

---

# Mesonen im Drei-Flavor-Nambu-Jona-Lasinio Modell

---

**Mesons in the Three-Flavor-Nambu-Jona-Lasinio Model**

Bachelor-Thesis von Michel Stillger aus Hadamar

Tag der Einreichung: 12. September 2018

1. Gutachten: Priv. Doz. Dr. Michael Buballa

2. Gutachten: Prof. Dr. Jens Braun



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

Fachbereich Physik  
Institut für Kernphysik  
Nuclei, Hadrons & Quarks group

Mesonen im Drei-Flavor-Nambu-Jona-Lasinio Modell  
Mesons in the Three-Flavor-Nambu-Jona-Lasinio Model

Vorgelegte Bachelor-Thesis von Michel Stillger aus Hadamar

1. Gutachten: Priv. Doz. Dr. Michael Buballa
2. Gutachten: Prof. Dr. Jens Braun

Tag der Einreichung: 12. September 2018

---

# Erklärung zur Bachelor-Thesis

Hiermit versichere ich, die vorliegende Bachelor-Thesis ohne Hilfe Dritter nur mit den angegebenen Quellen und Hilfsmitteln angefertigt zu haben. Alle Stellen, die aus Quellen entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht. Diese Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen.

Darmstadt, den 12. September 2018

---

(Michel Stillger)

---

---

## Kurzfassung

---

In dieser Arbeit werden Mesonen im Drei-Flavor-Nambu-Jona-Lasinio Modell (NJL Modell) untersucht. Durch Anpassen der freien Parameter des NJL Modells an die Massen und Zerfallskonstanten der pseudoskalaren Mesonen (Pionen, Kaonen,  $\eta$ - und  $\eta'$ -Meson) können die Konstituentenquarkmassen des up-, down- und strange-Quarks berechnet werden. Bei der Berechnung auftretende divergente Integrale werden mit Pauli-Villars-Regularisierung behandelt, da diese im Gegensatz zu anderen Verfahren die Lorentz Invarianz erhält. Da es sich bei dem NJL Modell um eine nicht renormierbare Quantenfeldtheorie handelt, verbleibt eine Abhängigkeit vom Regularisierungsparameter.

---

## Abstract

---

In this thesis mesons in the Three-Flavor-Nambu-Jona-Lasinio model (NJL model) are studied. The free parameters of the NJL model are fitted to masses and decay constants of pseudoscalar mesons (pion, kaon,  $\eta$ - and  $\eta'$ -meson), so it is possible to compute the constituent quark mass of the up-, down- and strange-quark. Upcoming divergent integrals are regularized with Pauli-Villars-Regularization because it preserves Lorentz invariance in contrast to some other regularization techniques. Since the NJL model is a not renormalizable quantum field theory, a dependence of the regularization parameter remains.

---

---

## Inhaltsverzeichnis

---

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Lagrange-Dichte des NJL Modells</b>	<b>5</b>
2.1	Vier-Punkt-Wechselwirkung . . . . .	5
2.2	Determinanten-Wechselwirkung . . . . .	5
2.3	Symmetrien der Lagrange-Dichte . . . . .	6
2.4	Zwei-Flavor-Modell . . . . .	6
2.5	Drei-Flavor-Modell . . . . .	7
2.6	Übergang zu physikalischen Generatoren . . . . .	8
2.6.1	Zwei-Flavor-Modell . . . . .	8
2.6.2	Drei-Flavor-Modell . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Konstituentenquarkmasse</b>	<b>10</b>
3.1	Zwei-Flavor-Modell . . . . .	10
3.2	Drei-Flavor-Modell . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Pauli-Villars-Regularisierung</b>	<b>14</b>
<b>5</b>	<b>Pseudoskalare Mesonen</b>	<b>15</b>
5.1	Zwei-Flavor-Modell . . . . .	15
5.1.1	Masse der Pionen . . . . .	16
5.1.2	Zerfallskonstante der Pionen . . . . .	16
5.1.3	Parametersätze zur Bestimmung der Quarkmassen . . . . .	17
5.2	Drei-Flavor-Modell . . . . .	18
5.2.1	Massen der Pionen und Kaonen . . . . .	19
5.2.2	Zerfallskonstante der Pionen . . . . .	20
5.2.3	Masse des $\eta$ - und $\eta'$ -Meson . . . . .	20
5.2.4	Anpassung der freien Parameter . . . . .	22
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>25</b>
	<b>Anhang</b>	<b>27</b>
<b>A</b>	<b>Konventionen</b>	<b>27</b>
<b>B</b>	<b>Polarisationsschleifen</b>	<b>29</b>
B.1	Polarisationsschleife der Pionen . . . . .	29
B.2	Polarisationsschleife der Kaonen . . . . .	30
B.3	Polarisationsschleifen der Eta-Mesonen . . . . .	31
<b>C</b>	<b>Zerfallskonstante der Pionen</b>	<b>32</b>
<b>D</b>	<b>Integrale</b>	<b>33</b>
D.1	Integral $I_1$ . . . . .	33
D.2	Integrale $I_2$ und $I_3$ . . . . .	34
D.3	Ableitungen der Integrale $I_2$ und $I_3$ . . . . .	37
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>38</b>

---

## 1 Einleitung

---

Die allgemein anerkannte Theorie zur Beschreibung der starken Wechselwirkung ist die Quantenchromodynamik (QCD), sie beschreibt die Wechselwirkung von Quarks (Bausteine der Nukleonen) durch Austausch von Gluonen. Bei der QCD handelt es sich um eine nicht-abelsche Eichtheorie mit Symmetriegruppe  $SU(3)$ , der zugehörige Freiheitsgrad wird als Farbe bezeichnet [1]. Quarks sind Spin- $\frac{1}{2}$  Fermionen mit Farbladung rot, grün oder blau (Antiteilchen tragen Anti-Farbe anti-rot, anti-grün oder anti-blau) und Flavor up, down, strange, charm, bottom oder top, die acht verschiedene Gluonen (Eichbosonen der  $SU(3)$  Symmetrie) austauschen können.

Die QCD enthält zwei zur Beschreibung der Quark-Quark-Wechselwirkung wesentliche Konzepte, das sogenannte Confinement und die asymptotische Freiheit. Als Confinement wird bezeichnet, dass in der Natur nur farblose Teilchen beobachtet werden, d.h. entweder Mesonen (Quark-Antiquark-Zustände mit Farbe und Anti-Farbe) oder Baryonen (Drei-Quark-Zustände mit allen drei Farben bzw. Anti-Farben). Als asymptotische Freiheit wird die Beobachtung bezeichnet, dass mit steigender Energie die Quark-Quark-Kopplung immer schwächer wird. Für sehr große Energien verhalten sich Quarks asymptotisch frei, in diesen Bereichen kann Störungstheorie betrieben werden.

Im Gegensatz zur Quantenelektrodynamik (QED) tragen die Austauschteilchen der QCD ebenfalls Farbladungen (das Photon besitzt keine Ladung), wodurch diese untereinander wechselwirken. Diese Wechselwirkungen macht die QCD deutlich komplizierter als die QED, deshalb werden oft effektive Modelle wie das MIT Bag Modell [2] oder das in dieser Arbeit untersuchte Nambu-Jona-Lasinio Modell (NJL Modell) verwendet.

Das NJL Modell verzichtet komplett auf die Beschreibung durch Austauschteilchen (keine Gluonen), außerdem wird sich in dieser Arbeit auf die drei leichtesten Quark-Flavor (up, down und strange) beschränkt. Ursprünglich wurde das NJL Modell von Nambu und Jona-Lasinio zur Beschreibung der Wechselwirkung zwischen Nukleonen entwickelt, es enthält daher kein Confinement [3, 4]. Erstaunlicherweise lassen sich Mesonen, verstanden als Resonanzen in der Quark-Antiquark-Streuung und beschrieben durch die Bethe-Salpeter-Gleichung, trotzdem gut beschreiben. Die Lagrange-Dichte des NJL Modell (Abschnitt 2) besitzt die gleichen globalen Symmetrien wie die QCD, daher können Goldstone-Bosonen, die aus deren spontanen Brechung resultieren, beschrieben und im Falle von expliziter Brechung durch endliche Stromquarkmassen auch deren Massen vorhergesagt werden. Bei diesen Berechnungen auftretende divergente Integrale werden in dieser Arbeit mit Pauli-Villars-Regularisierung behandelt, da diese im Gegensatz zu anderen Regularisierungsverfahren wie dem 3er Impuls-Cutoff die Lorentz Invarianz erhält. Auf Grund der fehlenden Renormierbarkeit des NJL Modells verbleibt eine Abhängigkeit vom Regularisierungsparameter, somit gehört dieser zu einem vollständigen Modell dazu.

In dieser Arbeit sollen die freien Parameter des Drei-Flavor-NJL Modells so angepasst werden, dass die Massen und Zerfallskonstanten der pseudoskalaren Mesonen mit bekannten Werten übereinstimmen. Zu den freien Parametern zählen die Stromquarkmassen des up-, down- und strange-Quarks sowie die Kopplungskonstanten der einzelnen Wechselwirkungsterme und der Regularisierungsparameter der Pauli-Villars-Regularisierung. Solche Parametersätze existieren bereits für andere Regularisierungsverfahren, jedoch nicht für die Pauli-Villars-Regularisierung. Diese Arbeit hat zum Ziel einen solchen Parametersatz zu erstellen. Mit diesem ist es möglich die Konstituentenquarkmassen, welche sich aus der Dyson-Gleichung in Hartree Approximation ergeben, zu berechnen.

Im Rahmen des NJL Modell lassen sich weitere Phänomene beschreiben, dazu zählen unter anderem die Streuung von Mesonen [5] und das Quark-Phasendiagramm [6]. Für diese tiefergehenden Phänomene ist die Kenntnis der freien Parameter des NJL Modells unabdingbar.

---

## 2 Lagrange-Dichte des NJL Modells

---

Die Lagrange-Dichte im NJL Modell (mit  $N_f \in \{2, 3\}$  Flavors und  $N_C = 3$  Farben) ist gegeben durch

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\partial - \underline{m})\Psi + \mathcal{L}_4 + \mathcal{L}_{\text{Det}} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_4 + \mathcal{L}_{\text{Det}}. \quad (2.1)$$

Dabei beschreibt  $\mathcal{L}_4$  eine Vier-Punkt-Wechselwirkung,  $\mathcal{L}_{\text{Det}}$  eine  $2N_f$ -Punkt-Wechselwirkung der Quarkfelder  $\Psi = (\Psi_1, \dots, \Psi_{N_f})^T$  und die Matrix  $\underline{m} = \text{diag}_f(m_1, \dots, m_{N_f})$  die Strommassen der Quarkfelder. Hierbei wird gefordert, dass die Lagrange-Dichte die gleichen globalen Symmetrien  $U(1)_V \times SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R \times SU(N_C)_C$  wie die Lagrange-Dichte der QCD hat. Prinzipiell können noch weitere Wechselwirkungen (z.B. Acht-Punkt-Wechselwirkung im drei Flavor Fall) hinzugefügt werden, allerdings sind diese beiden Wechselwirkungen ausreichend, um die geforderten Symmetrien im Zwei- und Drei-Flavor-Fall zu erfüllen.

---

### 2.1 Vier-Punkt-Wechselwirkung

---

Die in dieser Arbeit verwendete und mit den Symmetrien verträgliche Vier-Punkt-Wechselwirkung hat folgende Form

$$\mathcal{L}_4 = \sum_{M,a} G_a^M (\bar{\Psi} \Gamma^M \tau_a \Psi)^2 = G \sum_a [(\bar{\Psi} \tau_a \Psi)^2 + (\bar{\Psi} i\gamma^5 \tau_a \Psi)^2], \quad (2.2)$$

wobei die  $\tau_a$  die Generatoren der  $SU(N_f)$  Gruppe sind (siehe Anhang A), der Term  $a = 0$  proportional zur Identität im Flavor-Raum ist und die  $\Gamma^M$  im Dirac- und Farb-Raum wirken [7]. Es werden zwei Kanäle  $M$  unterschieden:

#### 1. Skalare Wechselwirkung

Die skalare Wechselwirkung wird mit  $S$  bezeichnet, für deren Kopplungskonstante gilt  $G_a^S = G$  für alle  $a$  und für die Matrizen gilt

$$\Gamma^S \tau_a = \mathbb{1}_{\text{Dirac}} \otimes \mathbb{1}_{\text{Color}} \otimes \tau_a. \quad (2.3)$$

#### 2. Pseudoskalare Wechselwirkung

Die pseudoskalare Wechselwirkung wird mit  $P$  bezeichnet, für deren Kopplungskonstante gilt ebenfalls  $G_a^P = G$  für alle  $a$  und für die Matrizen gilt

$$\Gamma^P \tau_a = i\gamma^5 \otimes \mathbb{1}_{\text{Color}} \otimes \tau_a. \quad (2.4)$$

In dieser Arbeit soll sich auf diese zwei Kanäle beschränkt werden, aber prinzipiell können noch weitere Terme (vektorielle Wechselwirkung, pseudovektorielle Wechselwirkung, ...) der Vier-Punkt-Wechselwirkung hinzugefügt werden, eine ausführlichere Diskussion findet sich in [7].

Der Teil  $\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_4$  der Lagrange-Dichte ist - wie gefordert - invariant unter  $U(1)_V \times SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R$  Transformationen. Außerdem ist er invariant unter  $U(1)_A$ -Transformationen.

---

### 2.2 Determinanten-Wechselwirkung

---

Die Lagrange-Dichte  $\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_4$  besitzt eine  $U(1)_A$  Invarianz, die in der QCD durch Instanton Effekte gebrochen ist [8]. Deshalb wird eine  $2N_f$ -Wechselwirkung zur Lagrange-Dichte hinzugefügt, welche die  $U(1)_A$  Symmetrie bricht dabei aber die restlichen Symmetrien erhält. Dies gelingt durch eine 't Hooft Determinante

$$\mathcal{L}_{\text{Det}} = -K [\det_f(\bar{\Psi} \Gamma^+ \Psi) + \det_f(\bar{\Psi} \Gamma^- \Psi)], \quad (2.5)$$

dabei ist  $\Gamma^\pm := \mathbb{1} \pm \gamma^5$  und die Determinante nur im Flavor-Raum auszuführen (Index  $f$ ).

## 2.3 Symmetrien der Lagrange-Dichte

Die Lagrange-Dichte des NJL Modells (und der QCD) besitzt folgende globale Symmetrien  $U(1)_V \times SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R$ . Die zugehörigen Transformationen sind:

### 1. Chirale Symmetrie $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R$

Es werden links- und rechtshändiges Quarkfeld  $\Psi_{R/L} = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma^5)\Psi$  separat transformiert

$$\begin{aligned}\Psi_R &\rightarrow \exp\left(-i \sum_a \Theta_a^R \tau_a\right) \Psi_R \\ \Psi_L &\rightarrow \exp\left(-i \sum_a \Theta_a^L \tau_a\right) \Psi_L.\end{aligned}\tag{2.6}$$

### 2. Phaseninvarianz $U(1)_V$

$$\Psi \rightarrow \exp(-i\alpha) \Psi\tag{2.7}$$

Die Lagrange-Dichte ist nur im chiralen Limes ( $m_i = 0$ ) invariant unter der chiralen Symmetrie. Aber selbst dann wird diese durch das Quark-Kondensat (siehe Abschnitt 3) zu einer  $SU(N_f)_V$  Symmetrie spontan gebrochen, die zugehörigen Goldstone-Bosonen sind z.B. im Zwei-Flavor-Fall die drei Pionen. Im Fall von endlichen Stromquarkmassen ( $m_i > 0$ ) wird die chirale Symmetrie explizit gebrochen, die Lagrange-Dichte ist aber im Fall von gleichen Stromquarkmassen invariant unter  $SU(N_f)_V$ -Transformationen

$$\Psi \rightarrow \exp\left(-i \sum_a \Theta_a \tau_a\right) \Psi.\tag{2.8}$$

Diese explizite Brechung hat zur Folge, dass die Goldstone-Bosonen eine endliche Masse erhalten.

Eine Folge der Invarianz der Lagrange-Dichte unter diesen Transformationen ist, dass der skalare und der pseudoskalare Vier-Punkt-Wechselwirkungsterm die gleiche Kopplungskonstante besitzen müssen. Nur die Summe aus beiden Termen ist invariant.

## 2.4 Zwei-Flavor-Modell

Zunächst soll das Zwei-Flavor-System (up- und down-Quark) betrachtet werden, die chirale Symmetrie  $SU(2)_L \times SU(2)_R$  ist durch die endlichen Quarkmassen gebrochen. Da aber für die Massen  $m_u = m_d$  in guter Näherung gilt (Isospin Limes), ist die Lagrange-Dichte invariant unter  $SU(2)_V$ -Transformationen. Im chiralen Limes ist die Lagrange-Dichte ebenfalls invariant unter  $SU(2)_A$ -Transformationen.

Die Generatoren  $\tau_a$  der  $SU(2)$  Gruppe sind die Pauli-Matrizen (siehe Anhang A). Im Zwei-Flavor-Fall ergibt die Berechnung der 't Hooft Determinante ebenfalls eine Vier-Punkt-Wechselwirkung, für diese gilt

$$\begin{aligned}&\det_f(\bar{\Psi} \Gamma^+ \Psi) + \det_f(\bar{\Psi} \Gamma^- \Psi) \\ &= \frac{1}{2} [(\bar{\Psi}\Psi)^2 - (\bar{\Psi}\vec{\tau}\Psi)^2 - (\bar{\Psi}i\gamma^5\Psi)^2 + (\bar{\Psi}i\gamma^5\vec{\tau}\Psi)^2].\end{aligned}\tag{2.9}$$

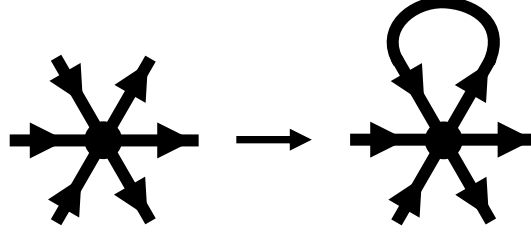
Für die spezielle Wahl  $K = -2G$  ergibt sich die historische Lagrange-Dichte von Nambu und Jona-Lasinio [4]

$$\mathcal{L}_{\text{Hist}} = \bar{\Psi}(i\vec{d} - \underline{m})\Psi + 2G [(\bar{\Psi}\Psi)^2 + (\bar{\Psi}i\gamma^5\vec{\tau}\Psi)^2].\tag{2.10}$$

In dieser Arbeit wird jedoch die Wahl  $K = 0$  für das Zwei-Flavor-Modell getroffen, damit die Vier-Punkt-Wechselwirkung die gleiche Form wie später im Drei-Flavor-Modell hat, es gilt somit für die Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\vec{d} - \underline{m})\Psi + G \sum_{a=0}^3 [(\bar{\Psi}\tau_a\Psi)^2 + (\bar{\Psi}\tau_a i\gamma^5\Psi)^2].\tag{2.11}$$





**Abbildung 1:** Reduzierung der Sechs-Punkt-Wechselwirkung auf eine effektive Vier-Punkt-Wechselwirkung durch Schließen einer Schleife.

## 2.5 Drei-Flavor-Modell

Nun soll das für diese Arbeit relevante Drei-Flavor-System (up-, down- und strange-Quark) betrachtet werden, auch hier ist die chirale Symmetrie  $SU(3)_L \times SU(3)_R$  durch die endlichen Quarkmassen gebrochen. Da für die Massen  $m_u \approx m_d \ll m_s$  gilt, ist auch die Symmetrie  $SU(3)_V$  gebrochen. Im chiralen Limes ist die Lagrange-Dichte invariant unter  $SU(3)_V \times SU(3)_A$ -Transformationen.

Im Drei-Flavor-Fall wird der volle Lagrangian aus Gleichung (2.1) verwendet, die Generatoren  $\tau_\alpha$  der  $SU(3)$  Gruppe sind die Gell-Mann-Matrizen, sie werden üblicherweise mit  $\lambda_\alpha$  bezeichnet (siehe Anhang A). Die Determinanten-Wechselwirkung entspricht im Drei-Flavor-Fall einer Sechspunkt-Wechselwirkung, sie wird daher im Folgenden mit  $\mathcal{L}_6$  bezeichnet. Außerdem wird durch  $\mathcal{L}_6$  die  $U(1)_A$  Symmetrie gebrochen und somit hat die Lagrange-Dichte des NJL Modells die gleichen globalen Symmetrien wie die QCD.

Die 't Hooft Determinante kann im Drei-Flavor-Fall mit Hilfe des Levi-Civita-Symbols berechnet werden

$$\begin{aligned} & \det_f(\bar{\Psi} \Gamma^+ \Psi) + \det_f(\bar{\Psi} \Gamma^- \Psi) \\ &= \frac{1}{6} \epsilon^{abc} \epsilon^{def} [(\bar{\Psi}_a \Gamma^+ \Psi_d)(\bar{\Psi}_b \Gamma^+ \Psi_e)(\bar{\Psi}_c \Gamma^+ \Psi_f) + (\bar{\Psi}_a \Gamma^- \Psi_d)(\bar{\Psi}_b \Gamma^- \Psi_e)(\bar{\Psi}_c \Gamma^- \Psi_f)], \end{aligned} \quad (2.12)$$

wobei über  $a, \dots, f \in \{1, 2, 3\}$  summiert wird [9]. Damit ergibt sich  $\mathcal{L}_6$  im Drei-Flavor-Fall zu

$$\mathcal{L}_6 = -\frac{K}{6} \epsilon^{abc} \epsilon^{def} [(\bar{\Psi}_a \Gamma^+ \Psi_d)(\bar{\Psi}_b \Gamma^+ \Psi_e)(\bar{\Psi}_c \Gamma^+ \Psi_f) + (\bar{\Psi}_a \Gamma^- \Psi_d)(\bar{\Psi}_b \Gamma^- \Psi_e)(\bar{\Psi}_c \Gamma^- \Psi_f)]. \quad (2.13)$$

Und damit gilt für die Lagrange-Dichte

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\Psi}(i\cancel{\partial} - \underline{m})\Psi + G \sum_{a=0}^8 [(\bar{\Psi}\lambda_a\Psi)^2 + (\bar{\Psi}\lambda_a i\gamma^5\Psi)^2] \\ & - \frac{K}{6} \epsilon^{abc} \epsilon^{def} [(\bar{\Psi}_a \Gamma^+ \Psi_d)(\bar{\Psi}_b \Gamma^+ \Psi_e)(\bar{\Psi}_c \Gamma^+ \Psi_f) + (\bar{\Psi}_a \Gamma^- \Psi_d)(\bar{\Psi}_b \Gamma^- \Psi_e)(\bar{\Psi}_c \Gamma^- \Psi_f)]. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Da Mesonen, die in dieser Arbeit untersucht werden sollen, im NJL Modell als Resonanzen in der Quark-Antiquark-Streuung zu verstehen sind, muss die Sechspunkt-Wechselwirkung auf eine effektive Vierpunkt-Wechselwirkung reduziert werden. Dies gelingt indem bei der Sechspunkt-Wechselwirkung eine Schleife geschlossen wird (Abbildung 1).

Nach den Feynman Regel muss u.a. für die geschlossene Schleife die Spur gebildet und über alle möglichen Vierer-Impulse des umlaufenden Quarks integriert werden. Dabei ergibt sich ein Zusammenhang mit dem sogenannten Quark-Kondensat

$$\langle \bar{\Psi}_f \Psi_f \rangle := -i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} Tr(S_f(p)), \quad (2.15)$$

wobei die Spur im Dirac- und Farb-Raum (Symbol  $Tr$ ) auszuführen ist und  $S_f(p)$  der Propagator des Konstituentenquarks mit Flavor  $f \in \{u, d, s\}$ , Vierer-Impuls  $p$  und Masse  $M_f$  ist (siehe Gleichung (3.3)). Es ergibt sich folgende Form der Lagrange-Dichte für die reduzierte Sechspunkt-Wechselwirkung in Hartree-Approximation (Terme der Ordnung  $\mathcal{O}(\frac{1}{N_C})$  werden vernachlässigt) [9]

$$\mathcal{L}_{6 \rightarrow 4} = -K \epsilon^{abc} \epsilon^{def} \langle \bar{\Psi}_a \Psi_a \rangle [(\bar{\Psi}_b \Psi_e)(\bar{\Psi}_c \Psi_f) + (\bar{\Psi}_b \gamma^5 \Psi_e)(\bar{\Psi}_c \gamma^5 \Psi_f)]. \quad (2.16)$$

Diese lässt sich nun durch das volle Quarkfeld  $\Psi$  und die Gell-Mann-Matrizen  $\lambda_a$  ausdrücken und hat dann eine ähnliche Struktur wie die Vier-Punkt-Wechselwirkung in Gleichung (2.2)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{6 \rightarrow 4} = & \frac{K}{6} \left[ -2 (\langle \bar{u}u \rangle + \langle \bar{d}d \rangle + \langle \bar{s}s \rangle) (\bar{\Psi} \lambda_0 \Psi)^2 + 3 \langle \bar{s}s \rangle ((\bar{\Psi} \lambda_1 \Psi)^2 + (\bar{\Psi} \lambda_2 \Psi)^2 + (\bar{\Psi} \lambda_3 \Psi)^2) \right. \\
& + 3 \langle \bar{d}d \rangle ((\bar{\Psi} \lambda_4 \Psi)^2 + (\bar{\Psi} \lambda_5 \Psi)^2) + 3 \langle \bar{u}u \rangle ((\bar{\Psi} \lambda_6 \Psi)^2 + (\bar{\Psi} \lambda_7 \Psi)^2) + (2 \langle \bar{u}u \rangle + 2 \langle \bar{d}d \rangle - \langle \bar{s}s \rangle) (\bar{\Psi} \lambda_8 \Psi)^2 \\
& + \sqrt{2} (\langle \bar{u}u \rangle + \langle \bar{d}d \rangle - 2 \langle \bar{s}s \rangle) (\bar{\Psi} \lambda_0 \Psi) (\bar{\Psi} \lambda_8 \Psi) + \sqrt{\frac{3}{2}} (2 \langle \bar{u}u \rangle - 2 \langle \bar{d}d \rangle) (\bar{\Psi} \lambda_0 \Psi) (\bar{\Psi} \lambda_3 \Psi) \\
& \left. + \sqrt{3} (2 \langle \bar{d}d \rangle - 2 \langle \bar{u}u \rangle) (\bar{\Psi} \lambda_3 \Psi) (\bar{\Psi} \lambda_8 \Psi) - (\lambda_a \rightarrow \lambda_a i \gamma^5) \right].
\end{aligned} \tag{2.17}$$

---

## 2.6 Übergang zu physikalischen Generatoren

---

### 2.6.1 Zwei-Flavor-Modell

---

Da Mesonen aus einem Quark-Antiquark-Paar bestehen, können diese durch einen Term der Form  $(\bar{\Psi} \Gamma^M \tau_a \Psi)$  beschrieben werden. Im Zwei-Flavor-Modell gilt für die in dieser Arbeit untersuchten pseudoskalaren Mesonen

$$\Gamma^M \tau_a = \begin{cases} i \gamma^5 \tau_1^\pm & \pi^\mp \\ i \gamma^5 \tau_3 & \pi^0 \end{cases}, \tag{2.18}$$

dabei bezeichnet  $\tau_1^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tau_1 \pm i \tau_2)$ . Das Meson, welches zu  $\tau_0$  gehört, wird zunächst nicht betrachtet, aber wird sich im Drei-Flavor-Modell als das  $\eta_0$  herausstellen. Die Vier-Punkt-Wechselwirkung aus Gleichung (2.2) kann im Zwei-Flavor-Modell nun mit Hilfe der Definitionen von  $\tau_1^\pm$  umgerechnet werden, es ergibt sich nach einer kurzen Rechnung

$$\mathcal{L}_4 = G [(\bar{\Psi} \tau_0 \Psi)^2 + (\bar{\Psi} \tau_0 i \gamma^5 \Psi)^2] + 2G [(\bar{\Psi} \tau_1^+ \Psi)(\bar{\Psi} \tau_1^- \Psi) + (\bar{\Psi} \tau_1^+ i \gamma^5 \Psi)(\bar{\Psi} \tau_1^- i \gamma^5 \Psi)] + G [(\bar{\Psi} \tau_3 \Psi)^2 + (\bar{\Psi} \tau_3 i \gamma^5 \Psi)^2].$$

Es wird ab jetzt die Menge  $\{\tau_a : a = 1^\pm, 3\}$  für die Generatoren der  $SU(2)$  Gruppe verwendet.  $\mathcal{L}_4$  kann allgemein wie folgt dargestellt werden

$$\mathcal{L}_4 = \sum_{M,a,b} G_{ab}^M (\bar{\Psi} \Gamma^M \tau_a \Psi) (\bar{\Psi} \Gamma^M \tau_b^\dagger \Psi), \tag{2.19}$$

dabei gilt für die symmetrische Kopplungskonstante  $G_{ab}^S = G_{ab}^P = G \delta_{ab}$ .

---

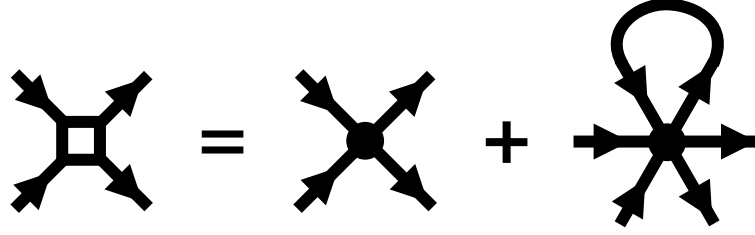
### 2.6.2 Drei-Flavor-Modell

---

Auch im Drei-Flavor-Modell können Mesonen durch einen Term der Form  $(\bar{\Psi} \Gamma^M \lambda_a \Psi)$  beschrieben werden. Es gilt dabei für die pseudoskalaren Mesonen

$$\Gamma^M \lambda_a = \begin{cases} i \gamma^5 \lambda_1^\pm & \pi^\mp \\ i \gamma^5 \lambda_3 & \pi^0 \\ i \gamma^5 \lambda_4^\pm & K^\mp \\ i \gamma^5 \lambda_6^\pm & \bar{K}^0 / K^0 \\ i \gamma^5 \lambda_0 & \eta_0 \\ i \gamma^5 \lambda_8 & \eta_8 \end{cases}, \tag{2.20}$$

dabei ist  $\lambda_1^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda_1 \pm i \lambda_2)$ ,  $\lambda_4^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda_4 \pm i \lambda_5)$  und  $\lambda_6^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda_6 \pm i \lambda_7)$ . Mit einer kurzen Rechnung kann auch hier gezeigt werden, dass für den relevanten Wechselwirkungsteil  $\mathcal{L}_{\text{int}} = \mathcal{L}_4 + \mathcal{L}_{6 \rightarrow 4}$  (zugehöriger Vertex in Abbildung 2) gilt



**Abbildung 2:** Relevante Wechselwirkung als Summe aus reiner Vier-Punkt-Wechselwirkung und effektiver Vier-Punkt-Wechselwirkung.

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \sum_{M,a,b} H_{ab}^M (\bar{\Psi} \Gamma^M \lambda_a \Psi) (\bar{\Psi} \Gamma^M \lambda_b^\dagger \Psi), \quad (2.21)$$

wobei für die Kopplungskonstante gilt

$$\begin{aligned} H_{ab}^S &= G \delta_{ab} + \frac{K}{6} c_{ab} \\ H_{ab}^P &= G \delta_{ab} - \frac{K}{6} c_{ab}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Die symmetrische Konstante  $c_{ab}$  kann aus Gleichung (2.17) abgelesen werden, es gilt

$$c_{ab} = \begin{cases} -2(\langle \bar{u}u \rangle + \langle \bar{d}d \rangle + \langle \bar{s}s \rangle) & a = b = 0 \\ 3 \langle \bar{s}s \rangle & a = b = 1^\pm; a = b = 3 \\ 3 \langle \bar{d}d \rangle & a = b = 4^\pm \\ 3 \langle \bar{u}u \rangle & a = b = 6^\pm \\ (2 \langle \bar{u}u \rangle + 2 \langle \bar{d}d \rangle - \langle \bar{s}s \rangle) & a = b = 8 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle \bar{u}u \rangle + \langle \bar{d}d \rangle - 2 \langle \bar{s}s \rangle) & a = 0, b = 8 \\ \sqrt{\frac{3}{2}} (\langle \bar{u}u \rangle - \langle \bar{d}d \rangle) & a = 0, b = 3 \\ \sqrt{3} (\langle \bar{d}d \rangle - \langle \bar{u}u \rangle) & a = 3, b = 8 \end{cases}. \quad (2.23)$$

Später werden alle Rechnungen im Isospin Limes durchgeführt werden, dann gilt wegen  $\langle \bar{u}u \rangle = \langle \bar{d}d \rangle$  auch  $c_{03} = c_{38} = 0$ . Im chiralen Limes gilt sogar  $\langle \bar{u}u \rangle = \langle \bar{s}s \rangle$  und deshalb auch  $c_{08} = 0$ .

Im Folgenden wird die Menge  $\{\lambda_a : a = 1^\pm, 3, 4^\pm, 6^\pm, 8\}$  für die Generatoren der  $SU(3)$  Gruppe verwendet.

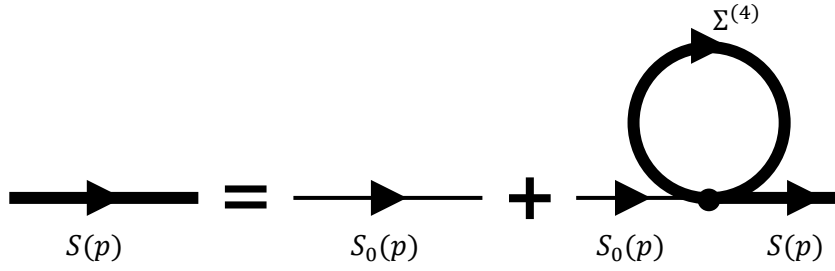


Abbildung 3: Dyson Gleichung im Zwei-Flavor-NJL Modell.

### 3 Konstituentenquarkmasse

Es wird angenommen, dass Nukleonen aus vielen Quarks bestehen, dabei aber nur drei Quarks - die sogenannten Konstituentenquarks - die wesentlichen Eigenschaften bestimmen: beim Proton zwei up- und ein down-Quark, beim Neutron ein up- und zwei down-Quarks. Da für die Massen der Nukleonen in guter Näherung  $m_p = m_N \approx 940\text{MeV}$  gilt, muss für die Massen der Konstituentenquarks  $M_u = M_d \approx 310\text{MeV}$  gelten. Der Vergleich von QCD Rechnungen und Experimenten liefert jedoch  $m_u \approx m_d < 10\text{MeV}$ , für die Masse asymptotisch freier Quarks - sogenannter Stromquarks. Diese sogenannte Mass Gap (in Anlehnung an die Energy Gap der BCS Theorie) kann durch die Dyson Gleichung in Hartree Approximation erklärt werden. Bei dieser Approximation handelt es sich um eine Mean-Field-Approximation (MFA).

#### 3.1 Zwei-Flavor-Modell

Im Zwei-Flavor-Modell kann die Dyson Gleichung wie in Abbildung 3 dargestellt werden. Unter Verwendung der Feynman Regeln kann diese für ein Quark mit Flavor  $f \in \{u, d\}$  wie folgt ausgewertet werden [5]

$$iS_f(p) = iS_{0,f}(p) + iS_{0,f}(p) (-i\Sigma_f^{(4)}) iS_f(p). \quad (3.1)$$

Dabei bezeichnet

$$S_{0,f}(p) = \frac{\not{p} + m_f}{p^2 - m_f^2 + i\epsilon} \quad (3.2)$$

den Propagator des Stromquarks mit Masse  $m_f$  und Vierer-Impuls  $p$  (folgt direkt aus dem  $\mathcal{L}_0$  Term der Lagrange-Dichte) und in Anlehnung dazu

$$S_f(p) = \frac{\not{p} + M_f}{p^2 - M_f^2 + i\epsilon} \quad (3.3)$$

den Propagator des Konstituentenquarks.  $\Sigma_f^{(4)}$  bezeichnet die Selbstenergie des Quarks, welche durch die Vier-Punkt-Wechselwirkung entsteht.

Das Multiplizieren von Gleichung (3.1) von links mit  $S_{0,f}^{-1}(p) = \not{p} - m_f$  und von rechts mit  $S_f^{-1}(p) = \not{p} - M_f$  ergibt

$$M_f = m_f + \Sigma_f^{(4)}. \quad (3.4)$$

Für die Selbstenergie der Vier-Punkt-Wechselwirkung liefert die Anwendung der Feynman-Regeln [9]

$$\Sigma_f^{(4)} = 2i \sum_{a,b} G_{ab}^S (\tau_a)_{ff} \sum_{g=1}^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (\tau_a^\dagger)_{gg} Tr[S_g(p)]. \quad (3.5)$$

Dabei ist die Spur nur im Dirac- und Color-Raum (Symbol  $Tr$ ) auszuführen. Es trägt lediglich der skalare Term von  $\mathcal{L}_4$  bei, da die Spur im Dirac-Raum über den pseudoskalaren Term verschwindet.

Die Selbstenergie ergibt sich mit Verwendung des Kondensats (Gleichung (2.15)) zu

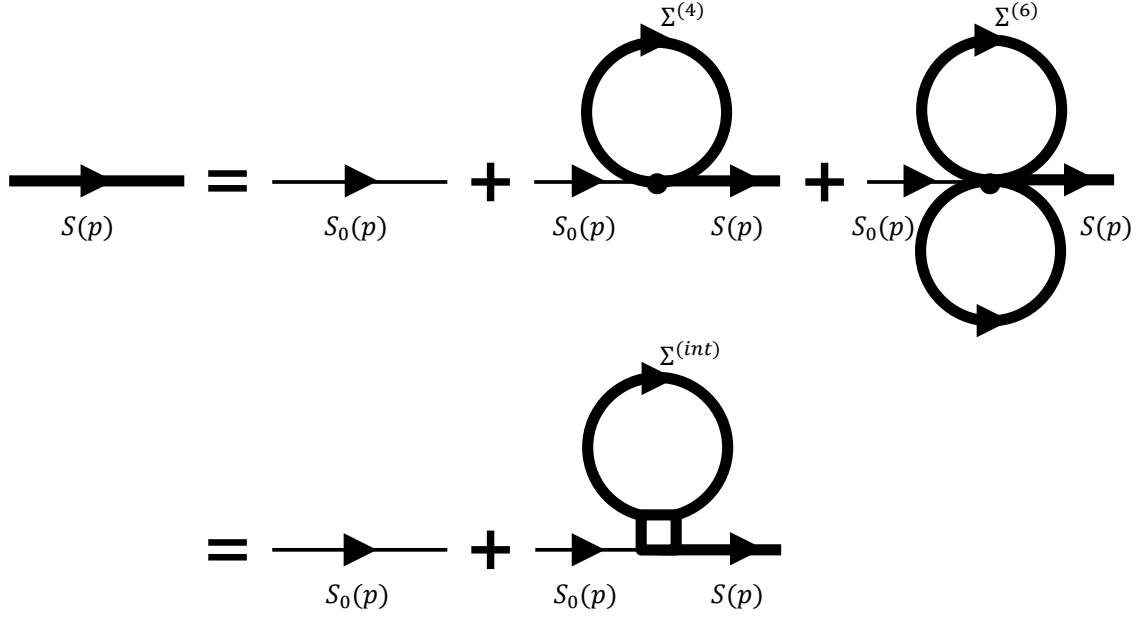


Abbildung 4: Dyson Gleichung im Drei-Flavor-NJL Modell.

$$\Sigma_f^{(4)} = -4G \langle \bar{\Psi}_f \Psi_f \rangle. \quad (3.6)$$

Damit gilt im Isospin-Limes ( $m \equiv m_u = m_d$  und damit  $M \equiv M_u = M_d$  sowie  $\langle \bar{u}u \rangle = \langle \bar{d}d \rangle$ ) für die Konstituentenquarkmasse

$$M = m - 4G \langle \bar{u}u \rangle. \quad (3.7)$$

Durch Einsetzen von Gleichung (3.3) kann das Kondensat weiter berechnet werden

$$\begin{aligned} \langle \bar{\Psi}_f \Psi_f \rangle &= -i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left( \frac{\not{p} + M_f}{p^2 - M_f^2 + i\epsilon} \right) \\ &= -4iN_C \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{M_f}{p^2 - M_f^2 + i\epsilon} \\ &= -4N_C M_f iI_1(M_f), \end{aligned} \quad (3.8)$$

wobei das Integral in  $I_1(M_f)$  zusammengefasst ist. Dieses wird in Abschnitt D.1 berechnet.

### 3.2 Drei-Flavor-Modell

Im Drei-Flavor-Modell kann die Dyson Gleichung wie in Abbildung 4 dargestellt werden. Unter Verwendung der Feynman Regeln kann diese für ein Quark mit Flavor  $f \in \{u, d, s\}$  wie folgt ausgewertet werden

$$\begin{aligned} iS_f(p) &= iS_{0,f}(p) + iS_{0,f}(p) (-i\Sigma_f^{(4)}) iS_f(p) + iS_{0,f}(p) (-i\Sigma_f^{(6)}) iS_f(p) \\ &= iS_{0,f}(p) + iS_{0,f}(p) (-i\Sigma_f^{(int)}) iS_f(p). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Im Gegensatz zum Zwei-Flavor-Modell trägt zusätzlich die Selbstenergie  $\Sigma_f^{(6)}$ , welche durch die Sechs-Punkt-Wechselwirkung entsteht, zur Konstituentenquarkmasse bei. Analoges Vorgehen zum Zwei-Flavor-Fall liefert

$$M_f = m_f + \Sigma_f^{(int)} = m_f + \Sigma_f^{(4)} + \Sigma_f^{(6)}. \quad (3.10)$$

Die Selbstenergie kann durch eine verallgemeinerte Version von Gleichung (3.5) berechnet werden

$$\Sigma_f^{(int)} = \Sigma_f^{(4)} + \Sigma_f^{(6)} = 2i \sum_{a,b} H_{ab}^S \Big|_{K=\frac{\kappa}{2}} (\lambda_a)_{ff} \sum_{g=1}^3 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (\lambda_b^\dagger)_{gg} \text{Tr} [S_g(p)]. \quad (3.11)$$

Dabei muss aber  $K \rightarrow \frac{\kappa}{2}$  ersetzt werden, damit es keine Rolle spielt welche Schleife zuerst geschlossen wird. Es ergibt sich ein gekoppeltes Gleichungssystem für die Konstituentenquarkmassen (Kondensate hängen von Konstituentenquarkmassen ab)

$$\begin{aligned} M_u &= m_u - 4G \langle \bar{u}u \rangle + 2K \langle \bar{d}d \rangle \langle \bar{s}s \rangle \\ M_d &= m_d - 4G \langle \bar{d}d \rangle + 2K \langle \bar{u}u \rangle \langle \bar{s}s \rangle \\ M_s &= m_s - 4G \langle \bar{s}s \rangle + 2K \langle \bar{u}u \rangle \langle \bar{d}d \rangle. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Im Isospin Limes ( $m \equiv m_u = m_d$  und damit  $M \equiv M_u = M_d$  sowie  $\langle \bar{u}u \rangle = \langle \bar{d}d \rangle$ ) vereinfacht sich das Gleichungssystem (3.12) zu

$$\begin{aligned} M &= m - (4G - 2K \langle \bar{s}s \rangle) \langle \bar{u}u \rangle \\ M_s &= m_s - 4G \langle \bar{s}s \rangle + 2K \langle \bar{u}u \rangle^2. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Die Gleichung zur Bestimmung der Konstituentenquarkmasse des up- und down-Quarks kann mit der effektiven Kopplungskonstante [10]

$$B := 4G - 2K \langle \bar{s}s \rangle \quad (3.14)$$

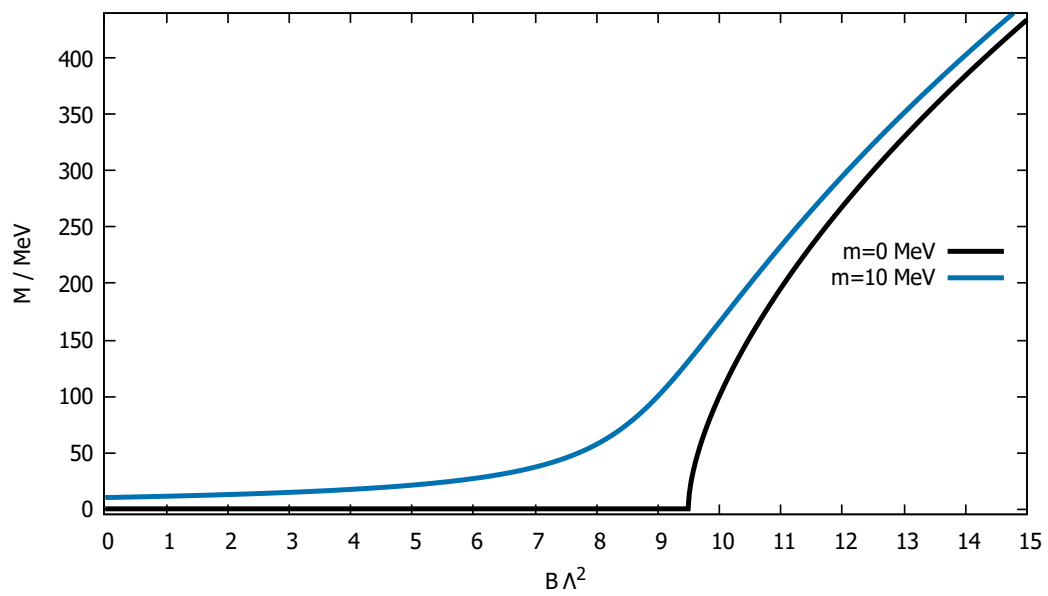
auf eine ähnliche Form wie im Zwei-Flavor-Fall gebracht werden

$$M = m - B \langle \bar{u}u \rangle. \quad (3.15)$$

In Abbildung 5 ist die Konstituentenquarkmasse in Abhängigkeit der Kopplungskonstante dargestellt. Es lässt sich erkennen, dass auch für verschwindende Stromquarkmasse ab einer gewissen kritischen Kopplung  $B_{crit}$  Konstituentenmasse generiert wird. Die kritische Kopplung ergibt sich bei zwei Regulatoren zu

$$\frac{1}{B_{crit}} = \lim_{M \rightarrow 0} -\frac{\langle \bar{u}u \rangle}{M} \stackrel{(3.8)}{=} \frac{N_C}{4\pi^2} \Lambda^2 \ln(4) \quad (3.16)$$

und damit gilt  $B_{crit} \Lambda^2 = 9.49$  (vgl. Abschnitt 4 Pauli-Villars-Regularisierung).



**Abbildung 5:** Abhängigkeit der Konstituentenquarkmasse  $M$  von der Kopplungskonstanten  $B$  bei  $\Lambda = 800$  MeV (bei zwei Regulatoren).

---

## 4 Pauli-Villars-Regularisierung

---

Bei der Berechnung des Quark-Kondensats (und damit bei der Berechnung der Selbstenergie) tritt das divergente Integral  $I_1$  auf

$$iI_1(M) = i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - M^2 + i\epsilon}.$$

In dieser Arbeit werden divergente Integrale mit der Pauli-Villars-Regularisierung regularisiert, dies funktioniert allgemein nach dem Prinzip [11]

$$iI_1(M) \longrightarrow \sum_j c_j iI_1(M_j), \quad (4.1)$$

wobei für die Koeffizienten  $c_j$  gilt

$$\sum_j c_j = 0 \quad (4.2)$$

$$\sum_j c_j M_j^2 = 0. \quad (4.3)$$

Da das Integral quadratisch divergent ist, werden mindestens zwei Regularisierungsterme ( $c_j \neq 0$  für  $j \in \{0, 1, 2\}$ ) benötigt. Mit dem Ansatz für die sogenannten Hilfsmassen

$$M_j^2 = M^2 + j\Lambda^2 \quad (4.4)$$

ergibt sich für die Koeffizienten

$$\begin{aligned} c_0 &= 1 \\ c_1 &= -2 \\ c_2 &= 1. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Bei anderen Anwendungen des NJL Modells (z.B. zur Berechnung des Quark-Phasendiagramms) treten divergente Integrale auf, bei denen mindestens drei Regularisierungsterme ( $c_j \neq 0$  für  $j \in \{0, 1, 2, 3\}$ ) verwendet werden müssen. In diesem Fall gilt bei gleichem Ansatz für die Hilfsmassen

$$\begin{aligned} c_0 &= 1 \\ c_1 &= -3 \\ c_2 &= 3 \\ c_3 &= -1. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Alle Integrale in dieser Arbeit werden aus Konsistenzgründen mit diesen Koeffizienten und Hilfsmassen regularisiert. Dies ist möglich, da das Integral  $I_1$  die stärkste Divergenz aufweist.



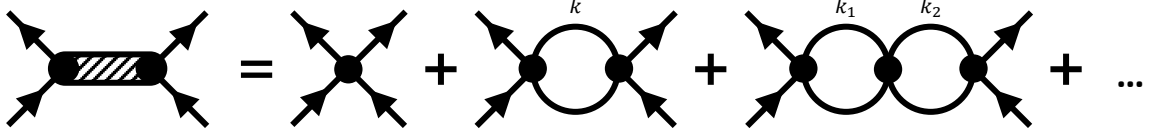


Abbildung 6: Bethe-Salpeter-Gleichung in RPA im Zwei-Flavor-Modell.

## 5 Pseudoskalare Mesonen

In der QCD lässt sich zwischen Mesonen und Baryonen bzw. Zwei-Quark- und Drei-Quark-Systemen unterscheiden, diese ergeben sich aus dem Confinement (System aus Quarks ist farbneutral). Im NJL Modell werden Mesonen durch Resonanzen in der Quark-Antiquark-Streuung beschrieben. Durch diesen Ansatz können beobachtete Mesonenmassen sowie Zerfallskonstanten theoretisch berechnet werden, obwohl das NJL Modell kein Confinement enthält. Es soll sich in dieser Arbeit auf pseudoskalare Mesonen beschränkt werden.

### 5.1 Zwei-Flavor-Modell

Zunächst soll nur ein Zwei-Flavor-System aus up- und down-Quark betrachtet werden. Wie in Abschnitt 3 bereits festgestellt, wird ab einer gewissen kritischen Kopplung auch bei verschwindender Stromquarkmasse (chiraler Limes) Konstituentenquarkmasse generiert, die Symmetrie  $SU(2)_A$  wird spontan gebrochen. Es existieren also drei masselose Goldstone-Bosonen, welche sich als die drei Pionen herausstellen werden.

Die Streuung eines Quark-Antiquark-Paares kann durch die Bethe-Salpeter-Gleichung beschrieben werden, diese ist in Random-Phase-Approximation (RPA) in Abbildung 6 dargestellt [5]. Bei der RPA handelt es sich wie bei der Hartree Approximation um eine MFA. Auswerten der Bethe-Salpeter-Gleichung liefert folgende Gleichung für die Streumatrix  $\mathcal{T}$

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{T}_{ab}^M &= \Gamma^M \tau_a (i2G_{ab}^M) \Gamma^M \tau_b^\dagger + \Gamma^M \tau_a (i2G_{ac}^M)(-i\Pi_{cd}^M)(i2G_{db}^M) \Gamma^M \tau_b^\dagger \\
 &+ \Gamma^M \tau_a (i2G_{ac}^M)(-i\Pi_{cd}^M)(i2G_{de}^M)(-i\Pi_{ef}^M)(i2G_{fb}^M) \Gamma^M \tau_b^\dagger + \dots
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Dabei bezeichnet  $\Pi$  die Polarisationschleife mit Vierer-Impuls  $k$ . Für diese gilt

$$\Pi_{ab}^M(p) := i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[ \Gamma^M \tau_a S\left(k + \frac{p}{2}\right) \Gamma^M \tau_b^\dagger S\left(k - \frac{p}{2}\right) \right], \tag{5.2}$$

dabei ist der Propagator auf up- und down-Quark beschränkt  $S = \text{diag}_f(S_u, S_d)$ . Prinzipiell können auch verschiedene Kanäle mischen ( $G_{ab}^{MN}$  und  $\Pi_{ab}^{MN}$ ), allerdings stellt sicher heraus, dass skalärer und pseudoskalärer Kanal nicht mischen ( $G_{ab}^{MN} = \delta_{MN} G_{ab}^M$  und  $\Pi_{ab}^{MN} = \delta_{MN} \Pi_{ab}^M$ ).

Die linke Seite der Bethe-Salpeter-Gleichung in Abbildung 6 kann als Wechselwirkung zwischen einem Quark-Antiquark-Paar unter Austausch eines Mesonen mit Vierer-Impuls  $p$  verstanden werden [5]. Dann gilt

$$i\mathcal{T}_{ab}^M(p) = \Gamma^M \tau_a i\mathcal{D}_{ab}^M(p) \Gamma^M \tau_b^\dagger, \tag{5.3}$$

wobei  $\mathcal{D}_{ab}^M(p)$  den generalisierten Meson-Propagator bezeichnet. Genauer gilt

$$i\mathcal{D}_{ab}^M(p) = (-ig_{M\bar{q}q}(p)) iD_{ab}^M(p) (-ig_{M\bar{q}q}(p)) \tag{5.4}$$

mit der Kopplungskonstante  $g_{M\bar{q}q}(p)$  zwischen Quark- und Meson-Feld und dem tatsächlichen Meson-Propagator  $D_{ab}^M$ . Für die weitere Betrachtung (bis auf den Meson-Zerfall) ist es irrelevant ob  $\mathcal{D}_{ab}^M$  oder  $D_{ab}^M$  verwendet wird.

Einsetzen von Gleichung (5.3) in die Bethe-Salpeter-Gleichung liefert eine Gleichung für den Meson-Propagator

$$i\mathcal{D}_{ab}^M = i2G_{ab}^M + (i2G_{ac}^M)(-i\Pi_{cd}^M)(i2G_{db}^M) + (i2G_{ac}^M)(-i\Pi_{cd}^M)(i2G_{de}^M)(-i\Pi_{ef}^M)(i2G_{fb}^M) + \dots \tag{5.5}$$

Diese Gleichung kann als Matrixgleichung von  $4 \times 4$ -Matrizen mit den Indizes  $\{0, 1^\pm, 3\}$  interpretiert werden, dann gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^M &= 2G^M + 2G^M \Pi^M 2G^M + 2G^M \Pi^M 2G^M \Pi^M 2G^M + \dots \\
&= 2G^M + 2G^M \Pi^M (2G^M + 2G^M \Pi^M 2G^M + \dots) \\
&= 2G^M + 2G^M \Pi^M \mathcal{D}^M.
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Es gilt dann offensichtlich

$$\mathcal{D}^M = (\mathbb{1} - 2G^M \Pi^M)^{-1} 2G^M \tag{5.7}$$

bzw.

$$\mathcal{D}_{ab}^M = (\mathbb{1} - 2G^M \Pi^M)^{-1}_{ac} 2G_{cb}^M. \tag{5.8}$$

Wegen der Propagator Eigenschaft von  $\mathcal{D}^M$  (Pol an der Stelle  $p^2 = m_M^2$ ) gilt für die Mesonmasse  $m_M$

$$\det(\mathbb{1} - 2G^M \Pi^M)|_{p^2=m_M^2} \stackrel{!}{=} 0. \tag{5.9}$$

### 5.1.1 Masse der Pionen

Für die Polarisationschleife der Pionen (Anhang B.1) gilt im Isospin-Limes

$$\Pi_\pi(p^2) = 8N_C iI_1(M) - 4N_C p^2 iI_2(p^2, M) \tag{5.10}$$

(Integral  $I_2$  ist definiert in Gleichung (D.5)). Außerdem gilt  $G_{33}^P = G_{1^\pm, 1^\pm}^P = G$  und damit für den Pion-Propagator

$$\mathcal{D}_\pi(p) := \mathcal{D}_{33}^P(p) = \frac{2G}{1 - 2G\Pi_\pi(p^2)} \stackrel{(5.4)}{=} -g_{\pi\bar{q}q}^2 D_\pi(p). \tag{5.11}$$

Die Masse der Pionen kann nun nach Gleichung (5.9) bestimmt werden, es gilt

$$1 - 2G\Pi_\pi(p^2)|_{p^2=m_\pi^2} = 0. \tag{5.12}$$

Unter Verwendung der Gap-Gleichung, Gleichung (3.6) und Gleichung (3.8) ergibt sich für die Pionmasse

$$m_\pi^2 = -\frac{m}{M} \frac{1}{8GN_C iI_2(p^2, M)} \Big|_{p^2=m_\pi^2}. \tag{5.13}$$

Offensichtlich sind im chiralen Limes ( $m = 0$ ) die Pionen masselos, es handelt sich um die drei Goldstone-Bosonen.

### 5.1.2 Zerfallskonstante der Pionen

Im Fall  $p \rightarrow m_\pi$  kann der Nenner des Bruches in der Mitte von Gleichung (5.11) entwickelt werden

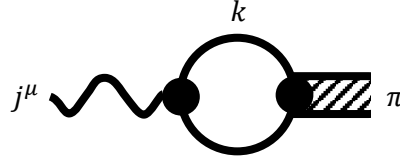
$$1 - 2G\Pi_\pi(p^2) = 1 - 2G\Pi_\pi(p^2)|_{p^2=m_\pi^2} - 2G \frac{\partial \Pi_\pi(p^2)}{\partial p^2} \Big|_{p^2=m_\pi^2} (p^2 - m_\pi^2) + \mathcal{O}((p^2 - m_\pi^2)^2),$$

dabei verschwindet der erste Term nach Gleichung (5.12) [10]. Für die Kopplungskonstante

$$g_{\pi\bar{q}q} := g_{\pi\bar{q}q}(p) \Big|_{p=m_\pi}$$

ergibt sich damit

$$\begin{aligned}
g_{\pi\bar{q}q}^{-2} &= \frac{\partial \Pi_\pi(p^2)}{\partial p^2} \Big|_{p^2=m_\pi^2} \\
&\stackrel{(B.3)}{=} -4N_C iI_2(p^2, M) \Big|_{p^2=m_\pi^2} - 4N_C m_\pi^2 \frac{\partial iI_2(p^2, M)}{\partial p^2} \Big|_{p^2=m_\pi^2} \\
&\stackrel{(D.15)}{=} -4N_C iI_2(p^2, M) \Big|_{p^2=m_\pi^2} - 8N_C m_\pi^2 D(p^2, M, M) \Big|_{p^2=m_\pi^2}.
\end{aligned} \tag{5.14}$$



**Abbildung 7:** Pion-Zerfall durch Kopplung eines Pions über eine Polarisationschleife an den Axialstrom in RPA.

Das Pion kann über die schwache Wechselwirkung zerfallen, es zerfällt dabei fast immer nach dem Schema

$$\begin{aligned}\pi^+ &\rightarrow \mu^+ + \nu_\mu \\ \pi^- &\rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu.\end{aligned}$$

Das zugehörige Feynman Diagramm ist in Abbildung 7 dargestellt, das Pion koppelt über eine Polarisationschleife an den Axialstrom  $j^\mu$  (W-Boson in der schwachen Wechselwirkung). Die Berechnung der Zerfallskonstante ist in Anhang C zu finden, es ergibt sich

$$f_\pi = -4N_C g_{\pi\bar{q}q} M iI_2(p^2, M) \Big|_{p^2=m_\pi^2}. \quad (5.15)$$

Im chiralen Limes gilt bekanntermaßen  $m_\pi = 0$  und damit für die Pion-Zerfallskonstante

$$f_\pi = -4N_C g_{\pi\bar{q}q} M iI_2(p^2, M) \Big|_{p^2=0}$$

und für die Kopplungskonstante

$$g_{\pi\bar{q}q}^{-2} = -4N_C iI_2(p^2, M) \Big|_{p^2=0}.$$

Daraus ergibt sich die verallgemeinerte Goldberg-Treiman-Relation [12]

$$f_\pi g_{\pi\bar{q}q} = M. \quad (5.16)$$

### 5.1.3 Parametersätze zur Bestimmung der Quarkmassen

Zur Berechnung der Konstituentenquarkmasse  $M$  ist es nötig, dass die freien Parameter des NJL Modells ( $G$ ,  $m$  und  $\Lambda$ ) festgelegt werden. Dies geschieht durch Anpassen an (experimentell) bekannte Werte, dazu gehören die Eigenschaften des Pions ( $m_\pi$  und  $f_\pi$ ) sowie das Quark-Kondensat ( $\langle\bar{u}u\rangle$ ). Experimentell wurden die Eigenschaften des Pions zu  $m_\pi = 140$  MeV [13] und  $f_\pi = \frac{130.4}{\sqrt{2}}$  MeV = 92.2 MeV [14] bestimmt. Der Wert des Quark-Kondensats konnte bisher experimentell nur auf einen groben Bereich  $190 \text{ MeV} \lesssim -\langle\bar{u}u\rangle^{1/3} \lesssim 260$  MeV [6] festgelegt werden, deshalb wird dieser bei der Berechnung variiert.

Es können zunächst  $M$  und  $\Lambda$  durch simultanes Lösen von Gleichung (3.8) und (5.15) bei festem Quark-Kondensat bestimmt werden. Anschließend wird  $G$  mit Hilfe von Gleichung (5.12) bestimmt und dann durch Gleichung (3.7) die Stromquarkmasse  $m$ . Die Ergebnisse für verschiedene Werte des Quark-Kondensats sind in Tabelle 1 und in Tabelle 2 zusammengefasst.

**Tabelle 1:** Parametersätze zur Bestimmung der Quarkmassen im Zwei-Flavor-Modell bei fixierter Pionmasse und Pion-Zerfallskonstante für verschiedene Werte des Quark-Kondensats (Integrale mit zwei Regulatoren regularisiert).

	[A2]	[B2]	[C2]	[D2]	[E2]	[F2]
$\langle \bar{u}u \rangle^{1/3}$ (MeV)	-210	-220	-230	-240	-250	-260
$m_\pi$ (MeV)	140	140	140	140	140	140
$f_\pi$ (MeV)	92.2	92.2	92.2	92.2	92.2	92.2
$M$ (MeV)	411.27	310.20	274.03	251.68	235.81	223.69
$m$ (MeV)	8.95	7.80	6.84	6.04	5.35	4.77
$\Lambda$ (MeV)	621.71	683.15	742.53	802.92	864.71	928.00
$G \Lambda^2$	4.20	3.31	3.03	2.86	2.76	2.68
$g_{\pi\bar{q}q}$	4.39	3.29	2.90	2.66	2.49	2.36

**Tabelle 2:** Parametersätze zur Bestimmung der Quarkmassen im zwei Flavor Modell bei fixierter Pionmasse und Pion-Zerfallskonstante für verschiedene Werte des Quark-Kondensats (Integrale mit drei Regulatoren regularisiert).

	[A3]	[B3]	[C3]	[D3]	[E3]	[F3]
$\langle \bar{u}u \rangle^{1/3}$ (MeV)	-210	-220	-230	-240	-250	-260
$m_\pi$ (MeV)	140	140	140	140	140	140
$f_\pi$ (MeV)	92.2	92.2	92.2	92.2	92.2	92.2
$M$ (MeV)	282.86	257.51	239.79	226.45	215.91	207.30
$m$ (MeV)	8.93	7.79	6.84	6.03	5.35	4.77
$\Lambda$ (MeV)	844.31	911.99	983.10	1057.12	1133.77	1212.84
$G \Lambda^2$	5.27	4.87	4.62	4.45	4.33	4.24
$g_{\pi\bar{q}q}$	2.99	2.72	2.53	2.39	2.28	2.18

In Abbildung 8 ist die Abhängigkeit der Konstituentenquarkmasse  $M$  vom Quark-Kondensat  $\langle \bar{u}u \rangle$  dargestellt, mit zunehmendem  $\langle \bar{u}u \rangle$  steigt  $M$  schnell an.

## 5.2 Drei-Flavor-Modell

Nun soll das Drei-Flavor-Modell mit up-, down- und strange-Quark betrachtet werden. Auch hier wird im chiralen Limes ab einer kritischen Kopplung durch die endliche Konstituentenquarkmasse die  $SU(3)_A$ -Symmetrie gebrochen, es existieren folglich acht Goldstone-Bosonen (drei Pionen, vier Kaonen und ein Eta-Meson).

Die Bethe-Salpeter-Gleichung ist im Drei-Flavor-Fall in Abbildung 9 dargestellt, der reine Vier-Punkt-Vertex wird durch die Summe aus diesem und dem auf einen effektiven Vier-Punkt-Vertex reduzierten Sechs-Punkt-Vertex ersetzt (Vergleich Abbildung 2). Im Drei-Flavor-Modell gilt dann

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{S}_{ab}^M = & \Gamma^M \lambda_a (i2H_{ab}^M) \Gamma^M \lambda_b^\dagger + \Gamma^M \lambda_a (i2H_{ac}^M)(-i\Pi_{cd}^M)(i2H_{db}^M) \Gamma^M \lambda_b^\dagger \\
 & + \Gamma^M \lambda_a (i2H_{ac}^M)(-i\Pi_{cd}^M)(i2H_{de}^M)(-i\Pi_{ef}^M)(i2H_{fb}^M) \Gamma^M \lambda_b^\dagger + \dots
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

Dabei wird in der Polarisationschleife (Gleichung (5.2) mit  $\lambda_a, \lambda_b$  anstatt  $\tau_a, \tau_b$ ) der volle Propagator  $S = \text{diag}_f(S_u, S_d, S_s)$  verwendet. Einsetzen von Gleichung (5.3) in die Bethe-Salpeter-Gleichung liefert den generalisierten Meson-Propagator

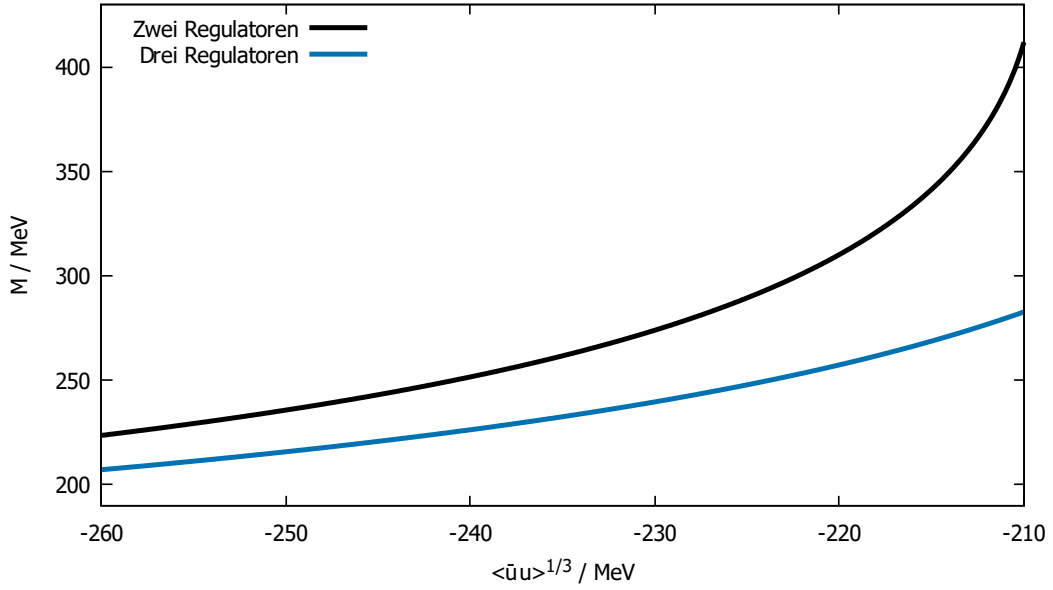


Abbildung 8: Abhängigkeit der Konstituentenquarkmasse  $M$  vom Quark-Kondensat  $\langle \bar{u}u \rangle$ .

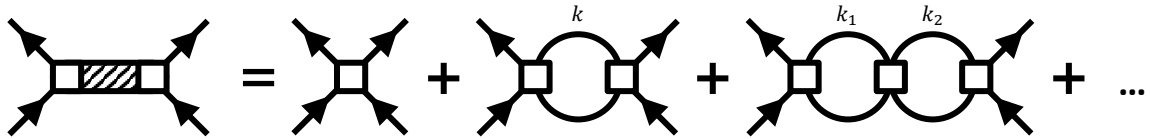


Abbildung 9: Bethe-Salpeter-Gleichung in RPA im Drei-Flavor-Modell.

$$\mathcal{D}^M = (\mathbb{1} - 2H^M \Pi^M)^{-1} 2H^M \quad (5.18)$$

bzw.

$$\mathcal{D}_{ab}^M = (\mathbb{1} - 2H^M \Pi^M)_{ac}^{-1} 2H_{cb}^M \quad (5.19)$$

Auch hier gilt wegen der Propagator Eigenschaft von  $\mathcal{D}^M$  (Pol an der Stelle  $p^2 = m_M^2$ ) für die Mesonenmasse  $m_M$

$$\det(\mathbb{1} - 2H^M \Pi^M) \Big|_{p^2=m_M^2} \stackrel{!}{=} 0. \quad (5.20)$$

### 5.2.1 Massen der Pionen und Kaonen

Die Polarisationschleife der Pionen (Anhang B.1) ist gleich wie im Zwei-Flavor-Fall. Für die Kopplungskonstante gilt im Isospin-Limes  $H_{33}^P = H_{1^\pm, 1^\pm}^P = G - \frac{1}{2}K \langle \bar{s}s \rangle$  und damit für den Pion-Propagator

$$\mathcal{D}_\pi(p) := \mathcal{D}_{33}^P(p) = \frac{2G - K \langle \bar{s}s \rangle}{1 - (2G - K \langle \bar{s}s \rangle) \Pi_\pi(p^2)} \stackrel{(5.4)}{=} -g_{\pi qq}^2 D_\pi(p). \quad (5.21)$$

Die Masse der Pionen kann nun nach Gleichung (5.20) bestimmt werden, es gilt

$$1 - (2G - K \langle \bar{s}s \rangle) \Pi_\pi(p^2) \Big|_{p^2=m_\pi^2} = 0 \quad (5.22)$$

und damit

$$m_\pi^2 = -\frac{m}{M} \frac{1}{N_C(8G - 4K \langle \bar{s}s \rangle) iI_2(p^2, M)} \Big|_{p^2=m_\pi^2}. \quad (5.23)$$

Es ist offensichtlich, dass die Pionen auch im Drei-Flavor-Fall im chiralen Limes ( $m = 0$ ) masselos sind. Es handelt sich dabei um drei der gesuchten Goldstone-Bosonen.

Für die Polarisationschleife der Kaonen (Anhang B.2) gilt im Isospin-Limes

$$\Pi_K = 4N_C (iI_1(M_s) + iI_1(M)) + 4N_C ((M_s - M)^2 - p^2) iI_3(p^2, M_s, M) \quad (5.24)$$

(Integral  $I_3$  ist definiert in Gleichung (D.6)). Außerdem gilt  $H_{4^\pm, 4^\pm}^P = H_{6^\pm, 6^\pm}^P = G - \frac{1}{2}K \langle \bar{u}u \rangle$  und damit für den Kaon-Propagator

$$\mathcal{D}_K(p) := \mathcal{D}_{4^+, 4^+}^P(p) = \frac{2G - K \langle \bar{u}u \rangle}{1 - (2G - K \langle \bar{u}u \rangle) \Pi_K(p^2)} \stackrel{(5.4)}{=} -g_{K\bar{q}q}^2 D_K(p). \quad (5.25)$$

Die Masse der Kaonen kann nun nach Gleichung (5.20) bestimmt werden, es gilt

$$1 - (2G - K \langle \bar{u}u \rangle) \Pi_K(p^2) \Big|_{p^2=m_K^2} = 0 \quad (5.26)$$

und damit

$$m_K^2 = \frac{(2G - K \langle \bar{u}u \rangle) \left( -\frac{\langle \bar{u}u \rangle}{M} - \frac{\langle \bar{s}s \rangle}{M_s} + 4N_C (M - M_s)^2 iI_3(p^2, M_s, M) \right) - 1}{N_C (8G - 4K \langle \bar{u}u \rangle) iI_3(p^2, M_s, M)} \Big|_{p^2=m_K^2}. \quad (5.27)$$

Im Limes  $M = M_s$  (deshalb auch  $\langle \bar{u}u \rangle = \langle \bar{s}s \rangle$ ) gilt für die Kaonmasse

$$m_K^2 = \frac{(4G - 2K \langle \bar{u}u \rangle) \left( -\frac{\langle \bar{u}u \rangle}{M} \right) - 1}{N_C (8G - 4K \langle \bar{u}u \rangle) iI_2(p^2, M)} \Big|_{p^2=m_K^2} \stackrel{(3.12)}{=} \frac{m}{M} \frac{1}{N_C (8G - 4K \langle \bar{u}u \rangle) iI_2(p^2, M)} \Big|_{p^2=m_K^2} = m_\pi^2.$$

Damit verschwindet diese im chiralen Limes, bei den Kaonen handelt es sich um vier weitere Goldstone-Bosonen.

## 5.2.2 Zerfallskonstante der Pionen

Bei der Berechnung der Zerfallskonstante der Pionen ändert sich nichts im Vergleich zum Zwei-Flavor-Fall (Abschnitt 5.1.2), für sie gilt auch im Drei-Flavor-Fall

$$f_\pi = -4N_C g_{\pi\bar{q}q} M iI_2(p^2, M) \Big|_{p^2=m_\pi^2}. \quad (5.28)$$

## 5.2.3 Masse des $\eta$ - und $\eta'$ -Meson

Die Determinante zur Bestimmung der Mesonenmasse (siehe Gleichung (5.20)) ergibt ein Produkt aus acht Faktoren, die jeweils einen Pol des generalisierten Mesonpropagator beschreiben

$$\begin{aligned} \det(\mathbb{1} - 2H^P \Pi^P) = & (1 - 2H_{1^+, 1^+}^P \Pi_{1^+, 1^+}^P)(1 - 2H_{1^-, 1^-}^P \Pi_{1^-, 1^-}^P)(1 - 2H_{33}^P \Pi_{33}^P) \\ & (1 - 2H_{4^+, 4^+}^P \Pi_{4^+, 4^+}^P)(1 - 2H_{4^-, 4^-}^P \Pi_{4^-, 4^-}^P)(1 - 2H_{6^+, 6^+}^P \Pi_{6^+, 6^+}^P)(1 - 2H_{6^-, 6^-}^P \Pi_{6^-, 6^-}^P) \\ & ((1 - 2H_{00}^P \Pi_{00}^P)(1 - 2H_{88}^P \Pi_{88}^P) - 4H_{08}^P \Pi_{08}^P (1 - H_{08}^P \Pi_{08}^P) - (2H_{08}^P)^2 \Pi_{00}^P \Pi_{88}^P - (2H_{00}^P)(2H_{88}^P)(\Pi_{08}^P)^2). \end{aligned}$$

Sieben Pole können dabei den Massen der drei Pionen und vier Kaonen zugeordnet werden, der verbleibende Pol (eigentlich Produkt aus zwei Polen) gehört zu der Masse des  $\eta$ - und des  $\eta'$ -Mesons (als Mischung aus  $\eta_0$  und  $\eta_8$ )

$$D_{\eta\eta'}^{-1} := (1 - 2H_{00}^P \Pi_{00}^P)(1 - 2H_{88}^P \Pi_{88}^P) - 4H_{08}^P \Pi_{08}^P (1 - H_{08}^P \Pi_{08}^P) - (2H_{08}^P)^2 \Pi_{00}^P \Pi_{88}^P - (2H_{00}^P)(2H_{88}^P)(\Pi_{08}^P)^2. \quad (5.29)$$

Dabei steckt die Impulsabhängigkeit implizit in den Polarisationschleifen. Für diese gilt im Isospin Limes (Anhang B.3)

$$\begin{aligned}
\Pi_{\eta_0} &:= \Pi_{00}^P = \frac{8}{3} N_C (2 iI_1(M) + iI_1(M_s)) - \frac{4}{3} N_C p^2 (2 iI_2(p^2, M) + iI_2(p^2, M_s)) \\
\Pi_{\eta_8} &:= \Pi_{88}^P = \frac{8}{3} N_C (iI_1(M) + 2 iI_1(M_s)) - \frac{4}{3} N_C p^2 (iI_2(p^2, M) + 2 iI_2(p^2, M_s)) \\
\Pi_{08}^P &= \frac{8}{3} \sqrt{2} N_C (iI_1(M) - iI_1(M_s)) - \frac{4}{3} \sqrt{2} N_C p^2 (iI_2(p^2, M) - iI_2(p^2, M_s))
\end{aligned} \tag{5.30}$$

sowie  $H_{00}^P = G_1 + \frac{K}{3}(2 \langle \bar{u}u \rangle + \langle \bar{s}s \rangle)$ ,  $H_{88}^P = G_1 - \frac{K}{6}(4 \langle \bar{u}u \rangle - \langle \bar{s}s \rangle)$  und  $H_{08}^P = -\frac{\sqrt{2}K}{6}(\langle \bar{u}u \rangle - \langle \bar{s}s \rangle)$ .

$D_{\eta\eta'}^{-1}$  hat aufgefasst als Funktion des Vierer-Impulses zwei Nullstellen, der kleineren wird die  $\eta$ -Mesonmasse zugeordnet und der größeren die  $\eta'$ -Mesonmasse

$$0 = D_{\eta\eta'}^{-1} \Big|_{p^2=m_{\eta}^2} \tag{5.31}$$

$$0 = D_{\eta\eta'}^{-1} \Big|_{p^2=m_{\eta'}^2}. \tag{5.32}$$

Im Limes  $M = M_s$  gilt  $H_{08}^P = 0$  und  $\Pi_{08}^P = 0$ , somit entkoppeln die Gleichungen (5.31) und (5.32) zu

$$\begin{aligned}
1 - 2H_{00}^P \Pi_{00}^P(p^2) \Big|_{p^2=m_{\eta_0}^2} &= 0 \\
1 - 2H_{88}^P \Pi_{88}^P(p^2) \Big|_{p^2=m_{\eta_8}^2} &= 0.
\end{aligned} \tag{5.33}$$

Die Mischung von Singulett und Oktett wird aufgehoben.

Es ergibt sich für die Masse des  $\eta_0$ -Meson

$$m_{\eta_0}^2 = \frac{\frac{2}{3}(2G + \frac{K}{3}(4 \langle \bar{u}u \rangle + 2 \langle \bar{s}s \rangle))(-\frac{2\langle \bar{u}u \rangle}{M} - \frac{\langle \bar{s}s \rangle}{M_s}) - 1}{\frac{4}{3} N_C (2G + \frac{K}{3}(4 \langle \bar{u}u \rangle + 2 \langle \bar{s}s \rangle))(2 iI_2(p^2, M) + iI_2(p^2, M_s))} \Big|_{p^2=m_{\eta_0}^2} \tag{5.34}$$

und für die des  $\eta_8$ -Meson

$$m_{\eta_8}^2 = \frac{\frac{2}{3}(2G - \frac{K}{3}(4 \langle \bar{u}u \rangle - \langle \bar{s}s \rangle))(-\frac{\langle \bar{u}u \rangle}{M} - \frac{2\langle \bar{s}s \rangle}{M_s}) - 1}{\frac{4}{3} N_C (2G - \frac{K}{3}(4 \langle \bar{u}u \rangle - \langle \bar{s}s \rangle))(iI_2(p^2, M) + 2 iI_2(p^2, M_s))} \Big|_{p^2=m_{\eta_8}^2}. \tag{5.35}$$

Für die  $\eta_8$ -Mesonmasse gilt im Limes  $M = M_s$  (deshalb auch  $\langle \bar{u}u \rangle = \langle \bar{s}s \rangle$ )

$$m_{\eta_8}^2 = \frac{(4G - 2K \langle \bar{u}u \rangle)(-\frac{\langle \bar{u}u \rangle}{M}) - 1}{N_C (8G - 4K \langle \bar{u}u \rangle) iI_2(p^2, M)} \Big|_{p^2=m_{\eta_8}^2} = m_K^2 = m_{\pi}^2.$$

Damit verschwindet diese im chiralen Limes, bei dem  $\eta_8$ -Meson handelt es sich um das achte Goldstone Boson. Für die Masse des  $\eta_0$ -Meson hingegen gilt

$$m_{\eta_0}^2 = \frac{(4G + 4K \langle \bar{u}u \rangle)(-\frac{\langle \bar{u}u \rangle}{M}) - 1}{N_C (8G + 8K \langle \bar{u}u \rangle) iI_2(p^2, M)} \Big|_{p^2=m_{\eta_0}^2} \stackrel{(3.12)}{=} -\left(\frac{m}{M} + \frac{6K \langle \bar{u}u \rangle^2}{M}\right) \frac{1}{N_C (8G + 8K \langle \bar{u}u \rangle) iI_2(p^2, M)} \Big|_{p^2=m_{\eta_0}^2}.$$

Offensichtlich verschwindet die Masse des  $\eta_0$ -Meson auch im chiralen Limes nicht. Wird allerdings die Sechs-Punkt-Wechselwirkung ebenfalls vernachlässigt ( $K = 0$ ), so ist das  $\eta_0$ -Meson ebenfalls masselos. Im Fall  $K = 0$  wird durch die Konstituentenquarkmasse nicht nur die  $SU(3)_A$ -Symmetrie sondern die  $U(3)_A$ -Symmetrie spontan gebrochen, deshalb existieren  $3^2 = 9$  masselose Goldstone-Bosonen (drei Pionen, vier Kaonen,  $\eta_8$  und  $\eta_0$ ).

## 5.2.4 Anpassung der freien Parameter

Die freien Parameter des Drei-Flavor-NJL-Modells ( $m$ ,  $m_s$ ,  $\Lambda$ ,  $G$  und  $K$ ) können an (experimentell) bekannte Werte angepasst werden. Dazu zählen die Eigenschaften des Pions ( $m_\pi$  und  $f_\pi$ ) sowie die Kaonmasse ( $m_K$ ), die  $\eta$ -Mesonmasse ( $m_\eta$ ) und die  $\eta'$ -Mesonmasse ( $m_{\eta'}$ ), diese Werte sind in Tabelle 3 zusammengestellt.

**Tabelle 3:** Bekannte Werte zur Anpassung der freien Parameter im Drei-Flavor-NJL-Modell (Faktor  $\sqrt{2}$  bei Zerfallskonstanten berücksichtigt).

	Wert	Quelle
$m_{\pi^\pm}$ (MeV)	140	[13]
$m_{K^\pm}$ (MeV)	494	[13]
$f_{\pi^-}$ (MeV)	92.2	[14]
$m_\eta$ (MeV)	548	[13]
$m_{\eta'}$ (MeV)	958	[13]

Anstatt die freien Parameter des NJL Modells direkt zu bestimmen, wird wie im Zwei-Flavor-Modell zunächst der Satz ( $M, M_s, \Lambda, G, K$ ) durch simultanes Lösen von Gleichung (5.23), (5.27), (5.28), (5.31) und (5.32) bestimmt und anschließend mit der Dyson-Gleichung (siehe Gleichung (3.13)) die Stromquarkmassen  $m$  und  $m_s$  berechnet. Die so erhaltenen freien Parameter des NJL Modells inklusive der Konstituentenquarkmassen sind in Tabelle 4 dargestellt.

**Tabelle 4:** Parametersätze zur Bestimmung der Quarkmassen im Drei-Flavor-Modell bei fixierter Pionmasse, Pion-Zerfallskonstante, Kaonmasse,  $\eta$ -Mesonmasse und  $\eta'$ -Mesonmasse (für zwei und drei Regulatoren).

	[R2]	[R3]
$M$ (MeV)	171.51	169.32
$m$ (MeV)	1.88	2.13
$M_s$ (MeV)	372.02	372.82
$m_s$ (MeV)	63.01	71.44
$\Lambda$ (MeV)	1614.70	1937.23
$G \Lambda^2$	2.19	3.48
$K \Lambda^5$	23.84	83.74

Mit diesen Parametern kann der Wert des Up-Quark-Kondensat berechnet werden, es gilt für zwei Regulatoren  $\langle \bar{u}u \rangle^{1/3} = -356 \text{ MeV}$  und für drei Regulatoren  $\langle \bar{u}u \rangle^{1/3} = -342 \text{ MeV}$ . Diese Werte stimmen nicht mit den bekannten Werten ( $190 \text{ MeV} \lesssim -\langle \bar{u}u \rangle^{1/3} \lesssim 260 \text{ MeV}$  [6]) überein, das NJL Modell mit diesen freien Parametern ist somit nicht geeignet um den Wert des Up-Quark-Kondensats theoretisch zu erklären.

Bei einer genauen Betrachtung der Konstituentenquarkmassen fällt auf, dass  $m_{\eta'}^2 > m_\eta^2 > 4M^2$  gilt. Somit hat das bei der Berechnung der  $\eta$ - und  $\eta'$ -Mesonmasse auftretende Integral  $iI_2$  einen nicht verschwindenden Imaginärteil. Dieser Imaginärteil resultiert aus dem im NJL Modell erlaubten Zerfall eines Meson in ein Quark-Antiquark-Paar (NJL Modell enthält kein Confinement). Dies führt dazu, dass der Realteil von  $iI_2$  und somit auch  $D_{\eta\eta'}^{-1}(p)$  einen Knick bekommen, dies ist in Abbildung 10 bei  $p = 2M = 343.02 \text{ MeV}$  und bei  $p = 2M_s = 744.04 \text{ MeV}$  zu erkennen. Offensichtlich haben diese Knicke einen großen Einfluss auf die Position der Nullstellen und damit die Masse des  $\eta$ - und des  $\eta'$ -Mesons. Da in der Realität bisher keine Verletzung des Confinements beobachtet werden konnte, sind die so berechneten Massen der Mesonen bzw. im Umkehrschluss die daraus berechneten freien Parameter des NJL Modells physikalisch wertlos. Es lassen sich im NJL Modell somit nur Mesonen aus up- und down-Quark mit einer Masse  $m_M < 2M$  bzw. Mesonen aus up-, down- und strange-Quark mit einer Masse  $m_M < M + M_s$  physikalisch sinnvoll beschreiben.



Wird auf die Beschreibung des  $\eta'$ -Mesons verzichtet und sich auf die Pionen, Kaonen und das  $\eta$ -Meson beschränkt, resultiert aus der Bedingung  $m_M < 2M$  und  $m_M < M + M_s$  für die Mesonmasse, dass für die Konstituentenquarkmasse des up- und down-Quark  $M > \frac{1}{2}m_\eta = 274 \text{ MeV}$  und für die des strange-Quark  $M_s > m_K - M = 220 \text{ MeV}$  gelten muss (Bedingung für strange-Quark bereits mit Parametern aus Tabelle 4 erfüllt). Es können die freien Parameter des NJL Modells jetzt für eine vorgegebene Konstituentenquarkmasse  $M$  des up- und down-Quarks so angepasst werden, dass  $m_\pi, f_\pi, m_K$  und  $m_\eta$  mit den bekannten Werten übereinstimmen. Vorgegangen wird wie bereits zuvor, das heißt es wird zunächst der Satz  $(M_s, \Lambda, G, K)$  durch simultanes Lösen von Gleichung (5.23), (5.27), (5.28) und (5.31) bei vorgegebenem  $M$  bestimmt und anschließend mit der Dyson-Gleichung (siehe Gleichung (3.13)) die Stromquarkmassen  $m$  und  $m_s$  berechnet. Die Ergebnisse sind in Tabelle 5 und 6 zusammengestellt, wobei zusätzlich der Wert des Up-Quark-Kondensats berechnet wurde.

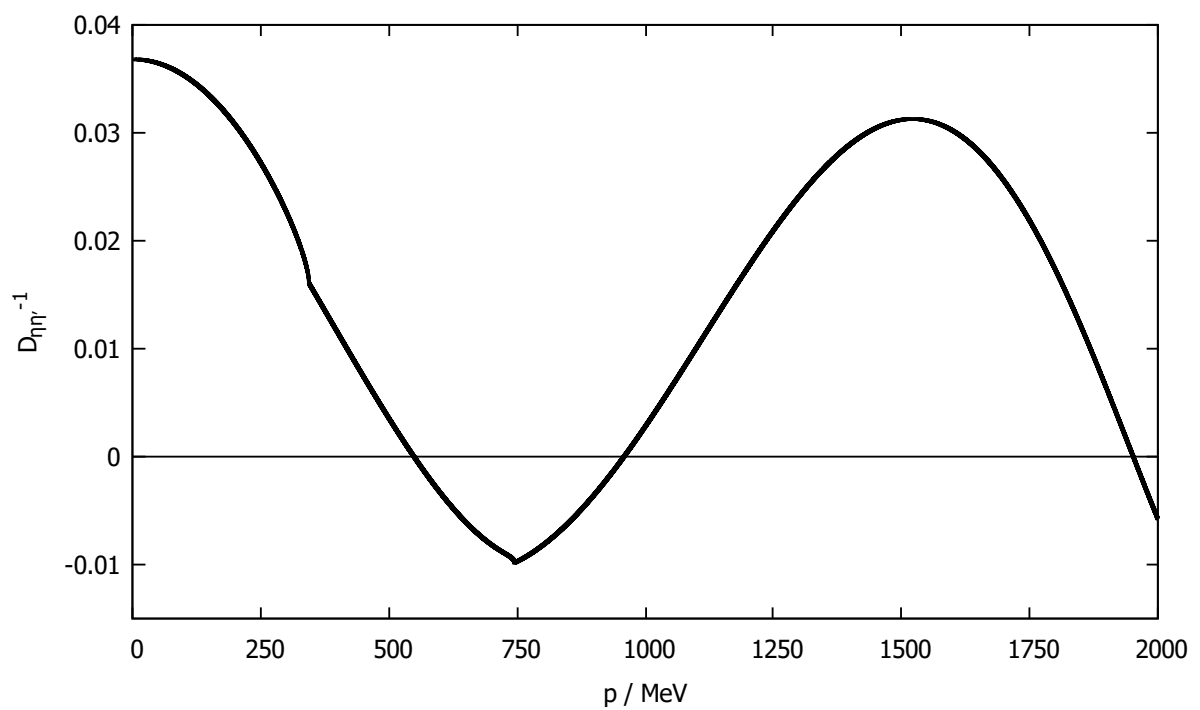
**Tabelle 5:** Parametersätze bei vorgegebener Konstituentenquarkmasse des up- und down-Quark im Drei-Flavor-Modell bei fixierter Pionmasse, Pion-Zerfallskonstante, Kaonmasse und  $\eta$ -Mesonmasse (für zwei Regulatoren).

	[A2]	[B2]	[C2]	[D2]	[E2]
$M$ (MeV)	275	300	325	350	375
$m$ (MeV)	6.87	7.57	8.09	8.46	8.72
$M_s$ (MeV)	380.27	458.51	495.84	527.90	557.73
$m_s$ (MeV)	168.67	180.30	188.51	194.08	197.65
$\Lambda$ (MeV)	740.42	696.51	667.23	647.36	633.82
$G \Lambda^2$	-0.48	1.02	1.21	1.32	1.39
$K \Lambda^5$	198.8	115.0	112.7	117.1	123.8
$\langle \bar{u}u \rangle^{1/3}$ (MeV)	-230	-222	-217	-214	-212

**Tabelle 6:** Parametersätze bei vorgegebener Konstituentenquarkmasse des up- und down-Quark im Drei-Flavor-Modell bei fixierter Pionmasse, Pion-Zerfallskonstante, Kaonmasse und  $\eta$ -Mesonmasse (für drei Regulatoren).

	[A3]	[B3]	[C3]	[D3]	[E3]
$M$ (MeV)	275	300	325	350	375
$m$ (MeV)	8.60	9.56	10.31	10.89	11.33
$M_s$ (MeV)	504.98	530.27	554.05	576.75	598.62
$m_s$ (MeV)	208.87	224.91	236.87	245.71	252.17
$\Lambda$ (MeV)	862.05	813.13	781.19	760.17	746.52
$G \Lambda^2$	4.18	4.53	4.90	5.30	5.73
$K \Lambda^5$	109.2	118.8	129.8	141.5	153.3
$\langle \bar{u}u \rangle^{1/3}$ (MeV)	-213	-205	-200	-196	-194

Die mit diesen Parametersätzen berechneten Werte des Up-Quark-Kondensats liegen alle in dem erwarteten Bereich von  $190 \text{ MeV} \lesssim -\langle \bar{u}u \rangle^{1/3} \lesssim 260 \text{ MeV}$ .



**Abbildung 10:** Verlauf von  $D_{\eta\eta'}^{-1}$  in Abhängigkeit des Vier-Impulses, Knicke entstehen durch nicht verschwindenden Imaginärteil von Integral  $iI_2$  (Parameter aus Tabelle 4, zwei Regulatoren).

---

## 6 Zusammenfassung und Ausblick

---

Zur Beschreibung der starken Wechselwirkung wurde das Nambu-Jona-Lasinio Modell (NJL Modell) im Isospin Limes verwendet, dieses hat gegenüber der fundamentaleren Theorie - der Quantenchromodynamik (QCD) - den Vorteil, dass es durch den Verzicht auf Austauschteilchen deutlich einfacher ist. Trotz diesem Verzicht war es möglich die sogenannte Mass Gap zwischen Strom- und Konstituentenquarkmassen sowie die Massen der meisten pseudoskalaren Mesonen im Drei-Flavor-Modell zu erklären.

Zu Beginn wurde die Lagrange-Dichte des NJL Modells genauer untersucht, dabei wurden zwei Wechselwirkungskanäle berücksichtigt, eine Vier-Punkt-Wechselwirkung (bestehend aus skalärer und pseudoskalärer Wechselwirkung) und eine Determinanten-Wechselwirkung nach 't Hooft. Die Determinanten-Wechselwirkung stellt sich im Zwei-Flavor-Modell ebenfalls als Vier-Punkt-Wechselwirkung und im Drei-Flavor-Modell als eine Sechs-Punkt-Wechselwirkung, die durch Schließen einer Schleife auf eine effektive Vier-Punkt-Wechselwirkung reduziert wurde, dar. Die Betrachtung der Determinanten-Wechselwirkung war nötig, da diese die  $U(1)_A$ -Symmetrie der Lagrange-Dichte bricht und das NJL Modell somit die selben globalen Symmetrien wie die QCD aufweist. Im Zwei-Flavor-Modell wurde die Determinanten-Wechselwirkung jedoch vernachlässigt, damit die Vier-Punkt-Wechselwirkung der Lagrange-Dichte die selbe Form wie im Drei-Flavor-Modell hat.

Nachdem mit der Lagrange-Dichte der theoretische Grundstein zur Beschreibung von Quarks im NJL Modell gelegt war, wurde die Mass Gap zwischen Strom- und Konstituentenquarks untersucht. Diese lässt sich durch die Dyson-Gleichung in Hartree-Approximation erklären (siehe Abbildung 3), Quarks erhalten durch Wechselwirkung mit anderen Quarks zusätzliche Masse. Die Auswertung der Dyson-Gleichung ergab, dass durch die Vier-Punkt-Wechselwirkung nur Quarks mit gleichem Flavor und durch die Sechs-Punkt-Wechselwirkung nur Quarks mit unterschiedlichem Flavor zu diesem Prozess beitragen. Bei der Berechnung der Selbstenergie trat das quadratisch divergente Integral  $iI_1$  auf, welches wie alle Integrale in dieser Arbeit mit Pauli-Villars-Regularisierung behandelt wurde (mit zwei und mit drei Regulatoren). Eine genauere Untersuchung des Ergebnisses der Dyson-Gleichung zeigte, dass auch bei verschwindender Stromquarkmasse (chiraler Limes) ab einer kritischen Kopplung Konstituentenquarkmasse erzeugt wird. Durch diese wird die chirale Symmetrie spontan gebrochen, bei den Goldstone-Bosonen handelt es sich um die Pionen und Kaonen (sowie das  $\eta_0$ -Meson).

Die Beschreibung dieser Mesonen gelang durch die Bethe-Salpeter-Gleichung in Random-Phase-Approximation (siehe Abbildung 6), Mesonen sind Resonanzen in der Quark-Antiquark-Streuung. Die Lösung der Bethe-Salpeter-Gleichung führte auf die Berechnung von Polarisations Schleifen, dabei traten weitere divergente Integrale auf, die ebenfalls mit Pauli-Villars-Regularisierung behandelt wurden. Mit Kenntnis der Polarisations Schleifen war es möglich, die Massen der Pionen (alle drei entartet) und Kaonen (alle vier entartet) zu berechnen. Wie erwartet verschwinden diese im chiralen Limes. Durch die Sechs-Punkt-Wechselwirkung kommt es im Drei-Flavor-Modell zu einer Mischung zwischen Singulett und Oktett, das heißt die theoretischen Mesonen  $\eta_0$  und  $\eta_8$  mischen zu den physikalischen Mesonen  $\eta$  und  $\eta'$ . Die Berechnung der Massen von  $\eta$ - und  $\eta'$ -Meson war auf Grund dieser Mischung komplizierter als bei den Pionen und Kaonen. Es ergaben sich hier Gleichungen, aus denen nicht direkt die Masse im chiralen Limes abgelesen werden konnte.

Ziel war es die freien Parameter des NJL Modells zu bestimmen, im Zwei-Flavor-Modell sind dies drei (Stromquarkmasse des up- bzw. down-Quarks, die Kopplungskonstante der Vier-Punkt-Wechselwirkung und der Regularisierungsparameter) und im Drei-Flavor-Modell fünf (Stromquarkmasse des up- bzw. down-Quarks, Stromquarkmasse des strange-Quark, die Kopplungskonstanten der Vier-Punkt- und Sechs-Punkt-Wechselwirkung und der Regularisierungsparameter). Zusätzlich zu den Mesonmassen sollten diese Parameter an die Zerfallskonstante des Pion angepasst werden. Im Rahmen des NJL Modells kann der Zerfall der Pionen und Kaonen in der schwachen Wechselwirkung durch die Kopplung über eine Polarisations Schleife an den Axialstrom (siehe Abbildung 7) beschrieben werden. Damit waren im Drei-Flavor-Modell fünf bekannte Werte zur Festlegung der freien Parameter vorhanden (Pionmasse, Pion-Zerfallskonstante, Kaonmasse,  $\eta$ - und  $\eta'$ -Mesonmasse), im Zwei-Flavor-Modell wurde zusätzlich zur Pionmasse und Pion-Zerfallskonstante das Up-Quark-Kondensat verwendet. Die angepassten freien Parameter sowie die Konstituentenquarkmassen sind für das Zwei-Flavor-Modell in Tabelle 1 und 2 und für das Drei-Flavor-Modell in Tabelle 4 zusammengestellt.

Im Drei-Flavor-Fall waren die Konstituentenquarkmassen so klein, dass  $\eta$ - und  $\eta'$ -Meson nicht stabil gegen den im NJL Modell erlaubten Zerfall in Quark und Antiquark sind (NJL Modell enthält kein Confinement). Eine genauere Untersuchung zeigte, dass diese Tatsache einen großen Einfluss auf deren Masse hat und die so bestimmten freien Parameter physikalisch nicht sinnvoll waren. Es wurde daher auf die Beschreibung des  $\eta'$ -Meson verzichtet und für vorgegebene Konstituentenquarkmasse des up- bzw. down-Quark die freien Parameter bestimmt, die Ergebnisse sind in Tabelle 5 und 6 zusammengestellt.

Auch wenn das Drei-Flavor-Nambu-Jona-Lasinio-Modell mit Pauli-Villars-Regularisierung nicht in der Lage ist, alle pseudoskalaren Mesonen vollständig zu beschreiben, hat es ein breites Anwendungsspektrum. So kann das NJL Modell bei

---

endlicher Temperatur und endlichem chemischen Potential angewendet werden, um das Quark-Phasendiagramm zu berechnen [6] oder zur Beschreibung von Pion-Pion-Streuung [5] verwendet werden. Durch Hinzunahme einer vektoriellen Vier-Punkt-Wechselwirkung ist es möglich Vektormesonen zu untersuchen, durch Hinzunahme eine pseudovektoriellen Vier-Punkt-Wechselwirkung ist es möglich die Mischung zwischen pseudoskalarem und pseudovektoriellen Kanal zu untersuchen [7]. Das NJL Modell ist, obwohl es deutlich einfacher als die QCD ist und kein Confinement enthält, durchaus in der Lage Phänomene der starken Wechselwirkung richtig zu beschreiben.

---

---

## Anhang

---

### A Konventionen

---

In dieser Arbeit werden natürliche Einheiten verwendet, d.h.  $c = \hbar = 1$ . Außerdem sind für die Komponenten des Quarkfeldes die Bezeichnungen  $\Psi_1 \equiv \Psi_u \equiv u, \Psi_2 \equiv \Psi_d \equiv d, \Psi_3 \equiv \Psi_s \equiv s$  äquivalent. Für die Elemente des Minkowski-Raumes gilt

$$x^\mu = \begin{pmatrix} t \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix}$$

und für die verwendete Metrik

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

mit  $\mu, \nu \in \{0, 1, 2, 3\}$ .

Für die relativistische Beschreibung von Spin- $\frac{1}{2}$  Teilchen (Quarks, Elektronen,...) werden die Dirac-Matrizen  $\gamma^\mu$  benötigt, sie haben folgende Form

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mit der  $\gamma^5$  Matrix können pseudoskalare und pseudovektorielle Terme konstruiert werden, es gilt

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die  $\gamma^5$  Matrix antikommutiert mit allen  $\gamma^\mu$  Matrizen,  $\gamma^5\gamma^\mu = -\gamma^\mu\gamma^5$ . Für die Spur der Dirac-Matrizen gilt  $Tr(\gamma^5) = Tr(\gamma^\mu) = Tr(\gamma^5\gamma^\mu) = 0$ .

Die Generatoren der  $SU(2)$ -Gruppe sind die Pauli-Matrizen, diese haben folgende Form

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Für sie gilt  $\det(\tau_i) = -1$ ,  $Tr(\tau_i) = 0$  und sie erfüllen die Kommutatorrelation  $[\tau_i, \tau_j] = 2i\epsilon^{ijk}\tau_k$ . Die Identität wird als nullte Pauli-Matrix definiert

$$\tau_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Generatoren der  $SU(3)$ -Gruppe sind die Gell-Mann-Matrizen, diese haben folgende Form

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Für sie gilt  $Tr(\lambda_i) = 0$ . Die Generatoren erfüllen die Kommutatorrelation  $[\lambda_i, \lambda_j] = 2if^{ijk}\lambda_k$ , dabei bezeichnet  $f^{ijk}$  die antisymmetrische Strukturkonstante der  $SU(3)$  Gruppe

$$f^{123} = 1 \quad f^{147} = f^{246} = f^{257} = f^{345} = \frac{1}{2} \quad f^{156} = f^{367} = -\frac{1}{2} \quad f^{458} = f^{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Außerdem erfüllen die Generatoren die Antikommutatorrelation  $\{T_i, T_j\} = \frac{1}{3}\delta^{ij} + d^{ijk}T_k$ , dabei bezeichnet  $d^{ijk}$  die symmetrische Strukturkonstante der  $SU(3)$  Gruppe

$$d^{118} = d^{228} = d^{338} = -d^{888} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad d^{448} = d^{558} = d^{668} = d^{778} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$d^{146} = d^{157} = -d^{247} = d^{256} = d^{344} = d^{355} = -d^{366} = -d^{377} = \frac{1}{2}.$$

Für die Gell-Mann-Matrizen gilt  $Tr(\lambda_i \lambda_j) = 2\delta_{ij}$ . Deshalb wird die normierte Identität

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

als nullte Gell-Mann-Matrix definiert.

## B Polarisierungsschleifen

Für die pseudoskalare Polarisierungsschleife gilt allgemein nach Gleichung (5.2)

$$\begin{aligned}\Pi_{ab}^P(p) &= i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[ i\gamma^5 \lambda_a S \left( k + \frac{p}{2} \right) i\gamma^5 \lambda_b^\dagger S \left( k - \frac{p}{2} \right) \right] \\ &= -i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[ \lambda_a S \left( -k - \frac{p}{2} \right) \lambda_b^\dagger S \left( k - \frac{p}{2} \right) \right],\end{aligned}$$

wobei verwendet wurde, dass  $\gamma^5 S(p) = S(-p)\gamma^5$  gilt.  $\Pi_{ab}^P$  ist symmetrisch und verschwindet im Isospin-Limes für  $a \neq b$ , ausgenommen ist  $\Pi_{08}^P$ . Damit verbleibt die Berechnung der folgenden Polarisierungsschleifen.

### B.1 Polarisierungsschleife der Pionen

Aus Gleichung (2.20) kann abgelesen werden, dass für die Polarisierungsschleife des  $\pi^0$  folgendes gelten muss

$$\Pi_{\pi^0} := \Pi_{33}^P = i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[ i\gamma^5 \lambda_3 S \left( k + \frac{p}{2} \right) i\gamma^5 \lambda_3 S \left( k - \frac{p}{2} \right) \right]. \quad (\text{B.1})$$

Es ergibt sich unter Verwendung von  $\gamma^5 S(p) = S(-p)\gamma^5$  und den Abkürzungen  $S^+ := S(-k + \frac{p}{2})$  und  $S^- := S(k - \frac{p}{2})$

$$\Pi_{\pi^0} = -i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[ \lambda_3 S^+ \lambda_3 S^- \right].$$

Die Berechnung des Matrixproduktes und Ausführen der Spur im Flavor-Raum liefert

$$\Pi_{\pi^0} = -i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[ S_u^+ S_u^- + S_d^+ S_d^- \right] \stackrel{\text{Isospin Limes}}{=} -2i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[ S_u^+ S_u^- \right].$$

Für die Polarisierungsschleife des  $\pi^\pm$  gilt nach Gleichung (2.20)

$$\Pi_{\pi^\pm} := \Pi_{1^\mp, 1^\mp}^P = i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[ i\gamma^5 \lambda_1^\mp S \left( k + \frac{p}{2} \right) i\gamma^5 \lambda_1^\pm S \left( k - \frac{p}{2} \right) \right]. \quad (\text{B.2})$$

Unter Verwendung der Abkürzungen von oben gilt

$$\Pi_{\pi^\pm} = -2i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[ S_u^\pm S_d^\mp \right] \stackrel{\text{Isospin Limes}}{=} -2i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[ S_u^+ S_u^- \right] = \Pi_{\pi^0}.$$

Die Polarisierungsschleife ist also für alle Pionen gleich, daher wird diese nur mit  $\Pi_\pi$  bezeichnet.

Einsetzen der Propagatoren aus Gleichung (3.3) liefert

$$\Pi_\pi = -2i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[ \frac{\left( -k - \frac{p}{2} + M \right) \left( k - \frac{p}{2} + M \right)}{\left( \left( k + \frac{p}{2} \right)^2 - M^2 + i\epsilon \right) \left( \left( k - \frac{p}{2} \right)^2 - M^2 + i\epsilon \right)} \right].$$

Es gilt allgemein  $\text{tr}_{\text{Dirac}}(\not{a}\not{b}) = 4ab$  und  $\text{tr}_{\text{Dirac}}(\not{a}) = 0$  und damit für die Polarisierungsschleife

$$\begin{aligned}\Pi_\pi &= -8iN_C \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-k^2 + \frac{p^2}{4} + M^2}{\left( \left( k + \frac{p}{2} \right)^2 - M^2 + i\epsilon \right) \left( \left( k - \frac{p}{2} \right)^2 - M^2 + i\epsilon \right)} \\ &= 8iN_C \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\left( k + \frac{p}{2} \right)^2 - M^2 + i\epsilon} + \frac{1}{\left( k - \frac{p}{2} \right)^2 - M^2 + i\epsilon} \right] \\ &\quad - 4iN_C p^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\left( \left( k + \frac{p}{2} \right)^2 - M^2 + i\epsilon \right) \left( \left( k - \frac{p}{2} \right)^2 - M^2 + i\epsilon \right)}.\end{aligned}$$

Mit den Substitutionen  $k' = k + \frac{p}{2}$  und  $k'' = k - \frac{p}{2}$  in den ersten beiden Termen können diese in das bekannte Integral  $I_1$  überführt werden

$$\Pi_\pi = 8N_C iI_1(M) - 4N_C p^2 iI_2(p^2, M), \quad (\text{B.3})$$

dabei ist das zweite Integral in  $I_2(p^2, M)$  zusammengefasst.

## B.2 Polarisationschleife der Kaonen

Aus Gleichung (2.20) kann abgelesen werden, dass für die Polarisationschleife des  $K^\pm$  folgendes gelten muss

$$\Pi_{K^\pm} := \Pi_{4^\mp, 4^\mp}^p = i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[ i\gamma^5 \lambda_4^\mp S \left( k + \frac{p}{2} \right) i\gamma^5 \lambda_4^\pm S \left( k - \frac{p}{2} \right) \right]. \quad (\text{B.4})$$

Unter Verwendung der Abkürzungen und Beziehungen aus Abschnitt B.1 ergibt sich

$$\Pi_{K^\pm} = -i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[ \lambda_4^\mp S^+ \lambda_4^\pm S^- \right].$$

Die Berechnung des Matrixproduktes und Ausführen der Spur im Flavor-Raum liefert

$$\Pi_{K^\pm} = -2i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[ S_u^\pm S_s^\mp \right].$$

Für das  $K_0$  bzw.  $\bar{K}^0$  ergibt sich aus Gleichung (2.20) folgendes

$$\Pi_{K^0/\bar{K}^0} := \Pi_{6^\mp, 6^\mp}^p = i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[ i\gamma^5 \lambda_6^\mp S \left( k + \frac{p}{2} \right) i\gamma^5 \lambda_6^\pm S \left( k - \frac{p}{2} \right) \right]. \quad (\text{B.5})$$

Analoges Vorgehen zu oben liefert dann

$$\Pi_{K^0/\bar{K}^0} = -2i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[ S_d^\pm S_s^\mp \right] \stackrel{\text{Isospin Limes}}{=} -2i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[ S_u^\pm S_s^\mp \right] = \Pi_{K^\pm}.$$

Es kann mit einer kurzen Rechnung gezeigt werden, dass  $\Pi_{K^\pm} = \Pi_{K^\mp}$  gilt. Somit unterscheidet sich die Polarisationschleife für die verschiedenen Kaonen ebenfalls nicht, sie wird deshalb nur mit  $\Pi_K$  bezeichnet.

Einsetzen der Propagatoren aus Gleichung (3.3) liefert

$$\Pi_K = -2i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[ \frac{\left( -\not{k} - \frac{\not{p}}{2} + M_s \right) \left( \not{k} - \frac{\not{p}}{2} + M \right)}{\left( \left( k + \frac{p}{2} \right)^2 - M_s^2 + i\epsilon \right) \left( \left( k - \frac{p}{2} \right)^2 - M^2 + i\epsilon \right)} \right].$$

Es wird vorgegangen wie in Abschnitt B.1, dann ergibt sich

$$\begin{aligned} \Pi_K &= -8iN_C \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-k^2 + \frac{p^2}{4} + M_s M}{\left( \left( k + \frac{p}{2} \right)^2 - M_s^2 + i\epsilon \right) \left( \left( k - \frac{p}{2} \right)^2 - M^2 + i\epsilon \right)} \\ &= 8iN_C \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\left( k + \frac{p}{2} \right)^2 - M_s^2 + i\epsilon} + \frac{1}{\left( k - \frac{p}{2} \right)^2 - M^2 + i\epsilon} \right] \\ &\quad - 4iN_C \left( p^2 - (M_s - M)^2 \right) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\left( \left( k + \frac{p}{2} \right)^2 - M_s^2 + i\epsilon \right) \left( \left( k - \frac{p}{2} \right)^2 - M^2 + i\epsilon \right)}. \end{aligned}$$

Mit den Substitutionen  $k' = k + \frac{p}{2}$  und  $k'' = k - \frac{p}{2}$  in den ersten beiden Termen können diese in das bekannte Integral  $I_1$  überführt werden

$$\Pi_K = 4N_C \left( iI_1(M_s) + iI_1(M) \right) + 4N_C \left( (M_s - M)^2 - p^2 \right) iI_3(p^2, M_s, M), \quad (\text{B.6})$$

dabei ist das zweite Integral in  $I_3(p^2, M_s, M)$  zusammengefasst.



### B.3 Polarisationschleifen der Eta-Mesonen

Aus Gleichung (2.20) kann abgelesen werden, dass für die Polarisationschleife des  $\eta_0$  folgendes gelten muss

$$\Pi_{\eta_0} := \Pi_{00}^p = i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[ i\gamma^5 \lambda_0 S \left( k + \frac{p}{2} \right) i\gamma^5 \lambda_0 S \left( k - \frac{p}{2} \right) \right]. \quad (\text{B.7})$$

Unter Verwendung der Abkürzungen und Beziehungen aus Abschnitt B.1 ergibt sich

$$\Pi_{\eta_0} = -i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} [\lambda_0 S^+ \lambda_0 S^-].$$

Die Berechnung des Matrixproduktes im Isospin-Limes und Ausführen der Spur im Flavor-Raum liefert

$$\Pi_{\eta_0} = -\frac{2}{3}i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} [2 S_u^+ S_u^- + S_s^+ S_s^-] = \frac{2}{3} \left( -2i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} [S_u^+ S_u^-] \right) + \frac{1}{3} \left( -2i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} [S_s^+ S_s^-] \right).$$

Die Terme in den runden Klammern sind identisch mit Termen, die bei der Berechnung der Polarisationschleife der Pionen auftauchen. Es ergibt sich

$$\Pi_{\eta_0} = \frac{8}{3}N_C (2 iI_1(M) + iI_1(M_s)) - \frac{4}{3}N_C p^2 (2 iI_2(p^2, M) + iI_2(p^2, M_s)). \quad (\text{B.8})$$

Ebenfalls kann aus Gleichung (2.20) abgelesen werden, dass für die Polarisationschleife des  $\eta_8$  folgendes gelten muss

$$\Pi_{\eta_8} := \Pi_{88}^p = i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[ i\gamma^5 \lambda_8 S \left( k + \frac{p}{2} \right) i\gamma^5 \lambda_8 S \left( k - \frac{p}{2} \right) \right]. \quad (\text{B.9})$$

Unter Verwendung der Abkürzungen und Beziehungen aus Abschnitt B.1 ergibt sich

$$\Pi_{\eta_8} = -i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} [\lambda_8 S^+ \lambda_8 S^-].$$

Die Berechnung des Matrixproduktes im Isospin-Limes und Ausführen der Spur im Flavor-Raum liefert

$$\Pi_{\eta_8} = -\frac{2}{3}i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} [S_u^+ S_u^- + 2 S_s^+ S_s^-] = \frac{1}{3} \left( -2i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} [S_u^+ S_u^-] \right) + \frac{2}{3} \left( -2i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} [S_s^+ S_s^-] \right).$$

Die Terme in den runden Klammern sind identisch mit Termen, die bei der Berechnung der Polarisationschleife der Pionen auftauchen. Es ergibt sich

$$\Pi_{\eta_8} = \frac{8}{3}N_C (iI_1(M) + 2 iI_1(M_s)) - \frac{4}{3}N_C p^2 (iI_2(p^2, M) + 2 iI_2(p^2, M_s)). \quad (\text{B.10})$$

Die letzte auftretende Polarisationschleife hängt mit der Mischung von  $\eta_0$  und  $\eta_8$ -Meson zu  $\eta$  und  $\eta'$ -Meson zusammen und ergibt sich zu

$$\Pi_{08} = i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[ i\gamma^5 \lambda_0 S \left( k + \frac{p}{2} \right) i\gamma^5 \lambda_8 S \left( k - \frac{p}{2} \right) \right]. \quad (\text{B.11})$$

Unter Verwendung der Abkürzungen und Beziehungen aus Abschnitt B.1 ergibt sich

$$\Pi_{08} = -i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} [\lambda_0 S^+ \lambda_8 S^-].$$

Die Berechnung des Matrixproduktes im Isospin-Limes und Ausführen der Spur im Flavor-Raum liefert

$$\Pi_{08} = -\frac{2}{3}\sqrt{2}i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} [S_u^+ S_u^- - S_s^+ S_s^-] = \frac{\sqrt{2}}{3} \left( -2i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} [S_u^+ S_u^-] \right) - \frac{\sqrt{2}}{3} \left( -2i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} [S_s^+ S_s^-] \right).$$

Die Terme in den runden Klammern sind identisch mit Termen, die bei der Berechnung der Polarisationschleife der Pionen auftauchen. Es ergibt sich

$$\Pi_{08} = \frac{8}{3}\sqrt{2}N_C (iI_1(M) - iI_1(M_s)) - \frac{4}{3}\sqrt{2}N_C p^2 (iI_2(p^2, M) - iI_2(p^2, M_s)). \quad (\text{B.12})$$

## C Zerfallskonstante der Pionen

Die Auswertung des Feynman-Diagramms aus Abbildung 7 liefert [6]

$$f_\pi p^\mu = g_{\pi\bar{q}q} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[ \gamma^\mu \gamma^5 \frac{\lambda_3}{2} S \left( k + \frac{p}{2} \right) i \gamma^5 \lambda_3 S \left( k - \frac{p}{2} \right) \right]. \quad (\text{C.1})$$

Alternativ hätte auch hier  $\lambda_1^\pm$  anstatt  $\lambda_3$  im Isospin Limes gewählt werden können. Es gilt mit den Abkürzungen  $S^+$  und  $S^-$  aus Abschnitt B.1

$$f_\pi p^\mu = \frac{g_{\pi\bar{q}q}}{2} i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} [\gamma^\mu \lambda_3 S^+ \lambda_3 S^-].$$

Berechnung des Matrixproduktes und Ausführen der Spur im Flavor-Raum ergibt

$$f_\pi p^\mu = \frac{g_{\pi\bar{q}q}}{2} i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} [\gamma^\mu S_u^+ S_u^- + \gamma^\mu S_d^+ S_d^-] \stackrel{\text{Isospin Limes}}{=} g_{\pi\bar{q}q} i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} [\gamma^\mu S_u^+ S_u^-].$$

Es gilt allgemein  $\text{tr}_{\text{Dirac}}[\gamma^\mu \gamma^\nu] = 4g^{\mu\nu}$  und damit

$$\begin{aligned} f_\pi p^\mu &= g_{\pi\bar{q}q} N_C i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-4M p^\mu}{\left( (k + \frac{p}{2})^2 - M^2 + i\epsilon \right) \left( (k - \frac{p}{2})^2 - M^2 + i\epsilon \right)} \\ &= -4N_C g_{\pi\bar{q}q} M i I_2(p^2, M) p^\mu. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich dann die Pion-Zerfallskonstante in Gleichung (5.15) bzw. (5.28), dabei muss das Integral  $iI_2$  an der Stelle  $p^2 = m_\pi^2$  ausgewertet werden.

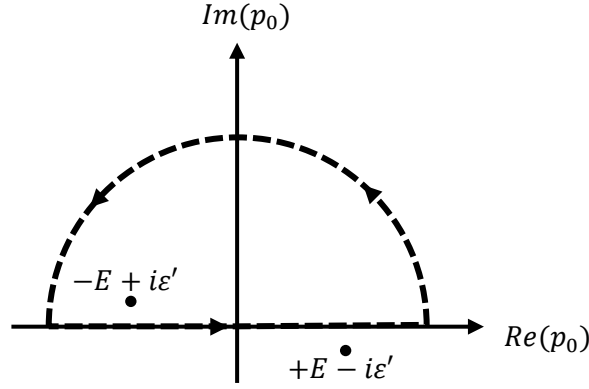


Abbildung 11: Anwendung des Residuensatz zur Lösung des Integrals  $I_1$ .

## D Integrale

### D.1 Integral $I_1$

Bei der Berechnung des Kondensats in Gleichung (3.8) tritt das quadratisch divergente Integral

$$iI_1(M) := i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - M^2 + i\epsilon} \quad (\text{D.1})$$

auf. Um dieses trotzdem berechnen zu können, wird die Pauli-Villars-Regularisierung Gleichung (4.1) bis (4.5) angewendet.

Zunächst soll das Integral durch den Residuensatz auf ein drei-dimensionales Integral reduziert werden. Dazu wird das Vierer-Impuls-Quadrat geschrieben als  $p^2 = p_0^2 - \vec{p}^2$  und mit der relativistischen Gesamtenergie  $E_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^2 + M^2}$  gilt

$$\begin{aligned} iI_1(M) &= - \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \int \frac{dp_0}{2\pi i} \frac{1}{p_0^2 - E_{\vec{p}}^2 + i\epsilon} \\ &= - \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \int \frac{dp_0}{2\pi i} \frac{1}{p_0 - E_{\vec{p}} + i\epsilon'} \frac{1}{p_0 + E_{\vec{p}} - i\epsilon'}, \end{aligned}$$

wobei  $\epsilon' := \frac{\epsilon}{2E_{\vec{p}}}$  und Terme von der Ordnung  $\mathcal{O}(\epsilon^2)$  vernachlässigt werden. Das Integral weist zwei Pole der Ordnung 1 bei  $p_0 = \pm(E_{\vec{p}} - i\epsilon')$  auf, die mit dem Residuensatz behandelt werden. Der Pfad wird so gewählt, dass lediglich der Pol bei  $p_0 = -E_{\vec{p}} + i\epsilon'$  umrandet wird (Abbildung 11).

Es ergibt sich

$$iI_1(M) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{\vec{p}^2 + M^2}},$$

wobei nun auch Terme der Ordnung  $\mathcal{O}(\epsilon)$  vernachlässigt werden, da diese nur den Pfad für die Integration über  $dp_0$  festlegen. Die Integration über  $d^3 p$  kann nun durch Kugelkoordinaten vereinfacht werden.

$$iI_1(M) = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{\vec{p}^2 + M^2}} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty dp \frac{p^2}{\sqrt{p^2 + M^2}}$$

Anwenden der Pauli-Villars-Regularisierung Gleichung (4.1) bis (4.5) liefert für zwei Regulatoren

$$iI_1(M, \Lambda) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty dp \left( \frac{p^2}{\sqrt{p^2 + M^2}} - 2 \frac{p^2}{\sqrt{p^2 + M^2 + \Lambda^2}} + \frac{p^2}{\sqrt{p^2 + M^2 + 2\Lambda^2}} \right). \quad (\text{D.2})$$

Dieses Integral kann nun analytisch berechnet werden (Integration zunächst im Intervall  $[0, \lambda]$  und anschließende Grenzwertbildung  $\lambda \rightarrow \infty$  über alle Summanden), es ergibt sich

$$iI_1(M, \Lambda) = \frac{1}{16\pi^2} \sum_{j=0}^2 c_j M_j^2 \ln(M_j^2) = \frac{1}{16\pi^2} \left( M^2 \ln\left(\frac{M^2}{M^2 + \Lambda^2}\right) + (M^2 + 2\Lambda^2) \ln\left(\frac{M^2 + 2\Lambda^2}{M^2 + \Lambda^2}\right) \right). \quad (D.3)$$

Im Fall von drei Regulatoren gilt für das Integral  $I_1$

$$iI_1(M, \Lambda) = \frac{1}{16\pi^2} \sum_{j=0}^3 c_j M_j^2 \ln(M_j^2). \quad (D.4)$$

## D.2 Integrale $I_2$ und $I_3$

Bei der Berechnung der Polarisationschleife des Pion in Gleichung (B.3) tritt außer dem bereits bekannten Integral  $I_1$  das Integral

$$iI_2(p^2, M) := i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\left((k + \frac{p}{2})^2 - M^2 + i\epsilon\right) \left((k - \frac{p}{2})^2 - M^2 + i\epsilon\right)} \quad (D.5)$$

auf. Bei der Berechnung der Polarisationschleife des Kaon tritt hingegen das Integral

$$iI_3(p^2, M, M') := i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\left((k + \frac{p}{2})^2 - M^2 + i\epsilon\right) \left((k - \frac{p}{2})^2 - M'^2 + i\epsilon\right)} \quad (D.6)$$

auf. Es gilt offensichtlich  $I_3(p^2, M, M) \equiv I_2(p^2, M)$ , daher ist es ausreichend das Integral  $I_3$  zu berechnen.

Zunächst soll gezeigt werden, dass das Integral nur von  $p^2$  und nicht vom Vier-Impuls selbst abhängt. Mit Hilfe der Feynman-Parameter

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx \frac{1}{(Ax + B(1-x))^2} \quad (D.7)$$

kann das Integral umgeschrieben werden zu

$$\begin{aligned} iI_3(p^2, M, M') &= i \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\left((k^2 + kp + \frac{p^2}{4} - M^2 + i\epsilon)x + (k^2 - kp + \frac{p^2}{4} - M'^2 + i\epsilon)(1-x)\right)^2} \\ &= i \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\left((k^2 + kp(2x-1) + \frac{p^2}{4} - M^2x - M'^2(1-x) + i\epsilon\right)^2}. \end{aligned}$$

Mit der Substitution  $l^\mu = k^\mu + \frac{1}{2}p^\mu(2x-1)$  gilt

$$iI_3(p^2, M, M') = i \int_0^1 dx \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l^2 - p^2(x^2 - x) - M^2x - M'^2(1-x) + i\epsilon)^2}$$

und somit hängt das Integral  $I_3$  offensichtlich nur von  $p^2$  ab. Es kann also ohne Beschränkung der Allgemeinheit ab jetzt  $p_0 = p$  und  $\vec{p} = 0$  angenommen werden (Berechnung der Integrale im Ruhesystem des Mesons).

Für die explizite Berechnung des Integrals wird zur Form aus Gleichung (D.6) zurückgegangen. Anwenden der Substitution  $k - \frac{p}{2} \rightarrow k$  liefert

$$iI_3(p^2, M, M') = i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\left((k+p)^2 - M^2 + i\epsilon\right) \left(k^2 - M'^2 + i\epsilon\right)}.$$

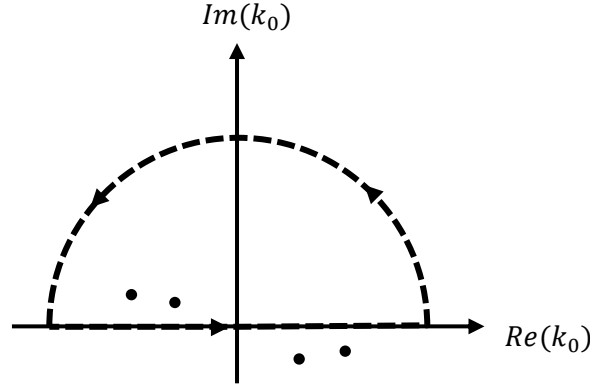


Abbildung 12: Anwendung des Residuensatz zur Lösung des Integrals  $I_3$ .

Analoges Vorgehen wie bei Integral  $I_1$  mit  $(\vec{p} = 0)$

$$(k+p)^2 - M^2 = (k_0 + p_0)^2 - \vec{k}^2 - M^2 \equiv (k_0 + p_0)^2 - E_{\vec{k}}^2$$

$$k^2 - M'^2 = k_0^2 - \vec{k}^2 - M'^2 \equiv k_0^2 - E_{\vec{k}}'^2$$

liefert

$$iI_3(p^2, M, M') = - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int \frac{dk_0}{2\pi i} \frac{1}{((k_0 + p_0)^2 - E_{\vec{k}}^2 + i\epsilon)(k_0^2 - E_{\vec{k}}'^2 + i\epsilon)}.$$

Mit  $\epsilon_1 := \frac{\epsilon}{2E_{\vec{k}}}$  und  $\epsilon_2 := \frac{\epsilon}{2E_{\vec{k}}'}$  und ergibt sich

$$iI_3(p^2, M, M') = - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int \frac{dk_0}{2\pi i} \frac{1}{(k_0 + p_0 - E_{\vec{k}} + i\epsilon_1)(k_0 + p_0 + E_{\vec{k}} - i\epsilon_1)(k_0 - E_{\vec{k}}' + i\epsilon_2)(k_0 + E_{\vec{k}}' - i\epsilon_2)},$$

wobei Terme der Ordnung  $\mathcal{O}(\epsilon^2)$  vernachlässigt werden. Das Produkt im Integrand kann nach der Regel

$$\frac{1}{(A-B)(A+B)} = \frac{1}{2B} \left( \frac{1}{A-B} - \frac{1}{A+B} \right)$$

umgeschrieben werden. Bei Vernachlässigung von Termen der Ordnung  $\mathcal{O}(\epsilon)$  im Zähler ergibt sich

$$iI_3(p^2, M, M') = - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int \frac{dk_0}{2\pi i} \frac{1}{4E_{\vec{k}} E_{\vec{k}}'} \left( \frac{1}{k_0 + p_0 - E_{\vec{k}} + i\epsilon_1} - \frac{1}{k_0 + p_0 + E_{\vec{k}} - i\epsilon_1} \right) \left( \frac{1}{k_0 - E_{\vec{k}}' + i\epsilon_2} - \frac{1}{k_0 + E_{\vec{k}}' - i\epsilon_2} \right).$$

Das Integral hat vier Pole der Ordnung 1, bei  $k_0 = -p_0 \pm (E_{\vec{k}} - i\epsilon_1)$  und  $k_0 = \pm(E_{\vec{k}}' - i\epsilon_2)$ , davon tragen bei dem Integrationspfad aus Abbildung 12 nur  $k_0 = -p_0 - E_{\vec{k}} + i\epsilon_1$  und  $k_0 = -E_{\vec{k}}' + i\epsilon_2$  bei. Anwendung des Residuensatz liefert dann

$$iI_3(p^2, M, M') = - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{4E_{\vec{k}} E_{\vec{k}}'} \left[ \left( \frac{1}{p_0 - E_{\vec{k}} - E_{\vec{k}}' + i(\epsilon_1 + \epsilon_2)} - \frac{1}{p_0 + E_{\vec{k}} - E_{\vec{k}}' + i(\epsilon_2 - \epsilon_1)} \right) \right. \\ \left. + \left( \frac{1}{-p_0 - E_{\vec{k}} - E_{\vec{k}}' + i(\epsilon_1 + \epsilon_2)} - \frac{1}{-p_0 - E_{\vec{k}} + E_{\vec{k}}' + i(\epsilon_1 - \epsilon_2)} \right) \right].$$

Die Terme mit der Differenz  $\epsilon_1 - \epsilon_2$  im Nenner kürzen sich weg, es bleibt nur noch

$$\begin{aligned}
iI_3(p^2, M, M') &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{4E_{\vec{k}} E'_{\vec{k}}} \left[ \frac{1}{p_0 - E_{\vec{k}} - E'_{\vec{k}}} + \frac{1}{-p_0 - E_{\vec{k}} - E'_{\vec{k}}} \right] \\
&= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{k}} E'_{\vec{k}}} \left[ \frac{E_{\vec{k}} + E'_{\vec{k}}}{p_0^2 - (E_{\vec{k}} + E'_{\vec{k}})^2} \right] \\
&= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{p_0^2 - (E_{\vec{k}} + E'_{\vec{k}})^2} \left( \frac{1}{2E_{\vec{k}}} + \frac{1}{2E'_{\vec{k}}} \right),
\end{aligned}$$

dabei wurden nun auch die Terme der Ordnung  $\mathcal{O}(\epsilon)$  vernachlässigt. Da  $p_0^2 = p^2$  gilt, kann das Integral  $I_3$  wie folgt berechnet werden

$$\begin{aligned}
iI_3(p^2, M, M') &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{p^2 - (E_{\vec{k}} + E'_{\vec{k}})^2} \frac{1}{2E_{\vec{k}}} + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{p^2 - (E_{\vec{k}} + E'_{\vec{k}})^2} \frac{1}{2E'_{\vec{k}}} \\
&= I(p^2, M, M') + I(p^2, M', M).
\end{aligned} \tag{D.8}$$

Für das Integral  $I_2$  ergibt sich

$$iI_2(p^2, M) = 2 I(p^2, M, M). \tag{D.9}$$

Dabei ist das Integral  $I$  definiert als

$$I(p^2, M, M') := \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\sqrt{k^2 + M^2}} \frac{1}{p^2 - (\sqrt{k^2 + M^2} + \sqrt{k^2 + M'^2})^2}. \tag{D.10}$$

Die Integration über  $d^3k$  kann durch Kugelkoordinaten vereinfacht werden, die Winkelintegration kann direkt ausgeführt werden

$$I(p^2, M, M') = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dk \frac{k^2}{2\sqrt{k^2 + M^2} (p^2 - (\sqrt{k^2 + M^2} + \sqrt{k^2 + M'^2})^2)}.$$

Es ist offensichtlich, dass falls  $p^2 > (M + M')^2$  das Integral einen Pol auf der reellen Achse hat. Dies führt zu einem nicht verschwindenden Imaginärteil von Integral  $I$ , der sich auf die Integrale  $iI_2$  und  $iI_3$  vererbt. Es wird daher in dieser Arbeit immer der Realteil verwendet  $I \equiv \text{Re}[I]$ . Außerdem ist das Integral divergent, deshalb wird die Pauli-Villars-Regularisierung Gleichung (4.1) bis (4.5) angewendet. Es ergibt sich das regularisierte Integral  $I$  mit zwei Regulatoren zu

$$\begin{aligned}
I(p^2, M, M', \Lambda) &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dk \frac{k^2}{2\sqrt{k^2 + M^2} (p^2 - (\sqrt{k^2 + M^2} + \sqrt{k^2 + M'^2})^2)} \\
&\quad - \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + M^2 + \Lambda^2} (p^2 - (\sqrt{k^2 + M^2 + \Lambda^2} + \sqrt{k^2 + M'^2 + \Lambda^2})^2)} \\
&\quad + \frac{k^2}{2\sqrt{k^2 + M^2 + 2\Lambda^2} (p^2 - (\sqrt{k^2 + M^2 + 2\Lambda^2} + \sqrt{k^2 + M'^2 + 2\Lambda^2})^2)}.
\end{aligned} \tag{D.11}$$

Ein analoges Ergebnis findet sich bei drei Regulatoren.

### D.3 Ableitungen der Integrale $I_2$ und $I_3$

Zur Berechnung der Zerfallskonstanten von Pion und Kaon werden die Ableitungen der entsprechenden Polarisationschleifen nach dem Quadrat des Vierer-Impulses benötigt, dies führt auf die Ableitungen der Integrale  $I_2$  und  $I_3$ . Da  $I_2(p^2, M) \equiv I_3(p^2, M, M)$  gilt, ist es ausreichend nur das Integral  $I_3$  zu betrachten

$$\frac{\partial iI_3(p^2, M, M')}{\partial p^2} = \frac{\partial I(p^2, M, M')}{\partial p^2} + \frac{\partial I(p^2, M', M)}{\partial p^2}. \quad (\text{D.12})$$

Die Ableitung von Integral  $I$  ergibt sich zu

$$\frac{\partial I(p^2, M, M')}{\partial p^2} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dk \frac{-k^2}{2\sqrt{k^2 + M^2} \left( p^2 - (\sqrt{k^2 + M^2} + \sqrt{k^2 + M'^2})^2 \right)^2} =: D(p^2, M, M'), \quad (\text{D.13})$$

weshalb für die Ableitung von Integral  $I_3$

$$\frac{\partial iI_3(p^2, M, M')}{\partial p^2} = D(p^2, M, M') + D(p^2, M', M) \quad (\text{D.14})$$

und für die Ableitung von Integral  $I_2$

$$\frac{\partial iI_2(p^2, M)}{\partial p^2} = 2 D(p^2, M, M) \quad (\text{D.15})$$

gilt.

Das so definierte Integral  $D$  ist nicht divergent, es wird aber analog wie bei alle anderen Integrale die Pauli-Villars-Regularisierung (Gleichung (4.1) bis (4.5)) angewendet. Im Fall von zwei Regulatoren gilt

$$\begin{aligned} D(p^2, M, M', \Lambda) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dk & \frac{-k^2}{2\sqrt{k^2 + M^2} \left( p^2 - (\sqrt{k^2 + M^2} + \sqrt{k^2 + M'^2})^2 \right)^2} \\ & - \frac{-k^2}{\sqrt{k^2 + M^2 + \Lambda^2} \left( p^2 - (\sqrt{k^2 + M^2 + \Lambda^2} + \sqrt{k^2 + M'^2 + \Lambda^2})^2 \right)^2} \\ & + \frac{-k^2}{2\sqrt{k^2 + M^2 + 2\Lambda^2} \left( p^2 - (\sqrt{k^2 + M^2 + 2\Lambda^2} + \sqrt{k^2 + M'^2 + 2\Lambda^2})^2 \right)^2}. \end{aligned} \quad (\text{D.16})$$

Auch hier findet sich ein analoges Ergebnis für drei Regulatoren.

---

## Literaturverzeichnis

---

- [1] W. Greiner, S. Schramm, E. Stein. *QUANTUM CHROMODYNAMICS*. Springer-Verlag, 2007.
- [2] A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, C. B. Thorn, V. F. Weisskopf. New extended model of hadrons. *Physical Review D*, Vol. 9:3471–3495, 1974.
- [3] Y. Nambu, G. Jona-Lasinio. Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. *Physical Review*, Vol. 122:345–358, 1961.
- [4] Y. Nambu, G. Jona-Lasinio. Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity II. *Physical Review*, Vol. 124:246–254, 1961.
- [5] S. Möller. Pion-Pion Scattering and Shear Viscosity in the Nambu–Jona-Lasinio Model - Corrected and Extended Version: A Guide to the Nambu–Jona-Lasinio Model, 2012. <https://theorie.ikp.physik.tu-darmstadt.de/nhq/downloads/thesis/master.moeller.pdf>.
- [6] M. Buballa. NJL-model analysis of dense quark matter. *Physics Reports*, Vol. 407:205–376, 2005.
- [7] S. Klimt, M. Lutz, U. Vogl, W. Weise. GENERALIZED SU(3) NAMBU-JONA-LASINIO MODEL (I). Mesonic modes. *Nuclear Physics*, Vol. A516:429–468, 1990.
- [8] G. 't Hooft. Symmetry Breaking through Bell-Jackiw Anomalies. *Physical Review Letters*, Vol. 37:8–11, 1976.
- [9] S. P. Klevansky. The Nambu-Jona-Lasinio model of quantum chromodynamics. *Reviews of Modern Physics*, Vol. 64:649–708, 1992.
- [10] D. Kraatz. Das Drei-Flavour Nambu–Jona-Lasinio Modell, 2013. <https://theorie.ikp.physik.tu-darmstadt.de/nhq/downloads/thesis/bachelor.kraatz.pdf>.
- [11] W. Pauli, F. Villars. On the Invariant Regularization in Relativistic Quantum Theory. *Reviews of Modern Physics*, Vol. 21:434–444, 1949.
- [12] M. L. Goldberger, S. B. Treiman. Decay of the Pi Meson. *Physical Review Letters*, Vol. 110:1178–1184, 1958.
- [13] W-M Tao et al (Particle Data Group). Review of Particle Physics. *JOURNAL OF PHYSICS G: NUCLEAR AND PARTICLE PHYSICS*, Vol. 33, 2006.
- [14] S. Stone J. L. Rosner. Decay Constants of Charged Pseudoscalar Mesons, 2008. Report number: EFI 08-03, SUHEP 08-03.