnliche Gleichung (66), ausgehend vom Mittelpunkt des Sterns bis hin zu $r = A$, zu integrieren. Dafür wird (66) auf ein

⁸Während der zweite Kettenbruch des Ausdrucks endlich ist, muss bei der Berechnung des ersten darauf geachtet werden, dass die Abbruchbedingung so gewählt wird, dass dieser konvergiert.

System von Differentialgleichungen erster Ordnung transformiert. Diese Gleichungen wiederum werden in Real- und Imaginärteil zerlegt.

Da die Schrödinger-ähnliche Gleichung eine Singularität bei $r = 0$ aufweist, muss man die Startwerte für $Z(r)$ und $Z'(r)$ aus einer Entwicklung der Funktion für kleine r bestimmen.

$$Z(r) = r^{l+1} + \frac{1}{2(2l+3)}((l+2)\left[\frac{1}{3}(2l-1)\varepsilon(r) - p(r)\right] - \omega^2)r^{l+3} + \dots \quad (75)$$

Diese wurde [14] entnommen.

Entsprechend dem Vorgehen in Kapitel 3.1 wird die Integration aller benötigten Gleichungen⁹ unter Verwendung von (69) bis zum Rand des Sterns durchgeführt. Die Werte der Funktionen an der Stelle $r = R$ dienen als Startwerte für die Integration außerhalb des Sterns unter Verwendung von (67) bis zur Stelle $r = A$.

Anschließend können die Ausdrücke für die Kettenbruchfunktionen (74) aufgestellt und die gemeinsamen Nullstellen bestimmt werden.

Hierbei ist zu beachten, dass es sich um eine zweidimensionale Nullstellensuche handelt, da ω komplexwertig ist. Auch $f(\omega)$ ist eine komplexe Funktion, weshalb die Nullstellensuche für Real- und Imaginärteil separat durchgeführt werden muss. Theoretisch müssen die Eigenfrequenzen ω gemeinsame Nullstellen aller n Ausdrücke (74) sein. Es zeigt sich jedoch, dass es ausreicht die ersten vier Gleichungen ($n = 0, 1, 2, 3$) zu überprüfen.

Um die Abhängigkeit zwischen der Kompaktheit $\frac{M}{R}$ von Sternen bei vorgegebener Zustandsgleichung und den möglichen Frequenzen und Dämpfungszeiten der Schwingungszustände zu untersuchen, wird das beschriebene Vorgehen mit Vorgabe unterschiedlicher Zentraldrücke, für die stabile Sternkonfigurationen bestehen, durchgeführt.

4.4 Ergebnisse

Der beschriebene Formalismus zur Bestimmung der axialen w -Moden soll im ersten Schritt mit den vorliegenden Ergebnissen aus [15] überprüft werden.

Hier finden sich neben den Masse-Radius-Beziehungen von Neutronensternen, mit unterschiedlichen Zustandsgleichungen, die numerischen Ergebnisse für Frequenz und Dämpfungszeit der ersten axialen w -Mode. Eine Einteilung in w^I - und w^{III} -Moden wird hier nicht vorgenommen. Da keine der verwendeten Zustandsgleichungen auf stabile Sternkonfigurationen mit $R \leq 3M$ führt, ist das Auftreten von w^{II} -Moden ausgeschlossen. Es ist zu vermuten, dass es sich bei den angegebenen Lösungen um die gefundenen Werte mit den niedrigsten Frequenzen handelt.

Für den Vergleich wurde die in Kapitel 3.2.4 eingeführte Zustandsgleichung PA

⁹An dieser Stelle ist zu beachten, dass zur Lösung der TOV-Gleichungen bisher natürliche Einheiten verwendet wurden. Deshalb müssen alle Gleichungen, die in diesem Kapitel eingeführt wurden, modifiziert werden. Lediglich die Berechnung von Gleichung (74) sollte intern in geometrischen Einheiten durchgeführt werden.

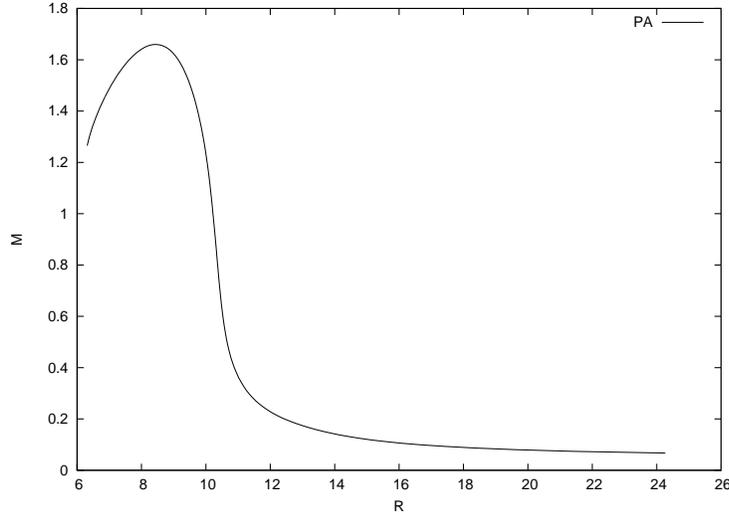


Abbildung 5: Masse-Radius-Beziehung der Zustandsgleichung PA. M ist in Einheiten der Sonnenmasse angegeben, während R in km aufgetragen ist.

verwendet, die in der angegebenen Literatur mit A bezeichnet wird.

Anhand von Abbildung 5 wird deutlich, dass die Masse-Radius-Beziehung und somit die Lösung der TOV-Gleichungen korrekt reproduziert werden.

Durch Variation der Startwerte für die im vorherigen Abschnitt erläuterte Nullstellensuche, konnten mehrere Lösungen für Frequenz und Dämpfungszeit der axialen w -Moden gefunden werden. Diese stimmen jedoch nicht mit den in [15] angegebenen Ergebnissen überein.

Abbildung 6 zeigt die Frequenz ν der gefundenen Lösungen in Abhängigkeit von der Kompaktheit, der stabilen Sternkonfigurationen. Die gestrichelte Linie repräsentiert die in der Literatur angegebene Lösung. Die gefundenen Werte liegen qualitativ in der erwarteten Größenordnung weichen jedoch von den Literaturwerten ab. Vor allem die Lösungen mit den niedrigsten Frequenzen sind auffällig, da diese erst ab einer Grenzkompaktheit von $\frac{M}{R} \approx 0.25$ auftreten. Dieses Verhalten ist für die verwendete Zustandsgleichung nicht zu erwarten, da nach Kapitel 4.1 lediglich das Auftreten von w^{II} -Moden von der Kompaktheit des Sterns abhängt. Wie bereits erwähnt sind die Voraussetzungen für das Auftreten dieser Schwingungszustände für die Zustandsgleichung PA nicht erfüllt. Auch die Werte der Dämpfungszeit weichen von den Werten aus [15] ab. Dies ist in Abbildung 7 veranschaulicht. Vor allem das erwartete Verhalten der Dämpfungszeit bei steigender Kompaktheit des Sterns ist nicht zu erkennen.

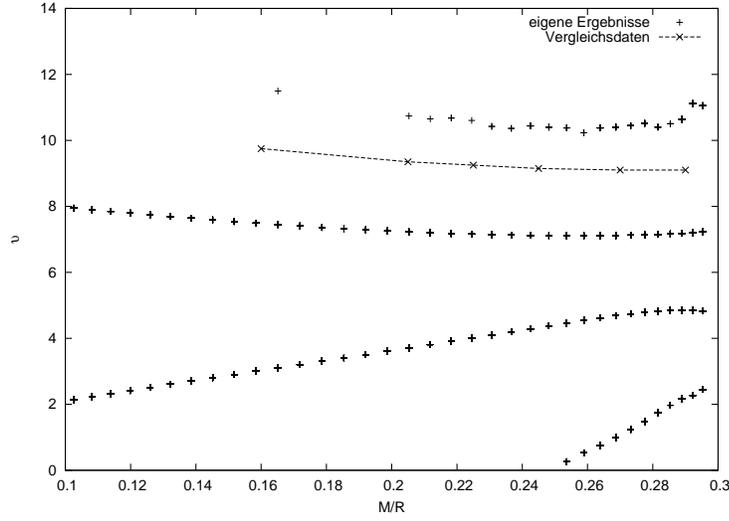


Abbildung 6: Aufgetragen sind die Frequenzen der axialen w -Moden in kHz , über der dimensionslosen Kompaktheit, der stabilen Sternkonfigurationen, denen die Zustandsgleichung PA zugrunde liegt. Die gestrichelte Linie repräsentiert die Ergebnisse aus [15].

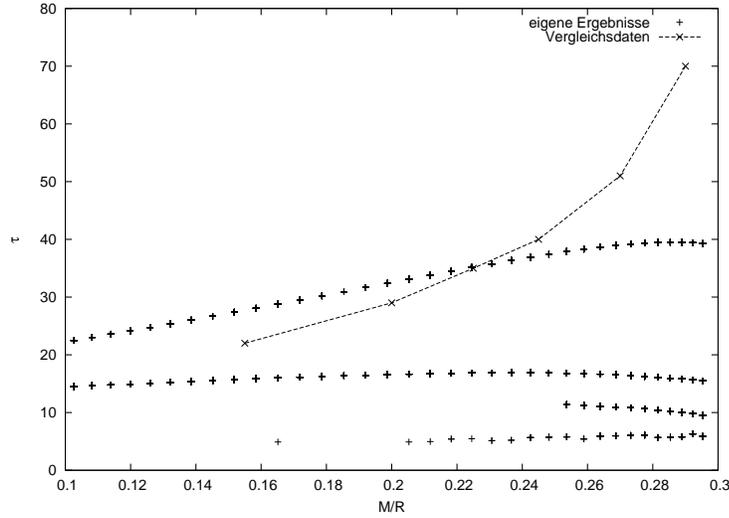


Abbildung 7: Aufgetragen sind die Dämpfungszeiten der axialen w -Moden in μs , über der dimensionslosen Kompaktheit, der stabilen Sternkonfigurationen, denen die Zustandsgleichung PA zugrunde liegt. Die gestrichelte Linie repräsentiert die Ergebnisse aus [15].

In [16] werden die Eigenfrequenzen der Schwingungen nichtrotierender schwarzer Löcher (Schwarzschild-Typ) unter Verwendung der Kettenbruchmethode bestimmt. Im Gegensatz zu der Behandlung von Neutronensternen ist es im Fall von schwarzen Löchern nicht notwendig, eine Differentialgleichung der Form (66) zu lösen, um die Kettenbruchbedingung (74) aufzustellen. Die Funktionen $\hat{\alpha}_n$, $\hat{\beta}_n$ und $\hat{\gamma}_n$ welche zur Berechnung der Ausdrücke (74) benötigt werden und sich aus der Rekursionsbedingung (73) für den Fall schwarzer Löcher ergeben, sind gemäß Anhang C zu berechnen. In Abbildung 8 sind die ermittelten Lösungen für die Fälle $l = 2$ und $l = 3$ dargestellt. Die Werte stimmen mit den Ergebnissen aus [16] überein. Da für die Berechnung geometrische Einheiten verwendet wurden, sind die Werte für ω_r und ω_i dimensionslos. Durch die Reproduktion der Literaturwerte kann gefolgert werden, dass die numerischen Verfahren zum Aufstellen der Gleichungen (74) sowie der mehrdimensionalen Nullstellensuche nicht fehlerbehaftet sind.

Um den Fehler weiter einzugrenzen, ist ein detaillierteres Verständnis der Lösungsmethode für Neutronensterne, die in den Kapiteln 4.2 und 4.3 skizziert wurde, notwendig. Dieses zu erlangen war auf Grund des vorgegebenen zeitlichen Rahmens der vorliegenden Arbeit nicht möglich, so dass eine Diskussion des Zusammenhangs zwischen der Temperatur und den Schwingungszuständen von Quarksternen an dieser Stelle nicht erfolgen kann.

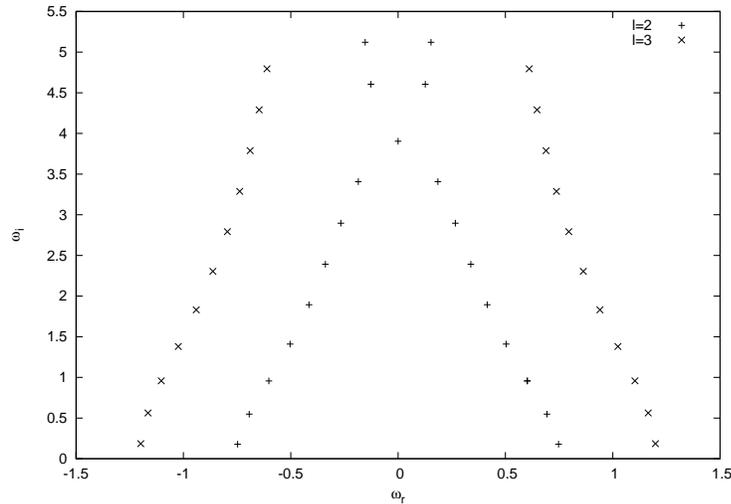


Abbildung 8: Aufgetragen sind Real- und Imaginärteil der komplexen Eigenfrequenzen nichtrotierender schwarzer Löcher für die Fälle $l = 2$ und $l = 3$.

5 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurden die Masse-Radius-Beziehungen der stabilen Sternkonfigurationen von Neutronensternen, bestehend aus Strange-Quarkmaterie, untersucht. Dafür wurden die TOV-Gleichungen, die aus der Lösung der Einsteinschen Feldgleichung für eine statische, kugelsymmetrische Masseverteilung resultieren, gelöst. Die hierfür benötigten Zustandsgleichungen wurden im Rahmen des Bag-Modells konstruiert.

Von besonderem Interesse war die Temperaturabhängigkeit der Masse-Radius-Beziehungen. Die Berechnungen führen zu dem Ergebnis, dass Masse und Radius der Quarksterne bei steigender Temperatur anwachsen. Dieser Effekt ist jedoch vor allem für alte Sterne, die auf Grund der Emission von Neutrinos sehr niedrige Temperaturen aufweisen, gering.

Abschließend wurde ein Einblick in die Thematik der Schwingungszustände von Neutronensternen gegeben. Dabei stand eine Familie von Schwingungsmoden im Vordergrund, die sich durch eine besonders schnelle Dämpfung auszeichnet und somit von einer vergleichsmäßig starken Gravitationswellenemission begleitet ist. Ursache dieser axialen w -Moden ist vermutlich insbesondere die Entstehung des kompakten Objekts. Es kann daher vermutet werden, dass das Verhalten der Frequenzen und Dämpfungszeiten der Schwingungen und somit die Gravitationswellensignale eine stärkere Temperaturabhängigkeit aufweisen.

Für eine weitere Behandlung der Thematik sollten vor allem die verwendeten Zustandsgleichungen an die Vorstellung von Quarkphasen im Inneren von Neutronensternen angepasst werden. In dieser Arbeit wurden Sterne betrachtet, die lediglich aus Quarkmaterie bestehen. Eine weitaus realistischere Vorstellung ist das Auftreten eines Quark-Gluon-Plasmas im dichten inneren Kern des Sterns, der von einer hadronischen Phase umschlossen ist.

Ebenfalls könnte berücksichtigt werden, dass im Inneren des Sterns höhere Temperaturen herrschen als es nahe der Oberfläche der Fall ist. In dieser Arbeit wurde ein konstanter Wert der Temperatur im gesamten Sternvolumen vorausgesetzt. Speziell für die Behandlung junger, heißer Sterne sollte das chemische Potential der Neutrinos bei der Konstruktion der Zustandsgleichung mitberücksichtigt werden.

A Einheiten und Konstanten

In dieser Arbeit wurden für alle Berechnungen ausschließlich natürliche Einheiten ($\hbar = c = 1$) verwendet. Lediglich in Kapitel 4.3 wurde ein geometrisches Einheitensystem ($2M = G = c = 1$) eingeführt. Dies ist an der entsprechenden Textstelle explizit erwähnt.

Alle Konstanten, die nicht im Text aufgeführt werden, wurden [2] entnommen.

B Rekursionsbedingung der Kettenbruch-Methode

4-Term-Rekursionsbedingung

Für die Rekursionsbedingung, die sich aus der Darstellung (72) der Funktion $Z(r)$ ergibt, gilt:

$$\alpha_n a_{n+1} + \beta_n a_n + \gamma_n a_{n-1} + \delta_n a_{n-2} = 0 \quad \text{für } n \geq 2 \quad (76)$$

$$\alpha_n = \left(1 - \frac{1}{A}\right)n(n+1) \quad (77)$$

$$\beta_n = -2\left(i\omega A + n - \frac{3n}{2A}\right)n \quad (78)$$

$$\gamma_n = \left(1 - \frac{3}{A}\right)n(n-1) + \frac{3}{A} - l(l+1) \quad (79)$$

$$\delta_n = \frac{1}{A}(n-3)(n+1) \quad (80)$$

$$a_0 = \frac{Z(A)}{\chi(A)}, \quad a_1 = \frac{A}{\chi(A)} \left(\frac{dZ(r)}{dr} \Big|_{r=A} + \frac{i\omega A}{A-1} Z(A) \right) \quad (81)$$

Während (76) für Neutronensterne sowie schwarze Löcher gültig ist, resultieren (77) bis (81) aus der speziell für Neutronensterne geforderten Randbedingung (71).

3-Term-Rekursionsbedingung

Gleichung (76) lässt sich auf die folgende Form reduzieren:

$$\hat{\alpha}_n a_{n+1} + \hat{\beta}_n a_n + \hat{\gamma}_n a_{n-1} = 0 \quad \text{für } n \geq 2 \quad (82)$$

$$\begin{aligned} n=0: & \quad \hat{\alpha}_0 = -1 & \hat{\beta}_0 &= \frac{a_1}{a_0} \\ n=1: & \quad \hat{\alpha}_1 = \alpha_1 & \hat{\beta}_1 &= \beta_1 & \hat{\gamma}_1 &= \gamma_1 \\ n \geq 2: & \quad \hat{\alpha}_n = \alpha_n & \hat{\beta}_n &= \beta_n - \frac{\hat{\alpha}_{n-1}\delta_n}{\hat{\gamma}_{n-1}} & \hat{\gamma}_n &= \gamma_n - \frac{\hat{\beta}_{n-1}\delta_n}{\hat{\gamma}_{n-1}} \end{aligned} \quad (83)$$

Auch diese Darstellung ist für den Fall schwarzer Löcher gültig.

C Kettenbruchmethode für schwarze Löcher

Für die Behandlung schwarzer Löcher müssen die Eigenschaften der Funktion $Z(r)$, die in Kapitel 4.3 eingeführt wurde, abgewandelt werden. Wie im Fall von Neutronensternen soll sich die Wellenfunktion im Unendlichen rein auslaufend verhalten. Am Horizont des schwarzen Lochs wird zusätzlich die Randbedingung einer rein einlaufenden Welle gefordert. Nach E. W. Leaver [16] lassen sich die Koeffizienten der resultierenden Rekursionsbedingung (82), $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ und $\hat{\gamma}$, die für das Aufstellen der Kettenbrüche (74) benötigt werden, zu

$$\hat{\alpha}_n = n^2 + (2\rho + 2)n + 2\rho + 1 \quad (84)$$

$$\hat{\beta}_n = -(2n^2 + (8\rho + 2)n + 8\rho^2 + 4\rho + l(l + 1) - 3) \quad (85)$$

$$\hat{\gamma}_n = n^2 + 4\rho n + 4\rho^2 - 4 \quad (86)$$

$$\rho = -i\omega \quad (87)$$

bestimmen.

Literatur

- [1] N. K. Glendenning. *Compact Stars*. Springer, New York, 2000.
- [2] G. Musiol, J. Ranft, R. Reif, and D. Seeliger. *Kern- und Elementarteilchenphysik*. VCH, Weinheim, 1988.
- [3] P. Braun-Munzinger and J. Wambach. Extreme Materie. *Physik Journal*, Oktober 2006.
- [4] A. Müller. Lexikon der Astrophysik. <http://www.wissenschaft-online.de/astrowissen/lexdt.html> [Stand: 14.08.10].
- [5] J. Wambach. *Vorlesungsskriptum: Allgemeine Relativitätstheorie*.
- [6] J. Wambach. *Vorlesungsskriptum: Nukleare Astrophysik 2: kompakte Objekte*.
- [7] P. Büscher. *Bachelor-Thesis: Bag-model studies of strange and hybrid stars*.
- [8] V. R. Pandharipande. *Nuclear Physics*, A178:123–144, 1971.
- [9] G. Baym, C. Pethick, and P. Sutherland. *Astrophysical Journal*, 170:299–317, 1971.
- [10] K. D. Kokkotas and B. G. Schmidt. Quasi-normal modes of stars and black holes. Living Reviews <http://relativity.livingreviews.org/Articles/lrr-1999-2/> [Stand: 22.08.10], 1999.
- [11] S. Chandrasekhar. *The mathematical Theorie of black holes*. Oxford science publications, International series of monographs on physics, 1983.
- [12] V. Ferrari. *Vorlesungsskriptum: Compact Star Oszillation*.
- [13] D. H. Wen, B. A. Li, and P. G. Kastev. *Phys. Rev.*, C80:025801, 2009.
- [14] S. Chandrasekhar and V. Ferrari. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 432:247, 1991.
- [15] O. Benhar, E. Berti, and V. Ferrari. *MNRAS*, 310:797, 1999.
- [16] E. W. Leaver. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 402:285–298, 1985.
- [17] S. L. Shapiro and S. A. Teukolsky. *Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars*. WILEY-VC, Weinheim, 2004.

Danksagung

Vor allem möchte ich mich bei Professor Dr. Jochen Wambach und PD Dr. Michael Buballa dafür bedanken, dass sie mir die Möglichkeit gegeben haben, diese Arbeit unter ihrer Anleitung anzufertigen und sich stets Zeit für aufkommende Fragen und Probleme genommen haben.

Außerdem möchte ich mich bei der gesamten Theoriegruppe des IKP, aber vor allem bei Tobias, Christian, Daniil, Nenad und Hannes für die wirklich nette Arbeitsatmosphäre bedanken.

Mein ganz besonderer Dank geht an Klaus, der mir über den gesamten Zeitraum dieser Arbeit immer mit Rat (und vor allem Tat) zur Seite stand und von dem ich wirklich viel gelernt habe.

Zu guter Letzt möchte ich mich bei meiner Familie und meinem Freund Oli für die dauerhafte und liebevolle Unterstützung während meines Studiums bedanken.