

Diplomarbeit

Die Scherviskosität im Nambu-Jona-Lasinio-Modell

Klaus Heckmann

Institut für Kernphysik
Technische Universität Darmstadt

September 2007

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Einleitung | 3 |
| 2 | Das Nambu-Jona-Lasinio-Modell | 6 |
| 2.1 | Einführung | 6 |
| 2.1.1 | Motivation | 6 |
| 2.1.2 | Das NJL-Modell | 6 |
| 2.1.3 | Symmetrien | 7 |
| 2.1.4 | Feynman-Regeln | 8 |
| 2.2 | Quarks | 8 |
| 2.2.1 | Konstituentenquarks | 8 |
| 2.2.2 | Die Gap-Gleichung | 9 |
| 2.2.3 | Der Fock-Term | 9 |
| 2.3 | Mesonen | 9 |
| 2.3.1 | Mesonen über die Bethe-Salpeter-Gleichung | 10 |
| 2.3.2 | Mesonmasse und Kopplungskonstante | 10 |
| 2.4 | Chirale Theoreme | 11 |
| 2.5 | Entwicklung in $1/N_c$ | 12 |
| 2.6 | Regularisierung | 13 |
| 2.6.1 | 3er-Impuls-Cut-off | 13 |
| 2.6.2 | 4er-Impuls-Cut-off | 14 |
| 2.6.3 | Pauli-Villars-Regularisierung | 14 |
| 3 | Das Nambu-Jona-Lasinio-Modell im Medium | 16 |
| 3.1 | Quantenfeldtheorie im Medium | 16 |
| 3.1.1 | Vergleich zwischen Vakuum und Medium | 16 |
| 3.1.2 | Regularisierung im Medium | 17 |
| 3.2 | Quarks | 18 |
| 3.3 | Mesonen | 19 |
| 3.3.1 | Mesonmassen im Medium | 20 |
| 3.3.2 | Die Spektralfunktion | 20 |
| 3.3.3 | Stetige Fortsetzung | 23 |
| 4 | Thermodynamik von NJL-Quarkmaterie | 26 |
| 4.1 | Einführung | 26 |
| 4.2 | Mean-field | 26 |
| 4.2.1 | Herleitung | 27 |
| 4.2.2 | Das Großkanonische Potential | 27 |
| 4.2.3 | Phasenübergänge | 28 |
| 4.2.4 | Ergebnisse | 31 |
| 4.2.5 | Crossoverlinien | 31 |
| 4.2.6 | Der kritische Endpunkt | 33 |
| 4.3 | Entropiedichte in Mean-Field | 34 |
| 4.4 | Korrekturen in $O(1/N_c)$ | 36 |
| 4.4.1 | Herleitung | 37 |
| 4.4.2 | Die Mesonbeiträge zum thermodynamischen Potential Ω_M | 37 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 4.4.3 | Polbeitrag Ω_{pol} | 40 |
| 4.4.4 | Nozière-Schmitt-Rink Ω_{NSR} | 40 |
| 4.4.5 | Quantenfluktuationen Ω_{qfl} | 41 |
| 5 | Scherviskosität | 42 |
| 5.1 | Was ist die Scherviskosität? | 42 |
| 5.2 | Herleitung | 43 |
| 5.3 | Entwicklung in $O(1/N_c)$ | 45 |
| 5.3.1 | Führende Ordnung: RPA | 45 |
| 5.3.2 | Nächsthöhere Ordnung: (a) | 47 |
| 5.3.3 | Nächsthöhere Ordnung: (b), (c) | 48 |
| 5.3.4 | Nächsthöhere Ordnung: (d) | 49 |
| 5.3.5 | Problematik | 50 |
| 5.4 | Quadratischer Statischer Limes | 50 |
| 5.4.1 | Die Beiträge (b) und (c) im statischen Limes | 51 |
| 5.4.2 | Der einzige nichtverschwindende Beitrag: (a) | 52 |
| 5.5 | Numerische Ergebnisse im statischen Limes | 52 |
| 5.5.1 | Ergebnisse bei niedriger Dichte | 52 |
| 5.5.2 | Am kritischen Punkt | 53 |
| 5.6 | η/s und die KSS-Grenze | 55 |
| 5.7 | Ausblick: Weitere Näherungsmethoden | 56 |
| 5.7.1 | Quarkpropagatoren mit endlicher Breite | 56 |
| 5.7.2 | Andere Vertex-Näherungen | 56 |
| 6 | Zusammenfassung und Ausblick | 57 |
| A | Elementare Integrale im Vakuum | 59 |
| A.1 | Die Gapgleichung: iI_1 | 59 |
| A.2 | Mesonen: iI | 59 |
| B | Elementare Integrale im Medium | 61 |
| B.1 | Die Gapgleichung: iI_1 | 61 |
| B.2 | Mesonen: iI | 62 |
| B.3 | Der Imaginärteil von iI | 64 |
| C | Das Quark-Dreieck | 66 |

Kapitel 1

Einleitung

Die Physik der Mitte des zwanzigsten Jahrhundert war stark von den Erfolgen der Kern- und Teilchenphysik geprägt. In Experimenten mit Höhenstrahlung und später an Beschleunigern konnte eine stetig wachsende Zahl an Teilchen nachgewiesen werden. Eine Erklärung für das große Spektrum an stark wechselwirkenden Teilchen konnte Gell-Mann [1] liefern, der die beobachteten Schemata durch Zustände mehrerer Quarks beschrieb. Mit der Quantenchromodynamik (QCD) wurde eine Theorie geboren [2, 3], die die starke Wechselwirkung als Eichtheorie von Quarks und Vektorbosonen, den Gluonen, beschrieb. Die drei möglichen Ladungen können durch Farben symbolisiert werden. Die nichtabelsche Natur der Eichgruppe $SU(3)$ führt dazu, dass, anders als beispielsweise in der Quantenelektrodynamik, die Austauscheteilchen selbst eine solche Ladung tragen und so auch miteinander wechselwirken können. Bis heute gibt es sechs bekannte Arten von Quarks. Die leichtesten, die up- und down-Quarks, besitzen nur eine sehr geringe Masse, während strange-, charm-, bottom- und top-Quark deutlich schwerer sind.

Eine wichtige Eigenschaft der QCD ist das Confinement. So existieren aufgrund der starken Kopplung der QCD keine freien, einzelnen Quarks, sondern stets nur farbneutrale Zustände. Solche Zustände können in Mesonen, bestehend aus Quark und Antiquark, und Baryonen, bestehend aus drei Quarks, realisiert werden. Diese Zustände bezeichnet man als Hadronen, zu ihnen gehören als bekannte Vertreter das π -Meson oder Pion sowie, als Beispiel für die Baryonen, die Nukleonen Proton und Neutron. Obwohl die gewöhnliche Erfahrungswelt nur diese confinierten Zustände kennt, ist eine Vorhersage der QCD die asymptotische Freiheit [4, 5, 6]. Die Kopplung der starken Wechselwirkung wird bei hohen Energien kleiner, und so wird erwartet, dass die Quarks und Gluonen für hinreichend große Energien echte Freiheitsgrade darstellen.

Neben der Betrachtung von einzelnen Hadronen ist auch die Untersuchung von stark wechselwirkender Materie eine wichtige Richtung der Erforschung der Quantenchromodynamik. Aufgrund der typischen Längenskala der QCD von etwa 1 fm muss ein solches Ensemble von Quarks und Gluonen nicht unbedingt makroskopische Maßstäbe besitzen, um als hinreichend ausgedehnt und somit als Materie angesehen zu werden. Man muss sich klarmachen, dass eine solche Materie sehr außergewöhnliche Eigenschaften besitzt, da ihre Dichte die Größenordnung der Dichte von Atomkernen besitzt. In einer solchen Materie kann nun unter bestimmten günstigen Bedingungen ein Übergang von Confinement zu Deconfinement stattfinden. Dies kann zum einen geschehen, in dem die Temperatur hinreichend angehoben wird. Dies ist auch verständlich, da mit der Temperatur die typischen Energien wachsen und somit die Kopplung sinkt. Die andere Möglichkeit, einen derartigen Übergang zu produzieren, ist die Erhöhung der Dichte. Auch dies kann man verstehen, in dem man die Hadronen bei steigender Dichte immer dichter packt, bis sie sich berühren und in einander über gehen. In Anlehnung an elektromagnetische Plasmen, in denen Atome in freie Elektronen und Rumpfionen aufgelöst sind, wird der Zustand, in dem die Quarks und Gluonen nicht mehr ausschließlich in Hadronen gebunden sind, als Quark-Gluon-Plasma (QGP) bezeichnet. Das Auftreten von Quarks und Gluonen als zusätzliche Freiheitsgrade bedeutet jedoch nicht, dass hadronische Zustände und Resonanzen im Quark-Gluon-Plasma jegliche Bedeutung verlieren. Diese Tatsache hebt man hervor, in dem man von stark gekoppelten Quark-Gluon-Plasmen (sQGP) spricht.

Diese Überlegungen wären zwar auch auf einer rein theoretischen Ebene sehr interessant, jedoch stellt sich heraus, dass es in der Natur durchaus solche Materiezustände gab und gibt. Solche

großen Energien und hohe Temperaturen sind während der Entwicklung des Universums zwischenzeitlich in einem frühen Stadium aufgetreten. Andererseits erwartet man auch im Inneren von kompakten Sternen eine extrem dichte Materie, die jedoch vergleichsweise kalt ist. Das prominenteste Beispiel für diese Klasse von Sternen sind die Neutronensterne. Neben diesen beiden natürlichen Vorkommen von stark wechselwirkender Materie können mittlerweile auch hinreichend heiße und dichte Zustände in Beschleunigerexperimenten erreicht werden. So sucht man in Schwerionenkollisionen nach Hinweisen auf das Quark-Gluon-Plasma.

Die theoretische Beschreibung der fundamentalen Freiheitsgrade der Quarks und der Eichfelder erweist sich als schwierig. Im Falle hoher Energien, wenn die Kopplung schwach ist, ist ein Zugang über Störungstheorie denkbar. Für kleine Energien ist solch ein Zugang ungeeignet, da die starke Kopplung eine perturbative Annäherung unmöglich macht. So gibt es eine Anzahl verschiedener Modelle und Methoden, die die Phänomenologie der starken Wechselwirkung reproduzieren kann. Mit dem Ansatz der Lattice-QCD lassen im Prinzip Observable nichtperturbativ berechnen. Es gibt jedoch zahlreiche Schwierigkeiten, wie die Beschreibung der leichten Quarks up und down. Kompliziert ist zudem die Berücksichtigung eines endlichen chemischen Potentials und somit einer großen Dichte. Im Limes verschwindender Kopplung, also bei sehr hoher Temperatur und Dichte, lassen sich physikalische Eigenschaften auch störungstheoretisch beschreiben. Des weiteren gibt es eine Zahl effektiver Modelle, die auf begrenzte Gültigkeitsbereiche zugeschnitten sind. Prominente Beispiele für diese Theorien sind Bag-Modelle (auf der Basis von [7, 8]), die chirale Störungstheorie (eine Übersicht bietet zum Beispiel [9]) und das Nambu-Jona-Lasinio-Modell [10, 11]. Das letztere, kurz als NJL-Modell bezeichnet, bildet die Grundlage zu Berechnungen in dieser Diplomarbeit.

Da stark wechselwirkende Materie einen Übergang von Confinement zu Quark-Gluon-Plasma bei hinreichend hohen Dichten und Temperaturen vollzieht, kann man sich fragen, ob dies unter thermodynamischen Gesichtspunkten einem Phasenübergang entspricht. Ein solcher Phasenübergang ist mit einem Ordnungsparameter verbunden, dessen Verhalten als Funktion von Temperatur und chemischem Potential eine Ordnung des Phasenübergangs definiert. Derartige Phasenübergänge separieren die verschiedenen Phasen eines Phasendiagramms voneinander. Das bekannteste Beispiel eines Phasendiagramms ist wohl das Phasendiagramm von Wasser, das bereits generische Eigenschaften zeigt. Es wurden Phasendiagramme mit Hilfe verschiedener Beschreibungen der QCD vorgeschlagen. Neben dem Bereich von Hadronen und Kernen enthalten diese Diagramme auch das Quark-Gluon-Plasma. Neben diesen beiden Phasen, so es tatsächlich solche sind, werden auch weitere Phasengrenzen und Zustände beschrieben, wie zum Beispiel farbsupraleitende Phasen bei hohen Dichten.

Experimentell gibt es vielfältige Bemühungen, das Quark-Gluon-Plasma zu erreichen und die berechneten Phasendiagramme zu überprüfen. So werden beim Stoß zweier schwerer Ionen in Beschleunigerexperimenten extrem energiereiche so genannte Feuerbälle produziert, mit denen man hofft, hinreichend weit in das QCD-Phasendiagramm vorstoßen zu können. Solcherlei Bemühungen finden beispielsweise am RHIC statt (siehe zum Beispiel [12]). Dass solche expandierende Bälle mit Formalismen der Gleichgewichts-Thermodynamik wie Phasenübergänge beschrieben werden können, setzt voraus, dass die Materie hinreichend schnell thermalisiert. Solche Relaxationszeiten liegen angesichts der starken Kopplung nahe, und das Experiment scheint zu bestätigen, dass der Feuerball mit der Physik des Gleichgewichts zu beschrieben werden kann.

Eine erfolgreiche Art der Beschreibung der Entwicklung von derartigen Feuerbällen ist die Verwendung der relativistischen Hydrodynamik. Diese Theorie, die das raumzeitliche Verhalten von Fluiden behandelt, wird zum Beispiel auch für die Materie im Inneren von Sternen verwendet. Doch auch im Feuerball einer Schwerionenkollision lassen sich Flüsse und Diffusionsprozesse untersuchen [13, 14]. Das Ergebnis derartiger Experimente hat interessante und überraschende Konsequenzen. Die hydrodynamischen Eigenschaften, die bei den RHIC-Experimenten gemessen wurden, legen nahe, dass das Verhalten des Quark-Gluon-Plasmas dem einer idealen Flüssigkeit ähnelt [15]. Ein Charakteristikum einer idealen Flüssigkeit ist ihre Scherviskosität. Besitzt eine modellhafte ideale Flüssigkeit die Viskosität null, so ist das für reale Flüssigkeiten nicht möglich. Die Scherviskosität des Quark-Gluon-Plasmas ist also klein - doch was bedeutet klein in diesem Zusammenhang?

Aufgrund einer Dualitätsbeziehung können hydrodynamische Eigenschaften von Feldtheorien mit Methoden von Stringtheorien berechnet werden. Aus einer solchen AdS/CFT-Korrespondenz wurde gefolgert, dass das Verhältnis von Scherviskosität zu Entropiedichte ein Minimum nicht un-

terschreiten kann. Die Ergebnisse am RHIC legen nahe, dass das Quark-Gluon-Plasma nahe an diese Grenze heran kommt - weit näher als andere, womöglich vertrautere Fluide.

Es ist bisher noch nicht gelungen, aus einer Theorie heraus das Verhalten von Transportkoeffizienten im Phasendiagramm vorherzusagen. Die Schwierigkeit solcher Berechnungen liegt auch an der Unzulänglichkeit des gängigen Mean-field-Ansatzes, der im NJL-Modell gewöhnlich den Rahmen von Berechnungen bildet. Ansätze zu einer theoretischen Beschreibung sind freilich vorhanden. Im Nambu-Jona-Lasinio-Modell wurde so bereits die Scherviskosität berechnet, in dem von Mean-field-Methoden abgewichen wurde. Dies geschah jedoch mit einem phänomenologischen Ansatz [16], der Eigenschaften nicht aus dem Modell selbst heraus folgerte, sondern vorgab. Die Notwendigkeit eines solchen Vorgehens lässt sich vermeiden, wenn es gelingt, eine Näherung durchzuführen, die ohne phänomenologische Eigenschaften die Berechnung der Viskosität zulässt. Eine solche Möglichkeit der Beschreibung stellt die Erweiterung der Mean-field-Rechnung dar. Ein solches Vorgehen, dass die Mean-field-Ergebnisse als führende Ordnung einer Entwicklung sieht und sie so konsistent um weitere Terme bereichern kann, wurde im NJL-Modell bereits erfolgreich durchgeführt [17]. Diese Entwicklung, die nach Ordnungen der Anzahl der Farbladungen geschieht, bildet die Grundlage für die Berechnung der Scherviskosität in dieser Arbeit.

In den Kapiteln 2 und 3 werden wir zunächst die Grundlagen des Modells vorstellen. Diese umfassen auch die Vorstellung der verwendeten Näherungsmethoden. Wesentliche Ergebnisse dieser Kapitel sind die Beschreibungen von Quarks und Mesonen. In Kapitel 4 werden wir das zugehörige Phasendiagramm berechnen und diskutieren. Hier werden verschiedene Szenarien bei einem Übergang ins Quark-Gluon-Plasma vorgestellt. Auch die Entropiedichte, durch die AdS/CFT-Korrespondenz mit hydrodynamischen Charakteristiken verknüpft, kann in diesem Kapitel gewonnen werden. Wir werden dazu Mean-field-Berechnungen verwenden und Korrekturen durch mesonische Fluktuationen diskutieren. In Kapitel 5 wird die Scherviskosität im NJL-Modell berechnet. Dabei gelingt es uns, auf der bisher existierenden Grundlage [16, 17] aufbauend diese Größe zu berechnen. Wir diskutieren die Scherviskosität an verschiedenen relevanten Stellen des QCD-Phasendiagramms und vergleichen sie mit der Entropiedichte, um das Verhalten des Fluids bewerten zu können. Es gelingt uns dabei, die qualitativen viskosen Eigenschaften des Quark-Gluon-Plasmas im Experiment auch in der Theorie wiederzufinden.

Kapitel 2

Das Nambu-Jona-Lasinio-Modell

In diesem einführenden Kapitel werden einige wesentliche Aspekte des Nambu-Jona-Lasinio-Modells vorgestellt. Diese Darstellung erhebt keinen Anspruch darauf, ein erschöpfender Überblick über die Materie zu sein, sondern hat vielmehr zum Ziel, dem Leser das Modell zu erklären und ihn auf das weiterführende dritte Kapitel vorzubereiten. Dies besteht im Wesentlichen darin, die Standardapproximationen Hartree+RPA vorzustellen. Das dritte Kapitel, welches im Gegensatz zum zweiten das Nambu-Jona-Lasinio-Modell im Medium und nicht im Vakuum behandelt, wird auf viele Aspekte genauer eingehen. Diese Behandlung ist in sofern sinnvoll, als dass die Vakuumeigenschaften stets als Spezialfall der Mediumbeschreibung hervorgehen.

2.1 Einführung

2.1.1 Motivation

Nambu und Jona-Lasinio stellten 1961 eine Analogie zwischen der Energielücke (Gap) eines BCS-Supraleiters und der Masse eines Dirac-Teilchens auf. Die Elektronen eines BCS-Supraleiters (BCS nach Bardeen, Cooper und Schrieffer, [18]) kondensieren durch ihre Wechselwirkung (die man sich als stark abgeschirmte Coulombabstoßung und Anziehung durch Phonon-Wechselwirkungen realisiert denken kann) in den sogenannten BCS-Grundzustand. Das Anregungsspektrum dieses Systems weist nun eine Energielücke zwischen dem Grundzustand und angeregten Zuständen auf. Die Existenz dieser Energielücke führt zum Phänomen des Verschwindens des elektrischen Widerstandes. Dies stelle man der Theorie relativistischer Fermionen in Diracscher Interpretation gegenüber. Zwischen den Teilchen-Zuständen und dem mit Antiteilchen gefüllten Dirac-See ist ebenfalls eine Energielücke (der Größe $2m$). Nambu und Jona-Lasinio schlugen nun vor, dass man die Massen von Dirac-Quasi-Teilchen (deren Antiteilchen also als Löcher interpretiert werden) als Gap von selbstwechselwirkenden Fermionen betrachten kann.

Diesen im Prinzip sehr allgemeinen Ansatz wendeten sie nun in der Kernphysik an. Das Nambu-Jona-Lasinio-Modell beschrieb in seiner ursprünglichen Fassung [10] die Wechselwirkungen von Nukleonen. Später wurde es als ein Modell, das Quarks beschreibt, uminterpretiert. Das wesentliche Element der Wechselwirkung ist die Implementierung der Erhaltung der chiralen Symmetrie.

2.1.2 Das NJL-Modell

Das Nambu-Jona-Lasinio-Modell, wie es in dieser Arbeit verwendet werden wird, wird durch die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m_0)\psi + g[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi)^2] \quad (2.1)$$

beschrieben. Hierbei ist m_0 die Stromquarkmasse und g die (nicht dimensionslose) Kopplungskonstante. Die Felder ψ beschreiben die Quarks und besitzen Dirac-, Isospin- und Farbindex. Die beiden Wechselwirkungen Γ_M haben ebenfalls diese Struktur.

$$\Gamma_M = \Gamma_M^{\text{Dirac}} \otimes \Gamma_M^{\text{Isospin}} \otimes \Gamma_M^{\text{Color}} \quad (2.2)$$

Diese Wechselwirkungen sind $M \in \{\sigma, \pi^a\}$.

$$\Gamma_\sigma = \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \quad (2.3)$$

$$\Gamma_{\pi^a} = i\gamma_5 \otimes \tau^a \otimes \mathbf{1} \quad (2.4)$$

τ ist die Paulimatrix im Isospinraum.

Die Anzahl der Farben (N_c) und der Flavors (N_f) ist nicht im Modell festgeschrieben. In dieser Diplomarbeit wird ausschließlich das 2-Flavor-NJL-Modell benutzt, das sich auf up- und down-Quarks beschränkt. Diese Beschränkung ist nicht zwingend, auch strange-Quarks können mit einem $N_f = 3$ -Modell beschrieben werden. Die Einflüsse von strange-Quarks werden jedoch in der gesamten Arbeit vernachlässigt. Überdies werden up- und down-Quarks als entartet angenommen. Es mag hilfreich sein, sich zumindest einmal, am Anfang, die zugehörigen Feldoperatoren ψ mit ihren Indizes als Vektoren vorzustellen.

$$\psi = \begin{pmatrix} u_r \\ u_g \\ u_b \\ d_r \\ d_g \\ d_b \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Hier bei sind u und d die Dirac-Spinoren der up- und down-Quarks. ψ ist also ein 24-komponentiges Objekt.

2.1.3 Symmetrien

Nach dem Noether-Theorem sind die Symmetrien der Lagrangedichte \mathcal{L} mit den Erhaltungssätzen des Systems verknüpft und daher von Relevanz. Das NJL-Modell weist die $N_f = 2$ -QCD-Symmetrien auf. Es ist invariant unter den folgenden unitären Transformationen.

Baryonenzahlerhaltung

Die Baryonenzahlerhaltung resultiert aus der $U(1)$ -Symmetrie

$$\psi \rightarrow \exp(-i\alpha)\psi, \alpha \in \mathbb{R}. \quad (2.6)$$

Die Quarkfelder ψ können also mit einer globalen Phase α multipliziert werden, ohne, dass sich dadurch physikalische Observablen ändern. Die Erhaltung der Baryonenzahl ist eine wichtige Eigenschaft der starken Wechselwirkung.

Invarianz unter Rotation im Isospin-Raum

Die $SU_V(2)$ -Transformation gehört ebenfalls zu den Symmetrien des Modells.

$$\psi \rightarrow \exp(-i\vec{\tau} \cdot \vec{\theta}/2)\psi, \vec{\theta} \in \mathbb{R}^2 \quad (2.7)$$

Hier wird das Feld ψ im Isospin-Raum rotiert.

Chirale Symmetrie und chiraler Limes

Falls $m_0 = 0$, existiert die $SU_A(2)$ -Symmetrie

$$\psi \rightarrow \exp(-i\gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\theta}/2)\psi, \vec{\theta} \in \mathbb{R}^2. \quad (2.8)$$

Die Invarianz unter $SU_V(2) \otimes SU_A(2)$ wird auch als *chirale Symmetrie* bezeichnet. Wir nennen daher auch im folgenden den Fall $m_0 = 0$ den *chiralen Limes*. Man beachte, dass m_0 , wenn schon nicht null, so jedoch klein ist. Die chirale Symmetrie ist im diesem Sinne eine approximative Symmetrie.

2.1.4 Feynman-Regeln

Um das NJL-Modell mit diagrammatischen Techniken zu untersuchen, können Feynman-Regeln aufgestellt werden.

Für jeden (nackten) Quark-Propagator:

$$\text{-----} = iS_0(p) = i(\not{p} - m_0 + i\epsilon)^{-1} \quad (2.9)$$

Für jeden Vertex:

$$\begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \end{array} = +i\Gamma_\sigma = 2i g \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \quad (2.10)$$

$$\begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \end{array} = +i\Gamma_{\pi^a} = 2i g \gamma_5 \tau^a \otimes \gamma_5 \tau^a \quad (2.11)$$

Für jeden geschlossenen Fermionen-Loop mit Loop-Impuls k :

$$- \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \quad (2.12)$$

Das Vorzeichen vor den Vertices $i\Gamma_M$ sind von der verwendeten Definition abhängig. Die Verwendung des positiven Vorzeichens erscheint uns für einen Vierpunktvertex die besser Wahl.

2.2 Quarks

2.2.1 Konstituentenquarks

Die elementaren Teilchen der Quantenchromodynamik sind die von Gell-Mann benannten Quarks. Nun ist es jedoch so, dass schon allein der Begriff eines einzelnen Quarks, eines so genannten Stromquarks, etwas problematisch ist. Denn nicht umsonst wird die zugrunde liegende Wechselwirkung auch starke Wechselwirkung bezeichnet, und ein hypothetisches einzelnes Quark wäre stets von einer Wolke Quarks, Antiquarks und Gluonen umgeben. Der Begriff eines einzelnen Teilchens ist aus feldtheoretischer Sicht als Anregung in Störungstheorie oder Greensfunktion zu sehen - der Ansatz eines einzelnen Stromquarks ist jedoch unangemessen.

Ein Ansatz, um eine realistischere Beschreibung zu gewinnen, ist das Miteinbeziehen der Teilchen-Wolke in die Propagation eines Stromquarks. Eine recht anschauliche Art, diesen Ansatz zu verfolgen, kann bei der Untersuchung der Quarkstruktur eines Baryons wie zum Beispiel dem Proton geschehen. Das Proton besteht aus den Quarks u u d . Nach dem oben beschriebenen Bild gibt es jedoch weitere dynamisch erzeugte Quarks und Gluonen. Auf Grund von Erhaltungssätzen bleiben die Quantenzahlen wie Ladung und Farbe erhalten und das Proton besitzt somit die Quantenzahlen der drei Valenzquarks genannten Teilchen uud . Man definiert nun Konstituentenquarks, die den Valenzquarks ihre Umgebung hinzufügen. Diese Konstituentenquarks bieten eine adäquatere Beschreibung einer teilchenähnlichen Anregung im oberen Sinne als die Stromquarks. Sie erklären auch auf eine einfache Weise, warum die Masse eines Protons so viel größer als die recht kleine Stromquarkmasse ist.

Dieses Bild von ständig erzeugten Teilchen kann uns im folgenden Abschnitt leiten, wenn wir daran gehen, über eine Quark-Selbstenergie einen Konstituentenquarkpropagator zu berechnen.

2.2.2 Die Gap-Gleichung

Die Quark-Selbstenergie in Hartree-Näherung hat durch ihre skalare Natur die Struktur einer Korrektur der Quarkmasse. Diese effektive Masse wird im Folgenden m genannt, während die Stromquarkmasse mit m_0 bezeichnet wird. Die Dyson-Gleichung für den Quarkpropagator in Hartree-Näherung ist in Gleichung 2.13 ("Gap-Gleichung") beschrieben.

$$\text{---} = \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} \quad (2.13)$$

$$S(p) = S_0(p) + S_0(p) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr}(\Gamma_\sigma S(k)) S(p) \quad (2.14)$$

Hierbei ist $S = (\not{p} - m + i\epsilon)^{-1}$ und $S_0 = (\not{p} - m_0 + i\epsilon)^{-1}$. Man erhält für die Masse die selbstkonsistente Gleichung

$$m = m_0 + 8N_c N_f g i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{m}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (2.15)$$

Das hier auftretende Integral wird uns noch häufiger begegnen. Wir benennen es deshalb

$$iI_1 = i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (2.16)$$

Die Vereinfachung dieses Integrals wird im Anhang A.1 diskutiert. Sie ermöglicht es, durch analytische Integration der k_0 -Koordinate die Gapgleichung in die Form

$$m = m_0 + 8N_c N_f g m \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_k} \quad (2.17)$$

zu überführen, mit $E_k^2 = (\mathbf{k}^2 + m^2)$.

Die selbstkonsistente Lösung dieser Gleichung führt zur Erzeugung einer Konstituentenquarkmasse m , die deutlich über der Stromquarkmasse m_0 liegt. Dies ist im eingangs beschriebenen Bild von Nambu und Jona-Lasinio die Erzeugung eines Gaps, einer Energielücke. Angelehnt an das Näherungsschema werden wir die Masse m gelegentlich auch als Hartree-Quarkmasse bezeichnen.

2.2.3 Der Fock-Term

Selbstkonsistente Rechnungen durch Hartree-Fock-Approximation finden auch Anwendung in der Berechnung von Elektronen in Atomen und Festkörpern. In Gleichung (2.14) kann man sich zurecht fragen, wo denn der Austausch- oder Fock-Term geblieben ist, der aus Konsistenzgründen erforderlich scheint. Es gibt jedoch zwei Gründe, dass sich die Gap-Gleichung auf den Hartree-Term beschränkt.

Die Punktwechselwirkung der NJL-Lagrangedichte hat die besondere Eigenschaft, dass der Austauschterm mit dem direkten Hartree-Term verknüpft werden kann. Dies geschieht über eine so genannte Fierz Transformation (siehe zum Beispiel [19]). Dieser mathematische Vorgang erlaubt es, die Gapgleichung auf den Hartree-Term zu reduzieren, in dem die Kopplungskonstante g umdefiniert wird.

Die im später folgenden Abschnitt 2.5 folgende systematische Näherungsmethode wird uns ein weiteres Argument liefern, den Fock-Term außen vor zu lassen.

2.3 Mesonen

Mesonen sind Quark-Antiquark-Zustände. Der Ansatz zu ihrer Beschreibung im NJL-Modell leitet sich aus dem Streuprozess der Quarks her.

2.3.1 Mesonen über die Bethe-Salpeter-Gleichung

Die Quark-Antiquark-Streuung kann mit einer Bethe-Salpeter-Gleichung beschrieben werden.

$$\text{Diagram 1} = \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} \quad (2.18)$$

Der Mesonenpropagator ergibt sich aus der Quark-Antiquark-Streumatrix T .

$$iT_M = iK_M + iK_M(-i\Pi_M)iT_M \quad (2.19)$$

Dabei ist $K_M = \Gamma_M 2g \Gamma_M$ der Streukern und Π_M der Polarisationsloop. Wir schreiben die T -Matrix $T_M = -\Gamma_M D_M(q) \Gamma_M$ und führen die Größe $J_M = \Gamma_M \Pi \Gamma_M$ ein. In der Tat lassen sich die Beiträge durch K_{π^a} und K_σ trennen, denn aufgrund des Isospins mischen die verschiedenen Mesonenarten nicht. Die Loops durch die Mesonen π und σ

$$J_M(q) = i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \{ \Gamma_M S(k+q) \Gamma_M S(k) \}. \quad (2.20)$$

lassen sich in eine kompakte Form schreiben

$$J_\pi(q) = 4N_c N_f i I_1 - 2N_c N_f (q^2) i I(q) \quad (2.21)$$

$$J_\sigma(q) = 4N_c N_f i I_1 - 2N_c N_f (q^2 - 4m^2) i I(q). \quad (2.22)$$

Das Integral iI_1 kennen wir bereits aus dem Abschnitt 2.2.2. Das hier neu eingeführte Integral

$$iI(q) = i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 - m^2 + i\epsilon][(k+q)^2 - m^2 + i\epsilon]}. \quad (2.23)$$

ist im Anhang A.2 genauer diskutiert. Es lässt sich in die Form

$$iI(q) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_k} \frac{1}{q_0^2 - (E_k + E_{kq})^2} \quad (2.24)$$

$$E_k = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}, \quad E_{kq} = \sqrt{(\mathbf{k} + \mathbf{q})^2 + m^2} \quad (2.25)$$

bringen.

Kehren wir mit den neu gewonnen Ausdrücken zurück zu unserer Ausgangsfragestellung. Wir können nun die Bethe-Salpeter-Gleichung anstatt durch T_M und Π_M durch D_M und J_M ausdrücken. Wir erhalten

$$D_M(q) = -2g + 2g J_M D_M(q) \quad (2.26)$$

und so das Ergebnis

$$D_M(q) = \frac{-2g}{1 - 2g J_M(q)}. \quad (2.27)$$

Wir bezeichnen D_M im Folgenden als *Meson-Propagator*. Diese Bezeichnung ist etwas irreführend, da die Meson-Quark-Kopplung bereits in D_M absorbiert ist. Es wäre korrekter, D_M als Mesonpropagator mal dem Quadrat der Meson-Quark-Kopplungskonstanten zu bezeichnen.

2.3.2 Mesonmasse und Kopplungskonstante

Der Propagator D_M ist eine Funktion des Viererimpulses q . Aus Gründen der Kovarianz ist D_M nur von $q^2 = q_0^2 - \mathbf{q}^2$ abhängig und nicht von den einzelnen Komponenten q_0 und \mathbf{q} . Als Funktion einer Variablen aufgefasst, kann D_M nun einen Pol besitzen. Die Polstelle des Propagators identifizieren wir mit der Masse des Mesons. Wir könnten die Definition der Masse schreiben als

$$D_M^{-1}(q^2 = m^2) = 0. \quad (2.28)$$

Wir sind jedoch vorsichtiger und definieren die Masse des Mesons etwas allgemeiner durch die Gleichung

$$1 - 2g\text{Re}J(q^2 = m^2) \stackrel{!}{=} 0. \quad (2.29)$$

Dadurch gelingt es uns, auch dann von einer Masse zu sprechen, wenn keine Polstelle vorhanden ist. Es ist möglich, den erhaltenen Mesonpropagator durch eine Entwicklung um seinen Pol zu nähern, in dem man

$$D_M(q) = \frac{-g_{Mqq}^2}{q^2 - m_M^2} \quad (2.30)$$

fordert. Hier wurde die effektive Meson-Quark-Quark-Kopplungskonstante g_{Mqq} eingeführt. Sie kann über die Entwicklung des Nenners $1 - 2gJ_M$ nach q_0^2 um $q_0^2 = m_M^2 + \mathbf{q}^2$ erhalten werden.

$$1 - 2g\text{Re}J_M(q_0, \mathbf{q}) \approx 1 - 2g\text{Re}J_M(\sqrt{m_M^2 + \mathbf{q}^2}, \mathbf{q}) - 2g \frac{d\text{Re}J_M}{dq_0^2}(\sqrt{m_M^2 + \mathbf{q}^2}, \mathbf{q})(q_0^2 - \mathbf{q}^2 - m_M^2) \quad (2.31)$$

Der erste Term verschwindet nach Voraussetzung, und der zweite Term liefert direkt die gesuchte Kopplungskonstante.

$$g_{Mqq} = \left(\frac{d\text{Re}J_M}{dq_0^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (2.32)$$

Diese so genannte *Polapproximation* nähert die komplizierte Funktion $D_M(q)$ durch eine wesentlich einfache Funktion mit den zwei zu bestimmenden Parametern m_M und g_{Mqq} . Sie entspricht der Parametrisierung der T -Matrix durch einen Mesonen-Austausch in der Näherung freier Mesonen.

2.4 Chirale Theoreme

Im chiralen Limes besitzt das Nambu-Jona-Lasinio-Modell auf Grund der chiralen Symmetrie einige wichtige Eigenschaften. Diese Theoreme gelten auch in der vorgestellten Näherung Hartree+RPA. Da sie einerseits in dieser Arbeit keine direkte Verwendung besitzen, sie andererseits aber zu den fundamentalen Eigenschaften des Nambu-Jona-Lasinio-Modells gehören, stellen wir sie hier vor, beschränken uns aber auf eine kurze Darstellung. Eine genauere Behandlung erfahren die Theoreme in der entsprechenden Literatur (zum Beispiel in [17] und [20]).

Das Goldstone-Theorem

Durch die Gapgleichung wird dynamisch eine endliche Konstituentenquarkmasse erzeugt. Dadurch wird die chirale Symmetrie spontan gebrochen. Spontane Symmetriebrechungen gehen mit der Existenz von Goldstone-Bosonen einher. Diese masselose Anregung, die das Goldstone-Theorem vorhersagt, ist in diesem Fall das Pion. Nach der Definition der Mesonmasse können wir diese Tatsache auch

$$1 - 2g\Pi_\pi(q^2 = 0) = 0 \quad (2.33)$$

schreiben.

Die Goldberger-Treiman-Relation

Die Goldberger-Treiman-Relation verknüpft die Pion-Zerfallskonstante f_π mit der Hartree-Quarkmasse m und der Pion-Quark-Kopplungskonstante $g_{\pi qq}$.

$$f_\pi g_{\pi qq} = m \quad (2.34)$$

Die Konstante f_π ist ein empirischer Parameter, der etwa den Wert $f_\pi = 93$ MeV beträgt. Die Relation gilt tatsächlich auch für die aus der Polapproximation gewonnenen On-shell-Kopplung.

Die Gell-Mann-Oakes-Renner-Relation

Bei endlicher Stromquarkmasse $m_0 \neq 0$ ist die chirale Symmetrie nur noch näherungsweise gegeben. Dennoch gibt es eine Aussage, die über eine Entwicklung nach m_0 gewonnen werden kann.

$$m_\pi^2 f_\pi^2 = -m_0 \langle \bar{\psi} \psi \rangle + O(m_0^2) \quad (2.35)$$

Das hier eingeführte Quarkkondensat $\langle \bar{\psi} \psi \rangle$ hat in Hartree-Näherung die Form

$$\langle \bar{\psi} \psi \rangle = -\frac{m - m_0}{2g}. \quad (2.36)$$




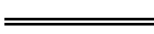
Auch die Gell-Mann-Oakes-Renner-Relation stellt eine Verbindung zu f_π her.

2.5 Entwicklung in $1/N_c$

Das NJL-Modell ist nicht exakt lösbar. Zur Berechnung von Observablen muss daher auf Näherungsmethoden zurückgegriffen werden. Der naheliegendste Gedanke wäre wohl gewöhnliche Störungstheorie, wie sie in üblichen Lehrbüchern (siehe zum Beispiel [21]) beschrieben wird. Dieses Vorgehen, das einer Entwicklung nach Potenzen der Kopplungskonstanten entspricht, scheidet jedoch als möglicher Kandidat aus. Wir wollen das NJL-Modell in einem Bereich untersuchen, in dem die Kopplung, durch die dimensionsbehaftete Kopplungskonstante g im Lagrangian \mathcal{L} verankert, stark ist. Was dies im Zusammenhang mit einer einheitenbehafteten Größe zu bedeuten hat, wird im Abschnitt 2.6 deutlich werden.

Ein Entwicklungsschema des NJL-Modells ist die Entwicklung nach Ordnungen der inversen Anzahl der Farben $1/N_c$ [20, 22, 23, 24, 25]. Zwar ist $N_c = 3$ fest, jedoch bietet diese Entwicklung die Möglichkeit, Eigenschaften des NJL-Modells sukzessive zu berechnen. Es gibt verschiedene Motivationen, genau diese Entwicklung vorzunehmen. Für den bereits eingeschlagenen Weg, auf dem wir die Hartree-Selbstenergie und die RPA-Mesonen π und σ berechnet haben, stellt das $1/N_c$ -Entwicklungsschema eine natürliche Fortsetzung dar. Anschaulich gesprochen wird die Entwicklung darauf hinauslaufen, Korrekturen durch die Meson-Wolken um die Quarks zu berechnen. Doch auch formelle Gründe sprechen für diese Entwicklung. Denn eine wichtige Eigenschaft des NJL-Modells ist das Verhalten für große N_c . In führender Ordnung stimmt dieses Verhalten mit dem der QCD überein. Die $1/N_c$ Entwicklung erhält außer dem die Eigenschaften, die das Modell aufgrund seiner chiralen Symmetrie in der bisherigen Form besitzt, wie das Goldstone-Theorem und die Goldberger-Treiman-Relation.

Die $1/N_c$ -Entwicklung lässt sich zum einen über die effektive Wirkung erhalten [25]. Sie lässt sich jedoch auch auf diagrammatische Weise vollführen, was wir hier tun wollen. Wir folgen dabei im Wesentlichen [17]. Das Abzählen der Ordnungen kann durch den Vergleich der Beiträge geschehen, in denen N_c explizit auftaucht. Nach den Feynmanregeln ist ein geschlossener Quarkloop mit dem Auftreten eines solchen Faktors N_c verbunden, da die Spurbildung durch die Symmetrie im Farbraum genau diesen Faktor liefert. Ein Beispiel für ein solches Auftreten bietet bereits die Gap-Gleichung (2.17). Wir fordern weiterhin, dass der Hartree-Quarkpropagator S die Ordnung N_c^0 besitzt. Dies können wir bei seiner Definition in Gleichung (2.14) erreichen, in dem wir Γ_M und somit g die Ordnung $1/N_c$ zuordnen. Wir erhalten so einzelnene diagrammatische Bausteine, mit denen wir jeweils eine Ordnung in $1/N_c$ verbinden können.

| | | | |
|-------------------------|------------|--|------------|
| Gedresster Propagator | $S(k)$ |  | N_c^0 |
| Geschlossener Quarkloop | $\Pi(p)$ |  | N_c^1 |
| Vierpunkt-Vertex | Γ_M |  | N_c^{-1} |
| RPA-Meson | $D(q)$ |  | N_c^{-1} |

Mit dieser Übersicht ist es nun möglich, den vorgestellten Größen des Modells Ordnung in $1/N_c$ zuzuordnen. Wir erhalten so zum Beispiel für die Hartree-Selbstenergie N_c^0 , für den Fock-Term N_c^{-1} - was abermals unser Vorgehen rechtfertigt, die Quark-Selbstenergie in Hartree-Näherung zu berechnen. Die mesonischen Parameter m_M^2 und g_{Mqq}^2 sind Größen der Ordnung $O(1)$ beziehungsweise $1/N_c$.

Wir werden in dieser Arbeit keine vollständig konsistenten Näherungen in $1/N_c$ vollführen (für solche siehe [20], [17] oder [25]). Es werden aber an einigen entscheidenden Stellen Beiträge benötigt, die durch diese Erweiterungen berechnet werden können.

2.6 Regularisierung

Man betrachte die Gap-Gleichung (2.13) und das in ihr enthaltene Integral iI_1 , welches in Gleichung (2.16) definiert wurde. Schon durch Abzählen der Potenzen von k im Zähler und im Nenner sieht man, dass das Integral nicht existiert. Dass ein solches Verhalten auftritt, kann genau genommen sogar schon an der Lagrangedichte \mathcal{L} abgelesen werden. Das Auftreten der Feldoperatoren in vierter Potenz und schon allein die dimensionsbehaftete Kopplungskonstante g verraten, dass es sich bei dem NJL-Modell um ein nichtrenormierbares Modell handelt. Während man bei einer renormierbaren Quantenfeldtheorie derartige Divergenzen beseitigen kann, bleibt einem hier nichts anderes übrig, als das Integral künstlich auf einen endlichen Wert zubringen. Eine solche Methode nennt man *Regularisierung*.

Eine intuitive Methode (die im folgenden auch weiter diskutiert werden wird) wäre die Einschränkung des Impulsraums auf ein kompaktes Volumen. Kann man bei der Form des Volumens noch mit Symmetrien argumentieren, so bleibt seine Größe ein Wert, der von außen vorgegeben werden muss. Dieser *Cut-off Parameter*, oft mit Λ bezeichnet, stellt einen zusätzlichen Parameter des NJL-Modells dar.

Der Parameter Λ , genau wie auch die Stromquarkmasse m_0 und die Kopplungskonstante g , wird so festgelegt, dass die berechneten Ergebnisse physikalische Werte annehmen. Die Orientierung bietet die Konstituentenquarkmasse m , die Pionmasse m_π und die Pion-Zerfallskonstante f_π .

2.6.1 3er-Impuls-Cut-off

Da man das Integral der Gap-Gleichung als sphärisch symmetrisches Integral über \mathbf{k} schreiben kann, ist es leicht zu realisieren, die Integration nur bis zu einem Radius Λ durchzuführen. Um auf das eingangs beschriebene Bild Bezug zu nehmen: Wir schränken den Impulsraum auf einen Hyperzylinder im vierdimensionalen Energie-Impuls-Raum ein: Während die k_0 -Integration keine Regularisierung erfährt, wird die dreidimensionale \mathbf{k} -Integration auf eine Kugel mit Radius Λ eingeschränkt.

$$i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} f(k, m) \rightarrow i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_0}{(2\pi)} \int_{|\mathbf{k}| < \Lambda} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} f(k, m) \quad (2.37)$$

Ein Vorteil dieses Regularisierungsschemas ist die relativ leichte Umsetzung. Ein deutlicher Nachteil ist, dass es sich um ein nicht-Lorentz-kovariantes Schema handelt. Während die räumliche Isotropie erhalten bleibt, verlieren wir die Translationsinvarianz im Impulsraum. Das führt zum Beispiel zu Problemen bei Mesonen mit endlichem Dreierimpuls.

Parametersätze

In Tabelle 2.1 sind vier Parametersätze vorgestellt. Die äußeren Parameter sind Λ , der Impuls-Cut-off, sowie g und m_0 . Es ist üblich, statt g den dimensionslosen Wert von $g\Lambda^2$ anzugeben, der eine Auskunft über die tatsächliche Stärke der Kopplung geben kann. Mit diesen Parametern lässt sich die Konstituentenquarkmasse in Hartree-Näherung m und die Pion-Masse in RPA m_π berechnen. Diese beiden Größen finden sich ebenfalls in der Tabelle, auch wenn es keine Parameter, sondern Resultate sind. Die hier vorgestellten Parametersätze sind [26] entnommen.

| Nummer | 1 | 2 | 3 | 4 |
|-----------------|-------|-------|-------|-------|
| Λ [MeV] | 664.3 | 587.9 | 569.3 | 568.6 |
| m_0 [MeV] | 5.0 | 5.6 | 5.5 | 5.1 |
| $g\Lambda^2$ | 2.06 | 2.44 | 2.81 | 3.17 |
| m [MeV] | 300 | 400 | 500 | 600 |
| m_π [MeV] | 135 | 135 | 135 | 135 |

Tabelle 2.1: Parametersätze aus [26] für die Regularisierung mit dem 3er-Impuls-Cutoff.

2.6.2 4er-Impuls-Cut-off

Der entscheidende Nachteil des 3er-Cut-offs ist die manifeste Brechung der Symmetrie zwischen k_0 und \vec{k} . Ein naheliegender Gedanke ist es nun, anstatt einer Kugel im dreidimensionalen Raum eine Hyperkugel im vierdimensionalen Raum zu wählen. Dazu muss das entsprechende Integral jedoch zunächst über eine Wick-Rotation in ein euklidisches Integral überführt werden.

$$i \int \frac{dk_0}{(2\pi)} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} f((\mathbf{k}, k_0), m) \rightarrow - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int \frac{dk_4}{(2\pi)} f((\mathbf{k}, ik_4), m) \quad (2.38)$$

$$\rightarrow - \int_{\sqrt{\mathbf{k}^2 + k_4^2} < \Lambda} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{dk_4}{(2\pi)} f((\mathbf{k}, ik_4), m) \quad (2.39)$$

Dieses Schema wird in der vorliegenden Arbeit nicht weiter verfolgt. Ein Parametersatz findet sich zum Beispiel in [19].

2.6.3 Pauli-Villars-Regularisierung

Neben den scharfen Cut-offs, die oben vorgestellt wurden, kann man auch das asymptotische Verhalten für große $|\mathbf{k}|$ derart ändern, dass die Funktion integrabel wird. Dies kann zum Beispiel durch die Subtraktion von zusätzlichen Termen geschehen, die für kleine $|\mathbf{k}|$ relativ klein sind und im Ultraviolett das gleiche asymptotische Verhalten wie der eigentliche Integrand besitzen. Die Pauli-Villars-Regularisierung [27] basiert genau auf diesem Prinzip.

Beim Pauli-Villars-Regularisierungsschema wird die Funktion im Integranden durch eine Summe von $n+1$ dieser Funktionen mit unterschiedlichen Massen m_α und Gewichtungsfaktoren c_α ersetzt. Formal gibt es so also n zusätzliche Felder mit Teilchen, die die Massen m_α besitzen.

$$i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} f(k, m) \rightarrow i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \sum_{\alpha=0}^n c_\alpha f(k, m_\alpha) \quad (2.40)$$

Die Anzahl der nötigen Regulatoren hängt von der Divergenz der auftretenden Integrale ab. Die höchste auftretende Potenz im Integranden der oben eingeführten Integrale tritt in iI_1 in der Gap-Gleichung auf. Um dies zu regularisieren, benötigt man (mindestens) zwei Regulatoren. In dieser Arbeit wird an den meisten Stellen eine solche Pauli-Villars-Regularisierung mit zwei Regulatoren benutzt.

$$i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} f(k, m) \rightarrow i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ f(k, m) - 2f(k, \sqrt{m^2 + \Lambda_q^2}) + f(k, \sqrt{m^2 + 2\Lambda_q^2}) \right\} \quad (2.41)$$

Das Pauli-Villars-Regularisierungsschema ist Lorenz-kovariant. Die Modifikation der Masse bringt jedoch andere Schwierigkeiten mit sich. So findet sich in der Gap-Gleichung oder in der Definition des σ -Polarisationsloops eine Masse als Vorfaktor. Es hat sich als sinnvoll herausgestellt, diese Massen nicht in die Regularisierung mit einzubeziehen, sondern lediglich die elementaren Integrale iI_1 und iI zu regularisieren, deren Integranden ein m im Nenner besitzen. Mit diesem Vorgehen gelingt es, das Pion im chiralen Limes masselos zu erhalten, wie es das Goldstone-Theorem vorhersagt.

| Nummer | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-------------------|------|------|------|------|------|
| Λ_M [MeV] | 0 | 300 | 500 | 600 | 700 |
| Λ_q [MeV] | 800 | 800 | 800 | 820 | 852 |
| m_0 [MeV] | 6.13 | 6.40 | 6.77 | 6.70 | 6.54 |
| $g\Lambda_q^2$ | 2.90 | 3.07 | 3.49 | 3.70 | 4.16 |
| m [MeV] | 260 | 304 | 369 | 446 | 550 |
| m_π [MeV] | 140 | 140 | 140 | 140 | 140 |

Tabelle 2.2: Parametersätze aus [17] für die Pauli-Villars-Regularisierung.

Parametersätze

Die in dieser Arbeit benutzten Parametersätze sind aus [17] entnommen und finden sich in Tabelle 2.2. Sie werden hier mit der Nummer ihrer Spalten bezeichnet. Λ_q ist der Pauli-Villars-Regularisierungsparameter, m_0 und g sind Stromquarkmasse und Kopplungskonstante. Mit diesen drei Parametern lassen sich mit Hilfe der Gap-Gleichung die Konstituentenquarkmasse m und in RPA die Pionenmasse m_π berechnen. Zum Vergleich sind diese ebenfalls in der Tabelle zu finden.

Die Pauli-Villars-Regularisierung ist die einzige Regularisierungsmethode, in der wir Beiträge in nächsthöherer Ordnung in $1/N_c$ ausrechnen werden. Für diese Ordnung wird es wieder nötig sein, Integrale zu regularisieren. Es handelt sich um Integrale über Mesonenimpulse. Wir werden diese Integrale mit einem 3er-Impuls-Cut-off regularisieren (analog zum Vorgehen in Abschnitt 2.6.1). Der dafür notwendigen Parameter Λ_M ist ebenfalls in der Tabelle zu finden und wird als Mesonen-Cut-off bezeichnet.

Kapitel 3

Das Nambu-Jona-Lasinio-Modell im Medium

Das Ziel dieser Arbeit ist es, die Scherviskosität von stark wechselwirkender Materie zu untersuchen. Nun ist es klar, dass die Beschreibung von Quarks und Mesonen im Vakuum dazu nicht ausreichend ist. Fragestellungen zu Transportprozessen gehören klassischerweise zu Untersuchungen von Teilchen und Feldern in Medien.

3.1 Quantenfeldtheorie im Medium

Der entscheidende Zustand einer Feldtheorie im Vakuum ist der Grundzustand des Systems. Es ist der Zustand, der die Energie minimiert. Hier liegt der wesentlich Unterschied zu einer Quantenfeldtheorie bei endlicher Temperatur oder einer Quantenfeldtheorie im Medium, welcher wir uns nun nähern wollen. Wir werden in dieser Arbeit ausschließlich Systeme im thermischen Gleichgewicht betrachten. Das heißt, dass die Systemkonfiguration durch die Forderung von Stationarität festgelegt wird. Diese Konfiguration kann als Grundzustand in dem Sinne angesehen werden, als dass die Freie Energie minimiert wird. Thermisches Gleichgewicht bedeutet, dass die gesamte Konfiguration durch zwei Parameter bestimmt ist: die Temperatur T und das chemische Potential μ . Das chemische Potential μ bezieht sich selbstverständlich auf die beschriebenen Quarks. Da kein anderes chemisches Potential in dieser Arbeit vorkommen wird (zum Beispiel ein Ladungschemisches Potential oder ein Isospin-chemisches Potential), verzichten wir darauf, durch einen Index q zu verdeutlichen, dass sich μ beziehungsweise μ_q auf die Quarks bezieht.

Sind Anregungen aus dem Vakuum-Grundzustand als Teilchen interpretierbar, so werden Anregungen aus dieser Konfiguration als Quasiteilchen bezeichnet. Die Quasiteilchen sind Teilchen-Loch-Anregungen, die eine teilchenartige Dispersionsrelation besitzen. Wir werden in diesem Kapitel trotzdem weiter von Quarks sprechen und nicht von Quasi-Quarks.

Zur Beschreibung der thermodynamischen Eigenschaften von Feldern gibt es zweierlei Methoden: Den Imaginärzeitformalismus (auch als Matsubara-Formalismus bezeichnet) und den Realzeitformalismus. In dieser Arbeit werden wir den Matsubaraformalismus verwenden. Die Grundlagen dieses Ansatzes finden sich in Lehrbüchern wie [28] oder [29].

3.1.1 Vergleich zwischen Vakuum und Medium

Von entscheidender Wichtigkeit ist die Erkenntnis, dass Feynmanregeln und das Berechnen von Erwartungswerten im Medium große Ähnlichkeiten mit den Berechnungen im Vakuum aufweisen. Bei den Berechnungen mit Integralen über Viererimpulse k wird formal die Energieintegration durch eine Summe über fermionische beziehungsweise bosonische Matsubarafrequenzen ω_k ersetzt.

$$i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} f(k) \rightarrow -T \sum_{i\omega_k} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} f(i\omega_k + \mu, \mathbf{k}) \quad (3.1)$$

Die hier eingeführten Matsubarafrequenzen $i\omega_k$ besitzen die Gestalt

$$i\omega_k = (2n + 1)\pi iT, \quad \text{für Fermionen} \quad (3.2)$$

$$i\omega_k = 2n\pi iT, \quad \text{für Bosonen} \quad (3.3)$$

mit $n \in \mathbb{Z}$. Anders, als es sonst üblich ist, werden wir die Matsubara-Frequenzen nicht allgemein $i\omega_n$ nennen und die Summe über n laufen lassen, sondern sie mit dem Buchstaben des zugehörigen Dreierimpulses als Index versehen, hoffend, dass es der Lesbarkeit und Transparenz dient.

Wie ändert nun das Medium die charakteristischen Eigenschaften der NJL-Quarks? Gibt es einen Bezug zu den Größen im Vakuum? Nun, einerseits ist das Vakuum über den Grenzwert

$$f_{\text{Vakuum}} = \lim_{T \rightarrow 0} \lim_{\mu \rightarrow 0} f_{T,\mu} \quad (3.4)$$

erreichbar. Das lässt sich bereits an Gleichung (3.1) nachvollziehen, wobei man ein Wick-rotiertes Integral (vergleiche Gleichung (2.39)) erhält. Zudem lassen sich die modifizierten Integrale auf gewisse Weise in einen Vakuumanteil und einen Mediumanteil aufspalten. Dies erlaubt es, die Änderungen bei endlicher Temperatur nachzuvollziehen.

Wie man an Gleichung (3.1) erkennt, ist die Symmetrie zwischen Energie- und Impulskoordinate im Medium verloren gegangen. Es gibt schließlich ein ausgezeichnetes Bezugssystem in der Beschreibung von Feldern im thermischen Gleichgewicht: Das Ruhesystem des Mediums.

3.1.2 Regularisierung im Medium

Die auftretenden Integrale lassen sich mit den gleichen Schemata regularisieren, wie dies in 2.6 beschrieben wurde. Es ist aber trotzdem lohnenswert, sie neu zu diskutieren und Varianten davon zu untersuchen.

Der 3er-Impuls-Cut-off hatte den entscheidenden Nachteil, dass er nicht Lorenz-kovariant ist. Da es bei endlicher Temperatur aber ein ausgezeichnetes Bezugssystem, das Ruhesystem des Mediums, gibt, kann dieser Nachteil mit Eigenschaften des Mediums motiviert werden.

Zerlegt man die auftretenden Integrale in Vakuum- und Mediumanteil, so sind nur die Vakuumanteile divergent. Man könnte also das Regularisierungsschema alleine auf den Vakuumanteil anwenden, während man den Mediumanteil unregularisiert lässt.

$$\begin{aligned} i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} f(k, m) &= i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \{f_{\text{Vakuum}}(k, m) + f_{\text{Medium}}(k, m)\} \\ &\rightarrow i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} (f_{\text{Vakuum}}(k, m) + \text{reg.}) + i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} f_{\text{Medium}}(k, m) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Diese Methode wird in dieser Arbeit nicht angewandt. In Kapitel 4 wird sie jedoch noch für einen Vergleich wichtig sein.

Zerlegt man die auftretenden Impulsintegrale in Real- und Imaginärteil, so ist nur der Realteil divergent. Man könnte den Imaginärteil unregularisiert belassen.

$$\begin{aligned} i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} f(k, m) &= \text{Rei} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} f(k, m) + \text{Imi} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} f(k, m) \\ &\rightarrow \text{Rei} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} (f(k, m) + \text{reg.}) + \text{Imi} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} f(k, m) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Auch hiervon wird abgesehen. Im Abschnitt 3.3 wird diese Idee jedoch kurz auftauchen.

Wir entscheiden uns dafür, die auftretenden Integrale als Ganzes zu regularisieren, ohne die Integranden vorher in verschiedene Anteile zu zerlegen. Als Parameter werden die im Kapitel 2.6 aufgelisteten Werte verwendet.

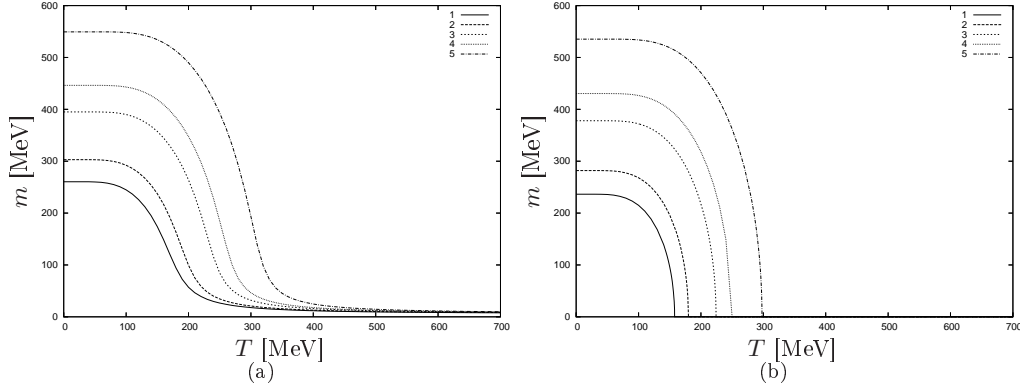


Abbildung 3.1: Hartree-Quarkmasse m als Funktion der Temperatur T für verschiedene Pauli-Villars-Parametersätze (siehe Tabelle 2.2). Abbildung (a) beschreibt das Verhalten für die tabellierte Stromquarkmasse m_0 , Abbildung (b) ist der Vergleich im chiralen Limes $m_0 = 0$. In Abbildung (b) wird tatsächlich für jeden Parametersatz bei einer bestimmten Temperatur die Masse $m = 0$.

3.2 Quarks

Die Gapgleichung (2.13) behält ihre Struktur, jedoch wird das auftretende Integral iI_1 nach der Vorschrift (3.1) transformiert. Wir erhalten somit

$$iI_1 = -T \sum_{\omega_k} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(i\omega_k)^2 - \mathbf{k}^2 + i\epsilon}. \quad (3.7)$$

In Anhang B.1 ist beschrieben, wie man iI_1 auf den Ausdruck

$$iI_1 = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_k} (1 - n_k - \bar{n}_k) \quad (3.8)$$

bringen kann. Hierbei sind

$$n_k = n_F(E_k - \mu), \quad \bar{n}_k = n_F(E_k + \mu) \quad (3.9)$$

mit der Fermi-Verteilungsfunktion $n_F(x) = (\exp(x/T) + 1)^{-1}$. Man beachte, wie einfach es scheint, den Integranden von iI_1 in einen Vakuum- und einen Medium-Anteil aufzuteilen. Dies ist jedoch ein wenig trügerisch, da die in beiden Gleichungen enthaltene Konstituentenquarkmasse m sehr wohl vom Medium beeinflusst wird.

Für $T = 0$, $\mu = 0$ erhalten wir die in den Parametertabellen 2.1 und 2.2 angegebenen Massen m . Bei endlicher Temperatur weicht die Lösung der Gap-Gleichung von der Vakuumlösung ab - sie wird kleiner. Im chiralen Limes verschwindet die Konstituentenquarkmasse bei einer kritischen Temperatur. Dieses Verhalten ist für die unterschiedlichen Pauli-Villars-Parametersätze in Abbildung 3.1 zu sehen. Das chemische Potential bleibt bei $\mu = 0$, während die Temperatur variiert wird.

Auch bei endlichem chemischem Potential wird die Konstituentenquarkmasse kleiner. Hier ist ein weiteres Verhalten beobachtbar: Die Gap-Gleichung besitzt unter Umständen mehrere Lösungen. Was diese Lösungen bedeuten und warum wir uns aus physikalischen Gründen für eine bestimmte entscheiden, wird in Kapitel 4 klar werden. Trotzdem wird in Abbildung 3.2 das Verhalten von m als Funktion von μ bei Temperatur $T = 0$ gezeigt, da es zum Mediumverhalten der Konstituentenquarkmasse m gehört.

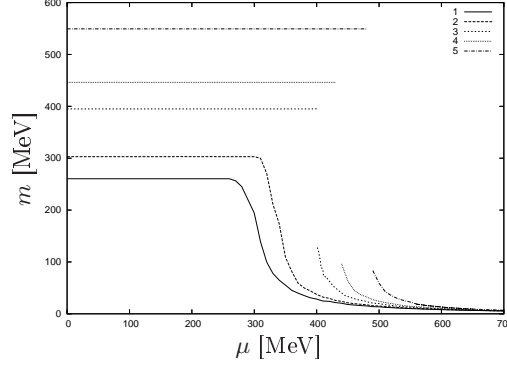


Abbildung 3.2: Hartree-Quarkmasse m als Funktion des chemischen Potentials μ für verschiedene Pauli-Villars-Parametersätze (siehe Tabelle 2.2).

3.3 Mesonen

Die Bethe-Salpeter-Gleichung behält ihre Form wie in Abschnitt 2.3. Der Polarisationsloop J_M wird im Imaginärzeit-Matsubara-Formalismus berechnet.

$$J_M(i\omega_q, \mathbf{q}) = T \sum_{i\omega_k} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \text{Tr}(S(i\omega_k, \mathbf{k}) \Gamma_M S(i\omega_k + i\omega_q, \mathbf{k} + \mathbf{q}) \Gamma_M) \quad (3.10)$$

Die äußerer Frequenz $i\omega_q$ ist eine bosonische Matsubara-Frequenz $i\omega_q = 2\pi inT$, $n \in \mathbb{N}$. Man beachte, dass die Summe einer bosonischen und einer fermionischen Matsubarafrequenz eine fermionische Matsubara-Frequenz ergibt. Aus der Bethe-Salpeter-Gleichung gewinnt man den Matsubara-Propagator des Mesons

$$\mathcal{D}_M(i\omega_q, \mathbf{q}) = \frac{-2g}{1 - 2gJ_M(i\omega_q, \mathbf{q})}. \quad (3.11)$$

Um den retardierten Propagator zu bekommen, aus dem sich die Masse des Mesons extrahieren lässt, wird die stetige Fortsetzung $i\omega_q \rightarrow q_0 + i\delta$ durchgeführt. Wir schreiben wieder J_M als Kombination elementarer Integrale.

$$\begin{aligned} J_\pi(q_0, \mathbf{q}) &= 4N_c N_f iI_1 - 2N_c N_f ((q_0 + i\delta)^2 - \mathbf{q}^2) iI(q_0 + i\delta, \mathbf{q}) \\ J_\sigma(q_0, \mathbf{q}) &= 4N_c N_f iI_1 - 2N_c N_f ((q_0 + i\delta)^2 - \mathbf{q}^2 - 4m^2) iI(q_0 + i\delta, \mathbf{q}) \end{aligned} \quad (3.12)$$

mit

$$iI(q_0, \mathbf{q}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ \left(\frac{1}{E_k} - \frac{n_k + \bar{n}_k}{2E_{kq} E_k} s_E \right) \frac{1}{q_0^2 - s_E^2} - \frac{n_k + \bar{n}_k}{2E_{kq} E_k} d_E \frac{1}{q_0^2 - d_E^2} \right\} \quad (3.13)$$

$$E_k = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}, \quad E_{kq} = \sqrt{(\mathbf{k} + \mathbf{q})^2 + m^2} \quad (3.14)$$

$$s_E = E_{kq} + E_k, \quad d_E = E_{kq} - E_k. \quad (3.15)$$

Das elementare Integral iI , das den gleichnamigen Vakuumausdruck auf endliche T und μ verallgemeinert, wird in Anhang B.2 hergeleitet. Leicht kann man den Vakuum- und den Mediumanteil des Integranden identifizieren.

Wir besitzen nun die Matsubara-Mesonenpropagatoren $\mathcal{D}_M(i\omega_q, \mathbf{q})$ sowie die retardierten Propagatoren

$$D_M(q_0, \mathbf{q}) = \frac{-2g}{1 - 2gJ_M(q_0, \mathbf{q})}. \quad (3.16)$$

Wie zu Beginn des vorangegangenen Kapitels versprochen, werden wir jetzt die Eigenschaften der RPA-Mesonen genauer diskutieren.

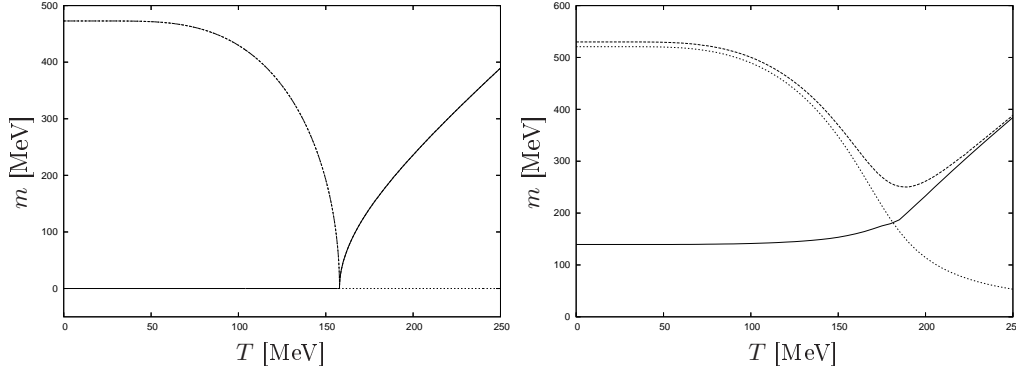


Abbildung 3.3: Masse von π (durchgezogene Linie) und σ (gestrichelte Linie) als Funktion der Temperatur T bei $\mu = 0$ und $\mathbf{q} = 0$. Pauli-Villars-Parametersatz 1, auf der linken Abbildung im chiralen Limes. Als Vergleich ist die doppelte Konstituentenquarkmasse (gepunktete Linie) mit eingezeichnet. Man beachte, dass im chiralen Limes stets zwei Linien aufeinander liegen.

3.3.1 Mesonenmassen im Medium

Aus den Polen des retardierten Propagators, beziehungsweise aus den Nullstellen von $1 - 2gJ_M$, lässt sich ebenso wie in 2.3 die Masse der π -Mesonen und des σ -Mesones berechnen. Die so erhaltenen Massen sind nun abhängig von der Temperatur T und dem chemischen Potential μ . Ein Verlauf ist in Abbildung 3.3 dargestellt. Sie zeigt sowohl das Verhalten des gewöhnlichen Pauli-Villars-Parametersatzes 1 wie auch das des gleichen Satzes im chiralen Limes $m_0 = 0$.

Um das Verhalten zu verstehen, betrachte man den chiralen Grenzfall. Im Vakuum ist die chirale Symmetrie $SU(2)_V \otimes SU(2)_A$ spontan gebrochen. Obwohl das Stromquark masselos ist, besitzt die Gagleichung Lösungen außerhalb der Null, die Konstituentenquarkmasse hat einen endlichen Wert. Wie bereits angesprochen, geht diese spontane Symmetriebrechung mit der Existenz von Goldstone-Bosonen einher, hier dem masselosen Pion. Bei niedrigen Temperaturen bleiben diese Eigenschaften vorerst so. Die Konstituentenquarkmasse m sinkt bei steigender Temperatur T immer weiter. Die Masse des σ -Mesons ist dabei exakt so groß wie die doppelte Konstituentenquarkmasse. Bei einer bestimmten Temperatur geht die Konstituentenquarkmasse auf Null. An diesem kritischen Punkt ist $m = m_\pi = m_\sigma = 0$. Bei höheren Temperaturen ist die Symmetrie restauriert ($m = 0$) und, wie sofort aus Gleichung (3.12) ersichtlich ist, π - und σ -Mesonen sind entartet.

Bei endlicher Stromquarkmasse m_0 ist die $SU(2)_V \otimes SU(2)_A$ -Symmetrie nur approximativ. Das Pion hat nicht die Masse null, aber eine Masse, die deutlich unter m und m_σ liegt. Die Massen von π und σ sind bei hoher Temperatur zwar nicht gleich, nähern sich aber stark an. Auch das ist eine direkte Konsequenz aus Gleichung (3.12).

Interessant ist auch, wie sich die Massen des Mesons als Funktion des Dreierimpulses \mathbf{q} verhalten. Da iI im Medium nicht mehr alleine von q^2 , sondern separat von q_0 und \mathbf{q} abhängt, müssen wir die Mesonenmasse bei endlichem Dreierimpuls \mathbf{q} etwas genauer definieren.

$$1 - 2g\text{Re}J_M(q_0 = \sqrt{m_M^2(\mathbf{q}) + \mathbf{q}^2}, \mathbf{q}) = 0. \quad (3.17)$$

Während im Vakuum aus Gründen der Kovarianz keine Abhängigkeit zu erwarten ist, kann bei endlicher Temperatur und Dichte das Bezugssystem des Mediums eine solche Abhängigkeit verursachen. In der Tat sieht man in Abbildung 3.4, dass die Masse für kleine Temperaturen nahezu konstant ist, für hohe Temperaturen jedoch als Funktion von \mathbf{q} deutlich abfällt.

3.3.2 Die Spektralfunktion

Eine Möglichkeit, Zweipunkt-Greensfunktionen zu charakterisieren, ist die *Spektralfunktion*. Diese Größe wird in den üblichen Lehrbüchern (empfehlenswert ist zum Beispiel [30], aber auch in [28] findet sich einiges) diskutiert. Es sei davor gewarnt, dass es verschiedene Definitionen der Spektralfunktion gibt, die sich im Wesentlichen durch Vorzeichen und imaginäre Einheiten unterscheiden.

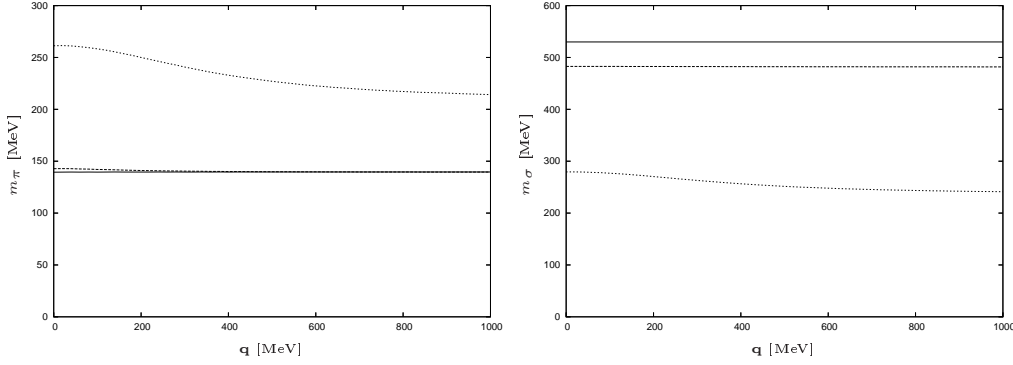


Abbildung 3.4: Masse eines Pauli-Villars regularisierten π -Mesons (links) bzw. σ -Mesons (rechts) als Funktion des 3er-Impulses \mathbf{q} bei $\mu = 100$. Die Temperatur beträgt 0 MeV (durchgezogene Linie), 100 MeV (gestrichelte Linie) bzw. 200 MeV (gepunktete Linie). Pauli-Villars-Parametersatz 1.

Die Spektralfunktion ρ_M eines Mesons M ist mit dem Propagator über die Gleichung

$$\rho_M(q_0) = -2\text{Im}D_M(q_0) \quad (3.18)$$

verknüpft, wobei D_M der retardierte Propagator ist. Es gilt

$$D_M(q_0) = \mathcal{D}_M(i\omega_n)|_{i\omega_n \rightarrow q_0 + i\delta}. \quad (3.19)$$

Die Spektralfunktion $\rho(q_0)$ besitzt einige interessante Eigenschaften.

Antisymmetrie

$$\rho(q_0) = -\rho(-q_0) \quad (3.20)$$

Positivität

$$q_0\rho(q_0) \geq 0 \quad (3.21)$$

Summenregel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq_0}{2\pi} q_0 \rho(q_0) = 1 \quad (3.22)$$

Die letzte Regel wird von der mesonischen Spektralfunktion der obigen Definition verletzt, da, wie bereits diskutiert, die Kopplungskonstante g_{Mqq} im Propagator D_M absorbiert ist. Die Positivität ist bei Pauli-Villars-Regularisierung nicht erfüllt, da der Imaginärteil im Ultraviolett einen Vorzeichenwechsel durch den Beitrag der Regularisatoren hat. Dies könnte vermieden werden, in dem der Imaginärteil unregularisiert verbleiben würde, jedoch würden dann die analytischen Eigenschaften verloren gehen. Die Spektralfunktion besitzt die schöne und intuitive Interpretation als *Zustandsdichte* des Systems. Dieses Bild kann bei der folgenden Diskussion hilfreich sein.

Wir wenden uns der konkreten Berechnung der Spektralfunktion aus dem Mesonpropagator D_M zu. Dieser Propagator enthält als wesentliches Element die Funktion J_M . Wir bilden nun den Real- und Imaginärteil von $J(i\omega_n \rightarrow q_0 + i\delta)$ und erhalten

$$\begin{aligned} J_\pi(q_0 + i\delta, \mathbf{q}) &= 4N_c N_f i I_1 - 2N_c N_f (q_0^2 - \mathbf{q}^2) \text{Re}iI \\ &\quad + i(-4N_c N_f q_0 \delta \text{Re}iI - 2N_c N_f (q_0^2 - \mathbf{q}^2) \text{Im}iI) \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} J_\sigma(q_0 + i\delta, \mathbf{q}) &= 4N_c N_f i I_1 - 2N_c N_f (q_0^2 - \mathbf{q}^2 - 4m^2) \text{Re}iI \\ &\quad + i(-4N_c N_f q_0 \delta \text{Re}iI - 2N_c N_f (q_0^2 - \mathbf{q}^2 - 4m^2) \text{Im}iI) \end{aligned} \quad (3.24)$$

Auf analoge Weise lässt sich der benötigte Imaginärteil von iI herleiten. Die genaue Rechnung findet sich im Anhang B.3.

Falls $q_0^2 - \mathbf{q}^2 > 0$ (zeitartiger Impuls), gilt

$$\begin{aligned} \text{Im}iI(q_0, \mathbf{q}) &= \frac{1}{16\pi} \theta(q_0^2 - \mathbf{q}^2 - 4m^2) \text{sgn}(q_0) \\ &\times \left(-\sqrt{1 - \frac{4m^2}{q_0^2 - \mathbf{q}^2}} + \frac{1}{|\mathbf{q}|} \int_{|\frac{q_0}{2}| - \sqrt{\Delta}}^{|\frac{q_0}{2}| + \sqrt{\Delta}} dE_k(n_k + \bar{n}_k) \right), \end{aligned} \quad (3.25)$$

falls $q_0^2 - \mathbf{q}^2 < 0$ (raumartiger Impuls), gilt

$$\text{Im}iI(q_0, \mathbf{q}) = \frac{1}{16\pi} \text{sgn}(q_0) \int_{\sqrt{\Delta} - |\frac{q_0}{2}|}^{\sqrt{\Delta} + |\frac{q_0}{2}|} dE_k(n_k + \bar{n}_k). \quad (3.26)$$

Dabei ist

$$\sqrt{\Delta} = \frac{|\mathbf{q}|}{2} \sqrt{\frac{q^2 - 4m^2}{q^2}}. \quad (3.27)$$

Der (Matsubara-)Mesonpropagator \mathcal{D}_M ist

$$\mathcal{D}_M(i\omega_q, \mathbf{q}) = -\frac{2g}{1 - 2gJ_M(i\omega_q, \mathbf{q})} \quad (3.28)$$

Der retardierte Mesonpropagator $D_M(q_0, \mathbf{q})$ ergibt sich aus der stetigen Fortsetzung $i\omega_q \rightarrow q_0 + i\delta$, $\delta > 0$ und infinitesimal. Zerlegt in Real- und Imaginärteil erhält man

$$\text{Re}D_M = -2g \frac{1 - 2g\text{Re}J_M}{(1 - 2g\text{Re}J_M)^2 + (2g\text{Im}J_M)^2} \quad (3.29)$$

$$\text{Im}D_M = \begin{cases} 2\pi g \delta (1 - 2g\text{Re}J_M) & \text{falls } \text{Im}iI = 0 \\ -4g^2 \frac{\text{Im}J_M}{(1 - 2g\text{Re}J_M)^2 + (2g\text{Im}J_M)^2} & \text{falls } \text{Im}iI \neq 0 \end{cases} \quad (3.30)$$

Das Argument der δ -Funktion ist genau Null, wenn $q^2 = m_M^2$. Nun kann es zu zwei verschiedenen Situationen kommen. Ist

$$\text{Im}J_M(q_0 = \sqrt{m_M^2(\mathbf{q}) + \mathbf{q}^2}, \mathbf{q}) = 0, \quad (3.31)$$

so besitzt der Realteil des Propagator eine Polstelle bei $q^2 = m_M^2$, das Meson ist stabil. Der Imaginärteil besteht aus einem δ -Peak bei der Masse sowie den Kontinuumsanteilen. Ein solcher Fall ist beim π -Meson im Vakuum und bei niedrigen Temperaturen und Dichten realisiert.

Ist dagegen

$$\text{Im}J_M(q_0 = \sqrt{m_M^2(\mathbf{q}) + \mathbf{q}^2}, \mathbf{q}) \neq 0, \quad (3.32)$$

so erreicht der Realteil bei $q^2 = m_M^2$ einen endlichen Wert. Das Meson ist instabil und hat eine Breite. Die Bedingungen für den δ -Peak sind nicht erfüllbar: Das Argument der δ -Funktion ist nie Null, wenn die Bedingung $\text{Im}iI = 0$ erfüllt ist. Die Spektralfunktion besitzt keinen δ -Peak, sondern lediglich ein lokales Maximum in der Nähe von $q_0^2 = m_M^2 + \mathbf{q}^2$. Diese Situation tritt beim σ -Meson und bei hohen Temperaturen und Dichten auch beim π -Meson auf.

Die Meson-Spektralfunktion besteht also aus bis zu drei verschiedenen Anteilen, die alle eine physikalische Interpretation besitzen.

Der Teilchen-Loch-Branch Für raumartige Impulse, $q_0^2 - \mathbf{q}^2 < 0$, gibt es im Vakuum keine Beiträge. Im Medium dagegen ist die Spektralfunktion in diesem Bereich von Null verschieden. Diese Beiträge kann man als Streuprozesse interpretieren.

Der Massenpol Die Spektralfunktion eines freien Teilchen besteht ausschließlich aus dem Massenpol - einer δ -Funktion bei $q_0^2 = m_M^2 + \mathbf{q}^2$. Auch das Pion besitzt im Vakuum einen Massenpol.

Das Kontinuum Ist $q_0^2 - \mathbf{q}^2 > (2m)^2$, so geht das Kontinuum der Spektralfunktion auf. Es rührt von der Produktion von Quark-Antiquark-Zuständen her, die bei diesen Energien möglich werden.

In Abbildung 3.5 sind die Spektralfunktionen ρ_M von π - und σ -Meson als Funktion der Energie q_0 bei verschiedenen Temperaturen dargestellt. Man beachte die unterschiedliche Skalierung an den Achsen. Der σ -Massenpeak ist aufgrund der Übersichtlichkeit in der Regel abgeschnitten. Im Vakuum beispielsweise erreicht das Maximum des Peaks $2.6 \cdot 10^{-3} \text{ MeV}^{-2}$ - das ist mehr als zwei Größenordnungen über dem Kontinuum des π -Mesons. Abbildung (a) zeigt die Spektralfunktion im Vakuum. Im Vakuum ist die Spektralfunktion für raumartige Viererimpulse Null. Die Graphen (a) bis (d) enthalten den δ -Peak des scharfen Pions. In Abbildung (e) und (f) ist $m_\pi > 2m$, das Pion ist nunmehr nur eine Resonanz. In Abbildung (f) erkennt man gut die asymptotische Entartung von π und σ für hohe Temperaturen. Bevor wir uns einer Anwendung der Spektralfunktion zuwenden, führen wir eine sinnvolle Kurzschreibweise ein.

$$\text{Im}\tilde{D} := -4g^2 \frac{\text{Im}J}{(1 - 2g\text{Re}J)^2 + (2g\text{Im}J)^2} \quad (3.33)$$

Somit können wir den Imaginärteil des Propagator schreiben als

$$\text{Im}D = \text{Im}\tilde{D} + a\delta(\epsilon \pm m_\pi) \quad (3.34)$$

mit $a = 0$ falls $m_\pi > 2m$. $\text{Im}\tilde{D}$ korrespondiert also zu den Teilchen-Loch-Branch- und Kontinuumsanteilen der Spektralfunktion, der Massenpol ist absepariert.

3.3.3 Stetige Fortsetzung

Mithilfe der Spektralfunktion ist es möglich, den nur für reelle Werte q_0 definierten retardierten Propagator oder den nur für Matsubarafrequenzen $i\omega_n$ definierten Matsubarapropagator stetig für beliebige $z \in \mathbb{C}$ fortzusetzen.

$$D(z, \vec{q}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\epsilon}{2\pi} \frac{\rho(\epsilon, \mathbf{q})}{z - \epsilon} \quad (3.35)$$

Dies ist die so genannte *Lehmann-Darstellung* eines Propagators. Wir beweisen diese Aussage über den Cauchyschen Integralsatz für $z \notin \mathbb{R}$. Wir schreiben den Propagator D in der komplexen Ebene als

$$D(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}_z} d\omega \frac{D(\omega)}{\omega - z} \quad (3.36)$$

Hierbei ist \mathcal{C}_z ein geschlossener Weg um z . Wir wissen, dass D auf der reellen Achse einen Branchcut besitzt und außerhalb analytisch ist und nehmen ferner an, dass gilt $\lim_{z \rightarrow \infty} D(z) = 0$. Der Integrand hat neben dem Branchcut noch einen Pol bei $z = \omega$. Wir addieren nun einen zusätzlichen Weg \mathcal{C}' , der keinen Beitrag hat, nämlich einen Kreis mit einem sehr großen Durchmesser. Wir verformen \mathcal{C}' ein wenig in den analytischen Bereichen, wie es in Abbildung 3.6 gezeigt ist. Nun können wir das Integral umschreiben.

$$D(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{D(\omega + i\epsilon) - D(\omega - i\epsilon)}{\omega - z} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{-2\text{Im}D(\omega)}{z - \omega} \quad (3.37)$$

Wir erkennen sofort die Lehmann-Darstellung mit der Spektralfunktion $\rho = -2\text{Im}D$ wieder. Für den Matsubara-Meson-Propagator $\mathcal{D}_M(i\omega_n)$ erhalten wir als Beispiel den Ausdruck

$$\mathcal{D}_M(i\omega_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\epsilon}{2\pi} \frac{\rho_M(\epsilon)}{i\omega_n - \epsilon}. \quad (3.38)$$

Wir setzen nun die Ausdrücke ein, die wir oben für die mesonische Spektralfunktion erhalten haben. Eingesetzt erhält man für $\text{Im}iI(m_\pi) = 0$

$$\begin{aligned} D(z, \mathbf{q}) &= -\frac{2m_\pi \text{sgn}(\text{Re}I(\sqrt{m_\pi^2 + \mathbf{q}^2}, \mathbf{q}))}{m_\pi \text{Re}I(\sqrt{m_\pi^2 + \mathbf{q}^2}, \mathbf{q}) + \frac{1}{2}(m_\pi^2 + \mathbf{q}^2) \text{Re}I'(\sqrt{m_\pi^2 + \mathbf{q}^2}, \mathbf{q})} \frac{1}{z^2 - m_\pi^2} \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\epsilon}{2\pi} \frac{-2\text{Im}\tilde{D}(\epsilon)}{z - \epsilon} \end{aligned} \quad (3.39)$$

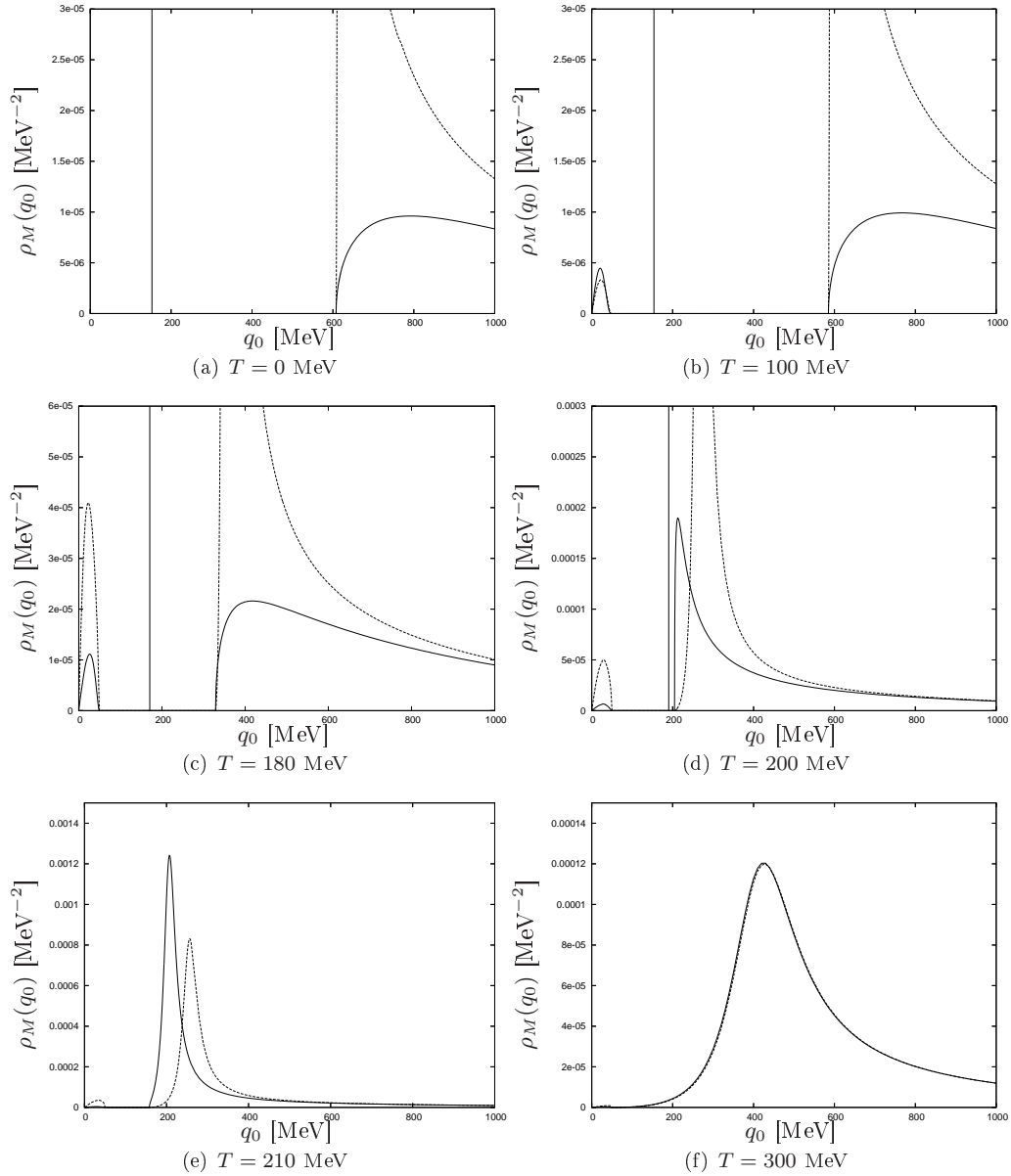


Abbildung 3.5: Spektralfunktionen $\rho_M(q_0, \mathbf{q})$ von π - (durchgezogene Linie) und σ -Meson (gestrichelte Linie) als Funktion der Energie q_0 . Pauli-Villars-Parametersatz 2, $|\mathbf{q}| = 50$ MeV, $\mu = 0$.

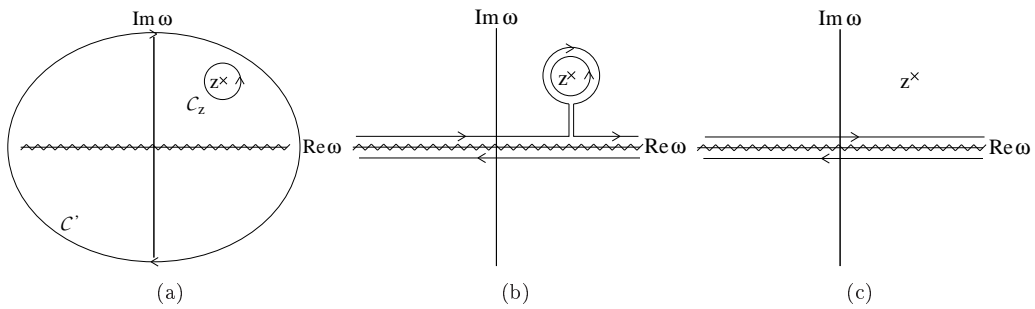


Abbildung 3.6: Verformung von Integrationswegen in der komplexen Zahlenebene, die von Gleichung (3.36) zur Gleichung (3.37) führt.

und für $\text{Im}iI(m_\pi) \neq 0$

$$D(z, \mathbf{q}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\epsilon}{2\pi} \frac{-2\text{Im}\tilde{D}(\epsilon)}{z - \epsilon}. \quad (3.40)$$

$\text{Re}iI'$ bezeichnet die Ableitung von $\text{Re}iI$ nach q_0 . Der zweite Summand in Gleichung (3.39) ist (für reelle $\omega = z$) proportional zu $(\omega^2 - \mathbf{q}^2 - m_\pi^2)^{-1}$. Ein solcher Ausdruck für den Propagator ist uns nicht unbekannt - wir erkennen hier die Polapproximation aus Gleichung (2.30) wieder. Diese können wir also auch aus der stetigen Fortsetzung des Propagators verstehen. Die Polapproximation ist die Vernachlässigung der Teilchen-Loch-Branch- und Kontinuumsanteile. Die Kopplungskonstante $g_{\pi qq}$ kann aus dem Vorfaktor des entsprechenden Summanden gewonnen werden, wie es in Abschnitt 2.3 beschrieben wurde.

Kapitel 4

Thermodynamik von NJL-Quarkmaterie

4.1 Einführung

Nachdem das letzte Kapitel bereits das NJL-Modell im thermischen Gleichgewicht behandelt hat, werden wir uns in diesem Kapitel mit der Thermodynamik etwas intensiver auseinandersetzen. Dies wird uns erlauben, die bisherigen Erkenntnisse über die Gapgleichung (2.13) und die Konstituentenquarks besser zu verstehen. Auf natürliche Weise erhalten wir Einblicke in das QCD-Phasendiagramm. Ziel dieses Abschnitts ist es, Eigenschaften der von unserem Modell beschriebenen Materie im Medium, also bei endlicher Temperatur und Dichte, zu berechnen. Dazu verwenden wir, wie auch [17] und [26], den Matsubara-Formalismus. Wir werden das thermodynamische Potential pro Volumen Ω und die Entropiedichte s berechnen.

Die zentrale Größe zur Berechnung thermischer Observablen ist \mathcal{Z} , die großkanonische Zustandssumme.

$$\mathcal{Z} = \text{Tr} \exp \left(-\beta \int d^3x (\mathcal{H} - \mu \bar{\psi} \gamma_0 \psi) \right) \quad (4.1)$$

Hierbei ist \mathcal{H} die Hamiltondichte.

$$\mathcal{H} = \bar{\psi} (-\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla} + m) \psi - g [(\bar{\psi} \psi)^2 + (\bar{\psi} i \gamma_5 \vec{\tau} \psi)^2] \quad (4.2)$$

Mit Hilfe der Zustandssumme lässt sich der thermische Mittelwert eines Operators A berechnen. So ist die Dichte n beispielsweise

$$n = \langle \bar{\psi} \gamma_0 \psi \rangle = \langle \psi^\dagger \psi \rangle. \quad (4.3)$$

Das großkanonische thermodynamische Potential pro Volumen Ω ist mit der großkanonischen Zustandssumme über die Gleichung

$$\Omega(T, \mu) = -\frac{T}{V} \ln \mathcal{Z} \quad (4.4)$$

verknüpft. Die Entropiedichte s ist

$$s = -\frac{\partial \Omega}{\partial T}. \quad (4.5)$$

Ω und s sind die wesentlichen Größen des folgenden Kapitels. Da wir \mathcal{Z} aufgrund der komplizierten Struktur von \mathcal{H} nach Gleichung (4.2) nicht berechnen können, sind wir gezwungen, auf systematische Näherungsmethoden zurückzugreifen.

4.2 Mean-field

In diesem Abschnitt wird das NJL-Mean-field-Modell entwickelt. Es weist nicht nur eine eminente Verbindung zur bereits diskutierten Gapgleichung (2.13) auf, sondern ist auch besonders

naheliegend. Es war bereits die Rede davon, dass das NJL-Modell historisch sehr von der mikroskopischen Theorie der Supraleitung inspiriert war. Das nun folgende Mean-Field-Modell weist so zahlreiche Parallelen zur bekannten Mean-Field-BCS-Theorie in Festkörpern auf. Wir orientieren uns in der Herleitung an dem Zugang, der zum Beispiel auch von [26], [31] und [32] besprochen wird.

4.2.1 Herleitung

Wir gehen vom Lagrangian des NJL-Modells nach Gleichung (2.1) aus. Wir spalten $\bar{\psi}\psi$ auf

$$\bar{\psi}\psi = \langle \bar{\psi}\psi \rangle + \delta_\sigma \quad (4.6)$$

in den Mittelwert $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ (das Quarkkondensat), und die Fluktuationen δ_σ aus diesem Mittelwert.

$$\delta_\sigma = \bar{\psi}\psi - \langle \bar{\psi}\psi \rangle \quad (4.7)$$

Der Index σ deutet an, dass es sich um das skalare Quarkkondensat handelt, daneben gibt es auch noch das pseudoskalare Quarkkondensat $\langle \bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi \rangle$, zu dem ebenfalls Fluktuationen

$$\delta_\pi = \bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi \quad (4.8)$$

gehören. Die Mean-Field-Approximation erhält man, in dem man nun den biquadratischen Term durch Vernachlässigung der Fluktuationen nähert.

$$\Rightarrow (\bar{\psi}\psi)^2 = -\langle \bar{\psi}\psi \rangle^2 + 2\bar{\psi}\psi\langle \bar{\psi}\psi \rangle + \delta_\sigma^2 \quad (4.9)$$

$$\approx -\langle \bar{\psi}\psi \rangle^2 + 2\bar{\psi}\psi\langle \bar{\psi}\psi \rangle \quad (4.10)$$

Somit erhält man den Mean-field-Lagrangian

$$\mathcal{L}_{mf} = \bar{\psi}(i\vec{\not{D}} - m_0)\psi + g[-\langle \bar{\psi}\psi \rangle^2 + 2\bar{\psi}\psi\langle \bar{\psi}\psi \rangle] \quad (4.11)$$

$$= \bar{\psi}(i\vec{\not{D}} - m_0 + 2g\langle \bar{\psi}\psi \rangle)\psi - g\langle \bar{\psi}\psi \rangle^2. \quad (4.12)$$

Das Quark-Kondensat $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ ist ein noch unbestimmter, reeller Parameter. Die volle Lagrangedichte \mathcal{L} ist nun aufgespalten in einen Mean-field-Anteil \mathcal{L}_{mf} und in einen Anteil \mathcal{L}_{fl} , der von Fluktuationen herrührt.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{mf} + \mathcal{L}_{fl} \quad (4.13)$$

$$\mathcal{L}_{fl} = g(\delta_\sigma^2 + \delta_\pi^2) \quad (4.14)$$

Gleichung (4.11) kann sofort interpretiert werden. Wir sehen eine Lagrangedichte freier Teilchen, die einen zusätzlichen skalaren Term bei ihrer Masse enthalten, und eine additive Konstante. Wir definieren die Quark-Selbstenergie in mean-field Σ als

$$\Sigma = -2g\langle \bar{\psi}\psi \rangle \quad (4.15)$$

und die führen die Konstituentenquarkmasse m über die Gleichung

$$m = m_0 + \Sigma = m_0 - 2g\langle \bar{\psi}\psi \rangle \quad (4.16)$$

ein. Diese Definition der Konstituentenquarkmasse ist äquivalent zu der der Gapgleichung, was im Folgenden noch von Bedeutung sein wird.

4.2.2 Das Großkanonische Potential

Das großkanonische Potential pro Volumen Ω_{mf} in Mean-field enthält also das Potential eines freien Gases mit Teilchen der Masse m . Hinzu kommt ein Term durch die additive Konstante im Mean-field-Lagrangian. Beide Beiträge gemeinsam ergeben

$$\begin{aligned} \Omega_{mf}(T, \mu) = & \frac{(m - m_0)^2}{4g} - 2N_c N_f \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left\{ E_p \right. \\ & \left. + T \ln \left(1 + \exp \left(-\frac{E_p - \mu}{T} \right) \right) + T \ln \left(1 + \exp \left(-\frac{E_p + \mu}{T} \right) \right) \right\}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Hier ist der erste Term $(m - m_0)/2g$ durch die konstante Verschiebung von \mathcal{L}_{mf} um $\langle \bar{\psi}\psi \rangle^2$ verursacht worden, das Integral danach ist der Beitrag durch freie Teilchen.

Der bis jetzt unbestimmte freie Parameter $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ wird nun durch die Forderung der Minimierung des Potentials determiniert. Im thermischen Gleichgewicht ist das großkanonische Potential Ω minimal bezüglich $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$. Wie man an Gleichung (4.16) sieht, kann man äquivalent dazu Ω bezüglich m minimieren.

$$\frac{\partial \Omega_{mf}}{\partial m}(m) = 0 \quad (4.18)$$

Diese Extremalbedingung von Ω_{mf} bezüglich m ist äquivalent zur Gap-Gleichung (2.17). Damit ist die Konsistenz zwischen m nach der Gapgleichung und m durch das thermodynamische Potential bewiesen.

Regularisierung und Vakuumbeitrag

Das Integral in Gleichung (4.17) ist auf gleiche Weise regularisiert wie iI_1 , aufgrund der Korrespondenz zur Gap-Gleichung. Für die Pauli-Villars-Regularisierung existiert das Integral in der vorgestellten Form nicht, trotz der Regularisierung. Da das thermodynamische Potential jedoch nur bis auf eine Konstante bestimmt ist, lässt sich Ω_{mf} in einen endlichen Ausdruck Ω'_{mf} überführen.

$$\Omega'_{mf} = \Omega_{mf} - \Omega_{mf,vac} < \infty \quad (4.19)$$

Nun benötigt man ein geeignetes $\Omega_{mf,vac}$, das schon in seiner Bezeichnung nahelegen soll, dass es sich um eine Art unendlichen Vakuumsbeitrag handelt. Es liegt nahe, Ω'_{mf} über die Integration der Gap-Gleichung zu erhalten.

$$\Omega'_{mf} = \int_{m_{vac}}^m dm' \frac{d\Omega_{mf}}{dm}(m') \quad (4.20)$$

$$= \int_{m_{vac}}^m dm' \left[\frac{m' - m_0}{2g} - 2N_c N_f \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{m'}{E_p} (1 - n_p - \bar{n}_p) \right] \quad (4.21)$$

Geht man diesen Weg, so erhält man ein endliches Ω'_{mf} . Die eingeführte Konstante $\Omega_{mf,vac}$ ist zwar unabhängig von m , jedoch nicht unabhängig von T und μ . Um das Minimum des großkanonischen Potentials bei festem T und μ zu bestimmen, ist diese Eichung zulässig. Um jedoch die Entropiedichte s zu bestimmen, muss ein $\Omega_{mf,vac}$ gefunden werden, das von T und μ unabhängig ist. Ein solcherart geeichtes Potential ist

$$\begin{aligned} \Omega_{mf}(T, \mu) = & \frac{(m - m_0)^2}{4g} - 2N_c N_f \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left\{ E_p - \mathcal{E}_p \right. \\ & \left. + T \ln \left(1 + \exp \left(-\frac{E_p - \mu}{T} \right) \right) + T \ln \left(1 + \exp \left(-\frac{E_p + \mu}{T} \right) \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.22)$$

mit $\mathcal{E}_p = \sqrt{m_{vac}^2 + \mathbf{p}^2}$. Das gesamte Integral in Gleichung (4.22) ist Pauli-Villars-regularisiert nach dem leicht variierten Schema

$$\begin{aligned} f(m^2, m_{vac}^2) & \rightarrow f(m^2, m_{vac}^2) \\ & - 2f(m^2 + \Lambda_q^2, m_{vac}^2 + \Lambda_q^2) + f(m^2 + 2\Lambda_q^2, m_{vac}^2 + 2\Lambda_q^2). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Dieses Vorgehen zur Berechnung von Ω'_{mf} entspricht der Wahl $\Omega_{mf,vac} = \Omega_{mf}|_{T=0, \mu=0}$ in Gleichung (4.19).

Für die Regularisierung mit dem Dreier-Impuls-Cut-off ergeben sich derlei Problem gar nicht, da Ω_{mf} stets endlich bleibt. Wir werden der Einfachheit halber zukünftig von der Notation Ω'_{mf} keinen Gebrauch mehr machen, sondern stets von Ω_{mf} sprechen.

4.2.3 Phasenübergänge

Zur Bestimmung der Konstituentenquarkmasse als Funktion der Temperatur und Dichte wird nun nach dem Minimum von Ω_{mf} gesucht. Die Funktion $\Omega_{mf}(m)$ hat jedoch nicht immer nur

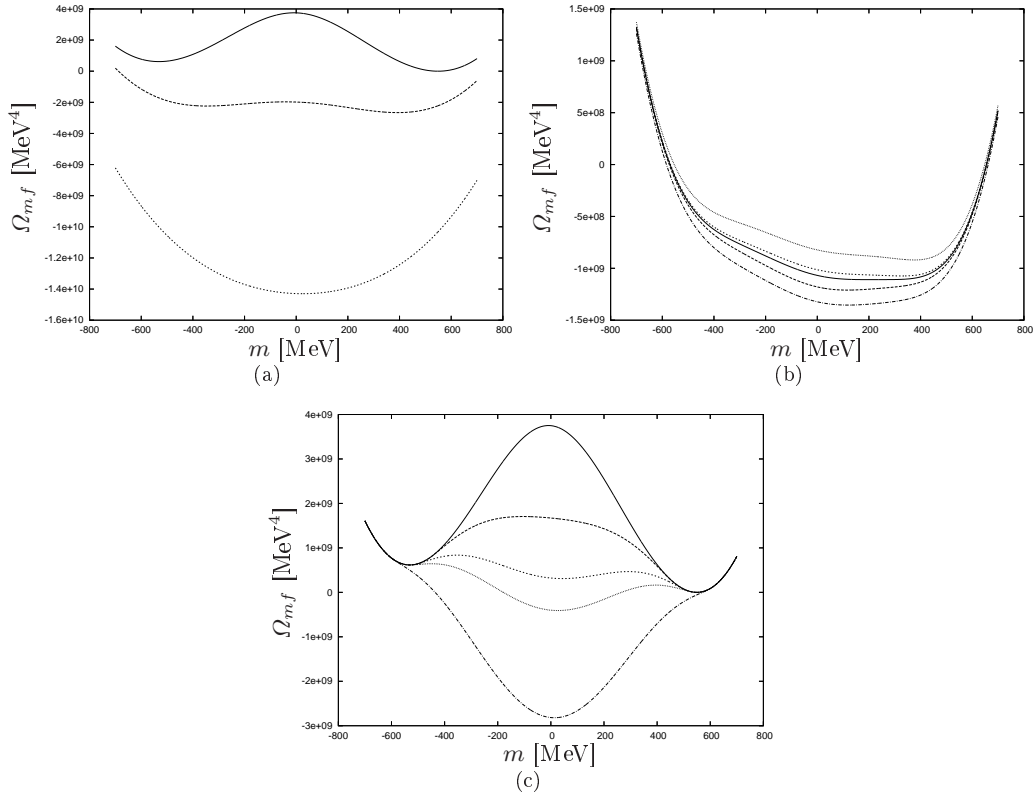


Abbildung 4.1: 4.1(a): $\Omega_{mf}(m)$ bei $\mu = 0$ für $T = 0$ MeV, 250 MeV, 400 MeV (von oben nach unten). 4.1(b): $\Omega_{mf}(m)$ in der Nähe des kritischen Punktes und in der Umgebung davon. Von oben nach unten: $(T = 120$ MeV, $\mu = 434$ MeV), $(T = 115$ MeV, $\mu = 436$ MeV), $(T = 120$ MeV, $\mu = 436$ MeV), $(T = 125$ MeV, $\mu = 436$ MeV), $(T = 120$ MeV, $\mu = 440$ MeV). 4.1(c): $\Omega_{mf}(m)$ bei $T = 0$ für $\mu = 0$ MeV, 450 MeV, 510 MeV, 535 MeV, 600 MeV (von oben nach unten). Pauli-Villars-Parametersatz 5.

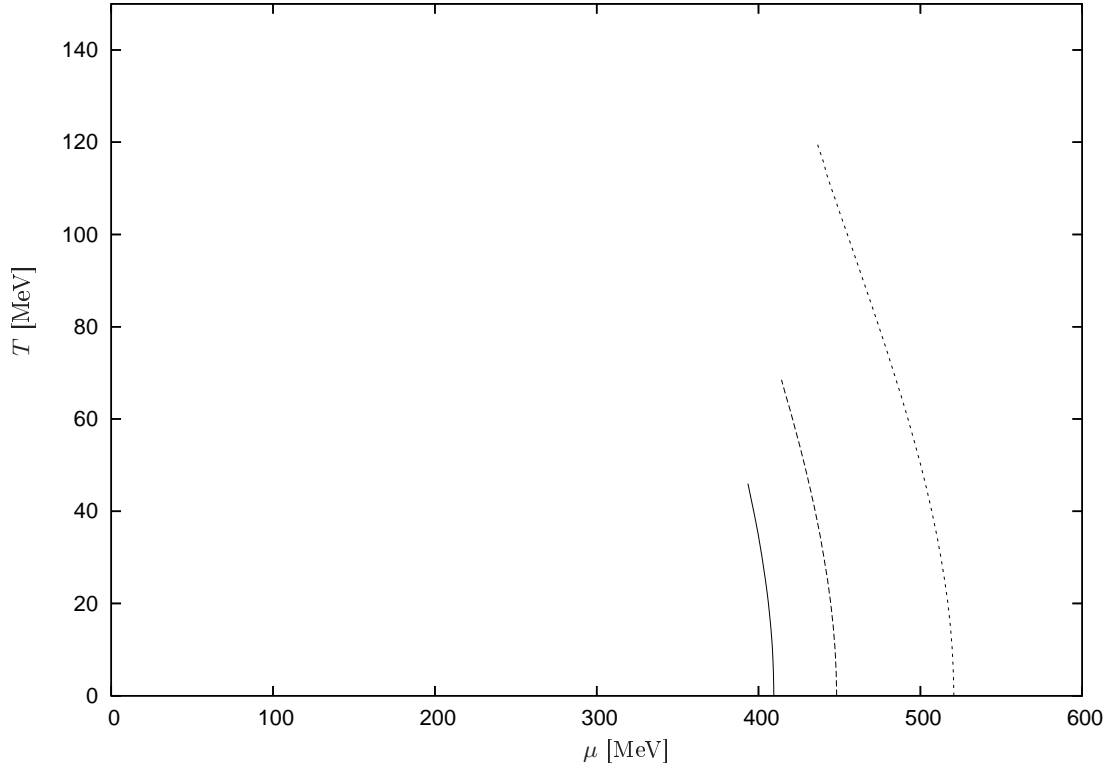


Abbildung 4.2: Das Phasendiagramm für die Pauli-Villars-Parametersätze 3 (durchgezogene Linie), 4 (gestrichelte Linie) und 5 (gepunktete Linie). Gezeigt ist die Linie, die einen Phasenübergang erster Ordnung markiert. Für die Parametersätze 1 und 2 gibt es keine Phasenübergänge erster Ordnung.

ein lokales Minimum. Abbildung 4.1 zeigt exemplarisch das Verhalten der Extrema von Ω_{mf} für verschiedene T und μ .

Wie man sieht, verändert sich die Lage der lokalen Minima wie auch die Funktionswert an diesen Stellen, wenn man T oder μ variiert. Diese Extremalstrukturen erinnern an Ginzburg-Landau-Potentiale und haben auch eine analoge Bedeutung für die Phasenübergänge des Systems. Erreicht ein lokales Minimum den Wert des globalen Minimums, so springt der Parameter m von einem lokalen Minimum in ein anderes. Ein Phasenübergang findet statt. Der Ordnungsparameter ist in diesem Fall m (oder, äquivalent dazu, $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$).

Mit Hilfe dieses Potentials lässt sich nun ein Phasendiagramm ausrechnen. In dem Phasendiagramm sind, ähnlich wie im Phasendiagramm von Wasser, das man vielleicht noch aus seinen Experimentalphysikvorlesungen kennt, die Phasengrenzen, an denen die Übergänge stattfinden, als Linien eingezeichnet. Für die Pauli-Villars-Parametersätze sind diese Phasendiagramme in Abbildung 4.2 zusammengefasst. Hier kommt es je nach Parametersatz zu unterschiedlichen Ergebnissen. Während die Pauli-Villars-Parametersätze 1 und 2 keinen Phasenübergang aufweisen, gibt es für die Parametersätze 3, 4 und 5 Linien Phasenübergänge erster Ordnung, die in einem kritischen Endpunkt enden. An diesem Endpunkt findet ein Phasenübergang zweiter Ordnung statt. Diesen Unterschied zwischen den Parametersätzen kann auch schon Abbildung 3.2 entnehmen. Macht m als Funktion von μ einen Sprung, so gibt es existiert ein Phasenübergang erster Ordnung, ist $m(\mu)$ dagegen stetig, so gibt es keinen solchen, und m ist eine stetige Funktion von μ und T .

4.2.4 Ergebnisse

Wir wollen nun die Konstituentenquarkmasse als Funktion von μ und T bestimmen. Dazu sucht man für ein festes μ und T nach dem absoluten Minimum von Ω_{mf} bezüglich m und gewinnt so den Parameter m , der bei diesem T , μ angenommen wird. Für zwei Parametersätze, nämlich die Pauli-Villars-Parametersätze 2 und 5, ist je ein solcher Graph in Abbildung 4.3 gezeigt. Man sieht, dass die Konstituentenquarkmasse m im Vakuum ihren größten Wert annimmt und für große T und μ immer weiter abfällt. Die im Vakuum spontan gebrochene approximative Symmetrie restauriert sich so im Medium. Wie bereits diskutiert, weist der Parametersatz 5 einen Phasenübergang erster Ordnung auf. In Abbildung (b) ist dieser Phasenübergang an der Unstetigkeitsstelle zu erkennen. Am Phasenübergang existieren zwei verschiedene Grenzwerte für die Konstituentenquarkmasse, je nach dem, von welcher Seite man sich der Trennlinie nähert. Der Unterschied zwischen diesen Grenzwerten ist bei $T = 0$ am größten und wird immer kleiner, bis sich die beiden Grenzwerte am kritischen Endpunkt treffen. An diesem Punkt, wie es sich vielleicht erahnen lässt, ist m zwar stetig, besitzt jedoch eine senkrechte Steigung. Dieses Verhalten des Ordnungsparameters ist gerade das Charakteristikum für einen Phasenübergang zweiter Ordnung.

Auf die Darstellung weiterer Parameter und Regularisierungen wurde verzichtet. Die beiden wesentlichen Verhaltensmuster sind hier vorgestellt; der größte Unterschied besteht bei anderen Sätzen in der Skalierung der drei Achsen. Parametersatz 5 besitzt in Mean-field unphysikalisch große Konstituentenquarkmassen und viel zu große typische Skalen in T und μ . Trotzdem wurde er gewählt, weil er über den ausgeprägtesten Phasenübergang (vergleiche Abbildung 4.2) verfügt.

4.2.5 Crossoverlinien

Jenseits des kritischen Endpunktes gibt es einen Crossover zwischen den beiden Phasen. Es liegt nun nahe, die phasentrennende Linie über den kritischen Endpunkt hinaus zu extrapolieren, um ein Maß für den Wechsel der Phasen angeben zu können. Eine solche Crossoverlinie ist ein konstruiertes Objekt, und so verwundert es nicht, dass sie nicht auf einfache und eindeutige Weise definiert werden kann. Es gibt verschiedene Ansätze, deren Motivation und Problematik nun diskutiert werden soll.

Maximaler Gradient

Der Ordnungsparameter m kann als Funktion von T und μ aufgefasst werden. Bewegt man sich nun in einer vorgegebenen Richtung, so kann der Crossover als größte Änderung von m definiert werden. Anders gesagt, bilden wir

$$\nabla_{T,\mu} m(T, \mu) = \begin{pmatrix} \partial_T m \\ \partial_\mu m \end{pmatrix}. \quad (4.24)$$

Hier wird auch das größte Problem dieser populären Crossoverkonvention offenbar: Da \mathbb{R}^2 keine Ordnungsrelation besitzt, ist die Definition eines Maximums nicht eindeutig. Möglich sind zum Beispiel Crossoverlinien über Maxima der Funktion

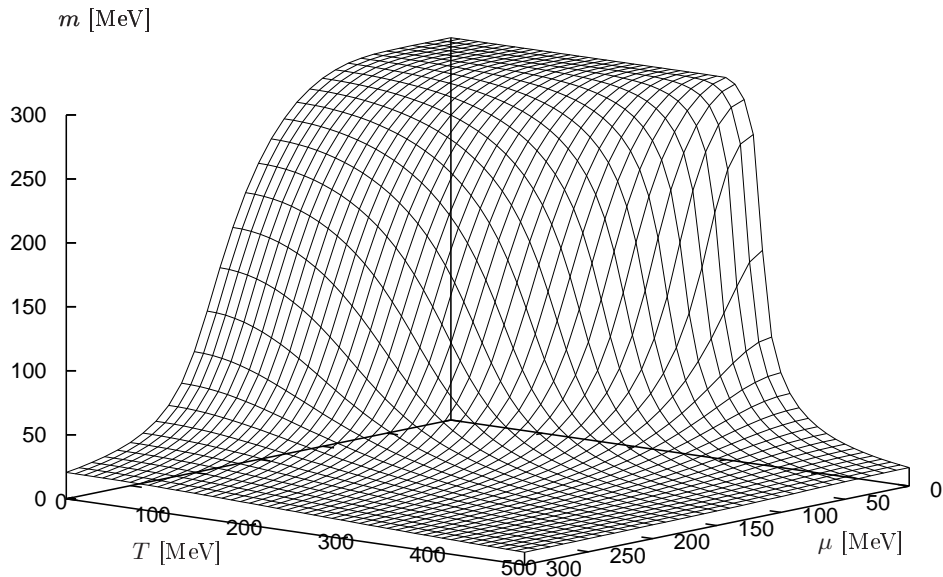
$$\max(\vec{\gamma} \cdot \nabla m) \quad (4.25)$$

für einen recht beliebigen Weg $\vec{\gamma} \subset \mathbb{R}^2$ in der T, μ -Ebene.

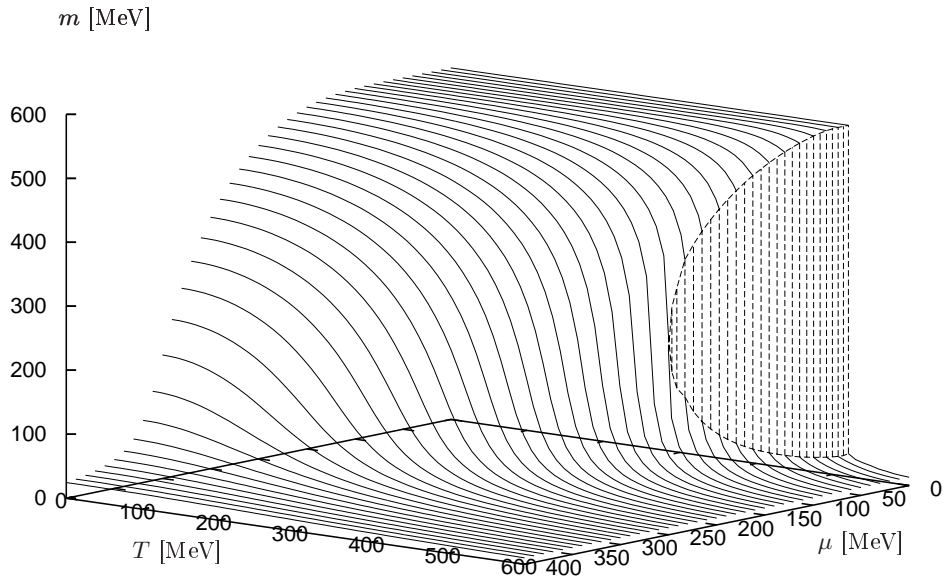
Der Mott-Übergang

Wir geben uns mit der beschriebenen Crossoverlinie nicht zufrieden und suchen nach einer neuen. Neben der Phasentrennlinie gibt es eine weitere, trennende Linie in Phasendiagramm: Die Linie des Mott-Übergangs. Der Mott-Übergang trennt zwei Gebiete des Phasendiagramms, zwei Mengen $U_{1,2} \subseteq \mathbb{R}_+^2$.

$$U_1 = \{(T, \mu) : m_\pi(\mathbf{q} = 0)_{(T,\mu)} < 2m\} \quad U_2 = \{(T, \mu) : m_\pi(\mathbf{q} = 0)_{(T,\mu)} > 2m\} \quad (4.26)$$



(a) Pauli-Villars Parametersatz 2



(b) Pauli-Villars Parametersatz 2

Abbildung 4.3: Die Hartree-Quarkmasse m , an der die Funktion $\Omega(m)$ ihr absolutes Minimum annimmt, als Funktion von Temperatur T und chemischem Potential μ für zwei Parametersätze. Man beachte die Sprungstelle in Abbildung (b), die auf einen Phasenübergang erster Ordnung hinweist.

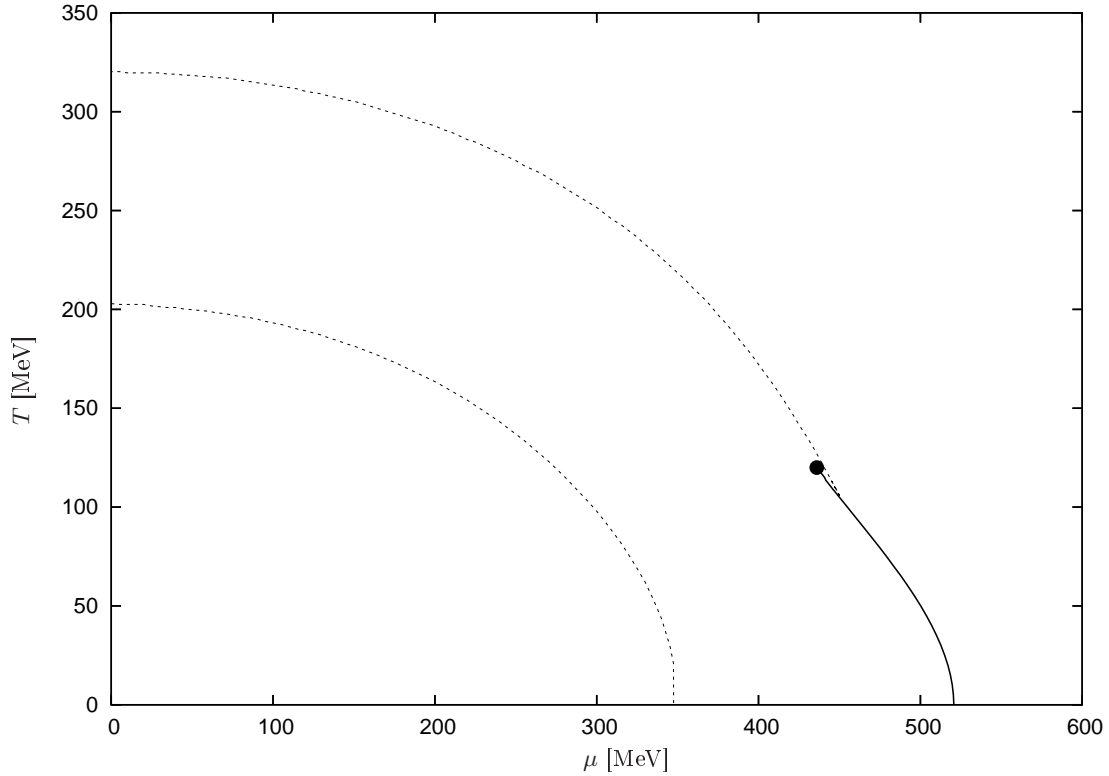


Abbildung 4.4: Das Phasendiagramm der Pauli-Villars Parametersätze 2 und 5. Neben der Phasengrenze (durchgezogene Linie) und dem kritischen Endpunkt (Punkt) ist auch die Linie des Mott-Übergangs (gepunktete Linie) eingezeichnet.

Anders gesagt: Wird das Pion schwerer als die doppelte Konstituentenquarkmasse, findet der Mott-Übergang statt. Jenseits des Übergangs ist es dem Pion energetisch erlaubt, in zwei Konstituentenquarks zu zerfallen.

Diese Linie im Phasendiagramm kann nun eine Crossoverlinie definieren. Diese Definition der Crossoverlinie hat den Vorteil, dass sie eindeutig ist. Des weiteren fällt sie im chiralen Limes mit der Phasengrenze zusammen. Sie nimmt außerdem explizit Bezug auf die Eigenschaften der Mesonen, die ja in dieser Arbeit von großer Bedeutung sind. Es ist zu erwarten, dass in der Nähe des Mottübergangs die $1/N_c$ -Korrekturen, die ja durch Mesonen zu stande kommen, ihr Verhalten ändern.

Leider hat auch der Mott-Übergang einen Nachteil: Die Linie weicht außerhalb des chiralen Limes von der Phasengrenze ab, insbesondere geht sie nicht durch den kritischen Endpunkt. Sie ist also nicht als Extrapolation über den kritischen Endpunkt hinaus zu sehen, sondern eher als Charakterisierung der mesonischen Eigenschaften. Doch auch diese werden sich nicht sprunghaft ändern. Zum einen bleibt das π -Meson auch nach dem Mott-Übergang als Resonanz erhalten. Zum anderen liegt es an der Wahl, die Masse im Ruhesystem des Pions $m_\pi(|\mathbf{q}| = 0)$ als Referenz zu nutzen - die Mesonmasse sinkt mit steigendem Dreierimpuls. In der Dreierimpulsregularisierung für Mesonen wäre also noch das Verhalten von $m_\pi(\mathbf{q} = \Lambda_M)$ von Wichtigkeit.

Für die beiden Parametersätze, für die bereits die Hartree-Quarkmasse aufgetragen wurde (Pauli-Villars 2 und 5), sind in Abbildung 4.4 die Mott-Linien und die bei Satz 5 auftretende Phasengrenze gezeigt.

4.2.6 Der kritische Endpunkt

Am kritischen Endpunkt endet die Linie des Phasenübergangs erster Ordnung. Bei einem Phasenübergang erster Ordnung ist der Ordnungsparameter, die Konstituentenquarkmasse, unstetig.

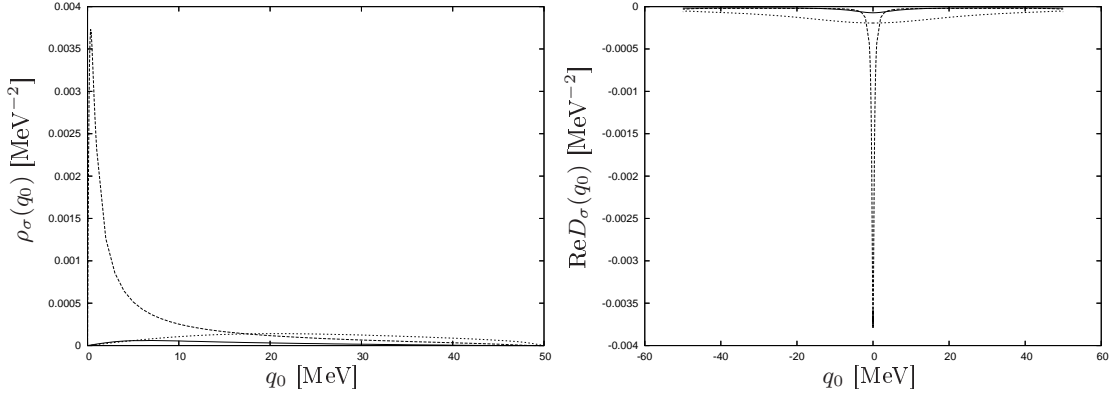


Abbildung 4.5: Links: Der Raumartige Bereich der σ -Spektralfunktion ρ_σ als Funktion der Energie q_0 . Rechts: Der Realteil des Propagators in der Umgebung von $q_0 = 0$. Die unterschiedlichen Kurven gehören zu verschiedenen Temperaturen T in der Nähe des kritischen Endpunktes (T_{krit}, μ_{krit}) bei festem $\mu_{krit} \approx \mu = 436$ MeV. Durchgezogene Linie: $T_{krit} > T = 110$ MeV, gestrichelte Linie: $T_{krit} \approx T = 120$ MeV, gepunktete Linie: $T_{krit} < T = 130$ MeV. Pauli-Villars-Parametersatz 5, $\mathbf{q} = 50$ MeV.

Am kritischen Endpunkt verläuft die Konstituentenquarkmasse stetig, aber die Ableitung divergiert. Später, im Crossoverbereich, sind Masse und Ableitung stetig. Der Phasenübergang ist am kritischen Endpunkt also von zweiter Ordnung.

Das σ -Meson ist im chiralen Limes am Phasenübergang zweiter Ordnung masselos. Diese Masse ist im Sinn der Definition in Abschnitt 3.3 über den Vorzeichenwechsel des Realteils des retardierten σ -Propagators D_σ beziehungsweise dessen Inversen definiert.

$$1 - 2gJ^\sigma(q_0 = m_\sigma, \mathbf{q} = 0) = 0 \quad (4.27)$$

Bei endlicher Stromquarkmassen, wenn die chirale Symmetrie nur noch approximative Gültigkeit besitzt, ergibt sich eine von Null verschiedene σ -Masse am kritischen Endpunkt. Dieses Verhalten der Masse verwundert, da am kritischen Punkt immer erwartet würde, dass das σ -Meson eine verschwindende Masse bekommt [33]. Hier unterscheidet sich das NJL-Modell auch von dem Verhalten des σ -Mesons im linearen Sigma-Modell, das diese Eigenschaft zeigt [34].

Die Spuren dieses Phänomens findet man im NJL-Modell im raumartigen Bereich der Spektralfunktion (siehe auch [35]). Die Spektralfunktion bildet in der Nähe der Null einen Peak aus, die Ableitung der Spektralfunktion nach der Energie divergiert. Dieses Verhalten kann man auch im Realteil des Propagators erahnen: In der Nähe des kritischen Endpunkts bildet sich an der Stelle Null tatsächlich eine Art Massenpeak heraus. Dies ist lediglich im Sinne des Auftretens eines deutlichen Maximums zu verstehen, da sich der Peak im raumartigen Bereich befindet. Diese beiden Verhaltensweisen sind in Abbildung 4.5 gezeigt.

4.3 Entropiedichte in Mean-Field

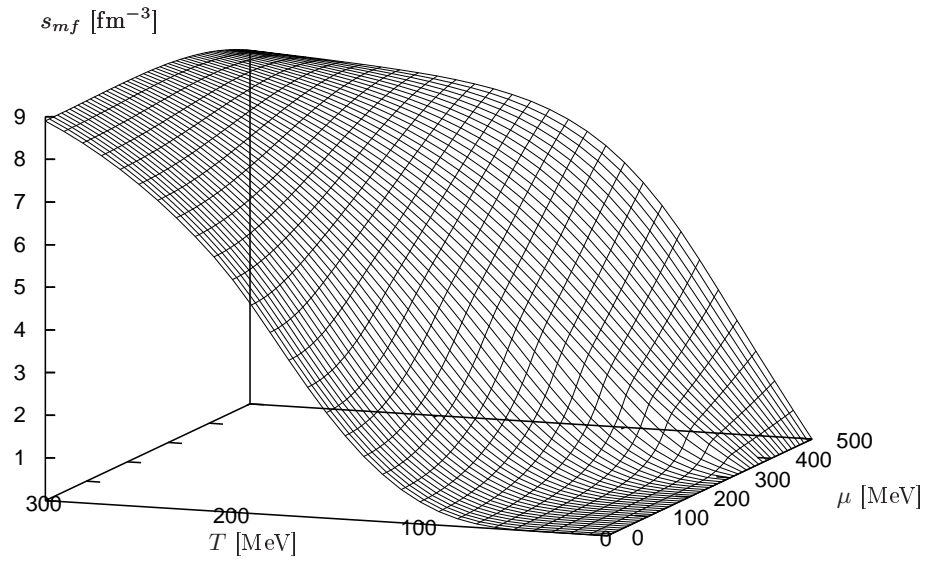
Die Entropiedichte ist durch die Gleichung

$$s_{mf} = -\frac{\partial \Omega_{mf}}{\partial T} \quad (4.28)$$

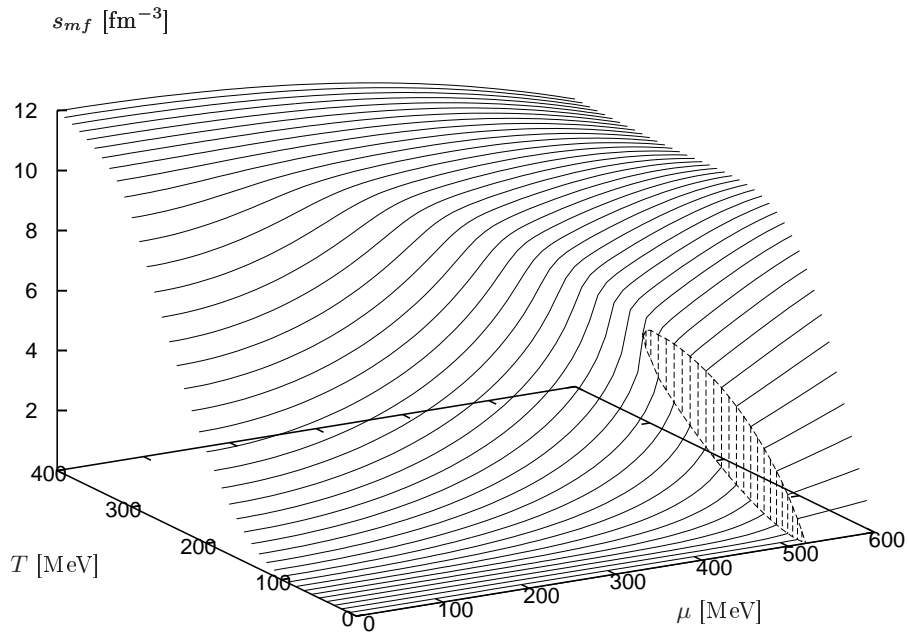
mit dem thermodynamischen Potential verknüpft.

Führt man die Ableitung aus, so erhält man

$$s_{mf} = 2N_c N_f \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left\{ \ln(1 + e^{-\beta(E-\mu)}) + \beta(E-\mu)n_F(E-\mu) + \ln(1 + e^{-\beta(E+\mu)}) + \beta(E+\mu)n_F(E+\mu) \right\} \quad (4.29)$$



(a) Pauli-Villars-Parametersatz 2



(b) Pauli-Villars-Parametersatz 5

Abbildung 4.6: Entropiedichte in mean-field s_{mf} als Funktion von T und μ für zwei verschiedene Parametersätze.

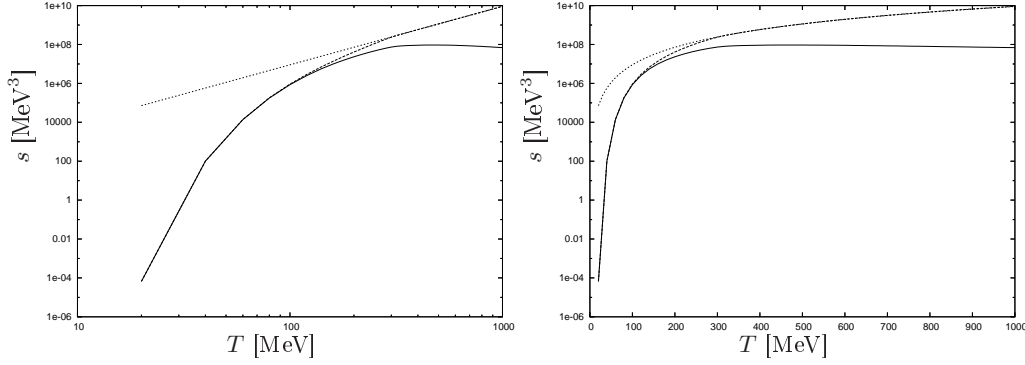


Abbildung 4.7: Verschiedene Entropiedichten s nach als Funktion der Temperatur T . s_{mf} nach Gleichung (4.29) (durchgezogene Linie), s_{mf} mit nichtregularisiertem Mediumanteil (gestrichelte Linie) und s_{free} nach Gleichung (4.31) (gepunktete Linie). Die beiden Graphen unterscheiden sich nur durch die Art der Auftragung - die T -Achse ist links logarithmisch aufgeteilt, um das T^3 -Verhalten der freien Entropiedichte s_{free} zu verdeutlichen. Pauli-Villars-Parametersatz 5 im chiralen Limes.

wobei die gleichen Regularisierungsvorschriften wie in Gleichung (4.22) zu beachten sind.

Am Beispiel der Pauli-Villars-Parametersätze 2 und 5 (deren Konstituentenquarkmasse ja bereits diskutiert wurde) ist in Abbildung 4.6 s_{mf} als Funktion von T und μ gezeigt. Wir sehen, dass die Entropiedichte im Vakuum den Wert null annimmt und für endliche Temperatur größer als null ist. Auch in diesem Plot ist bei Parametersatz 5 in Abbildung (b) der Phasenübergang erkennbar.

Regulatoreffekte bei Pauli-Villars-Regularisierung

Die so ermittelte Entropiedichte s_{mf} hat eine überraschende Temperaturabhängigkeit. Zwar gilt $\lim_{T \rightarrow 0} s_{mf} = 0$, aber für festes chemisches Potential μ nimmt s_{mf} bei einer bestimmten Temperatur ein Maximum an und fällt danach ab. Schon in Abbildung 4.6 ist ein Abknicken erahnbar. Um dieses Verhalten besser beurteilen zu können, untersuchen wir den Spezialfall eines freien Gases masseloser Quarks. Wir würden erwarten, dass s für hohe Temperaturen ein ähnliches Verhalten wie freie Quarks kleiner Masse zeigen würde.

Der Druck masseloser Quarks bei chemischem Potential $\mu = 0$ ist

$$p_{free}(T) = -\Omega_{free} = \frac{7}{8} f \frac{\pi^2}{90} T^4 \quad (4.30)$$

wobei $f = 4N_c N_f = 24$ die Anzahl der Freiheitsgrade ist. Die Entropiedichte ist somit

$$s_{free}(T) = \frac{84\pi^2}{90} T^3. \quad (4.31)$$

Das beobachtete Abknicken der Entropiedichte s_{mf} bei hohen Temperaturen (und niedrigen Quarkmassen m) in den NJL-Rechnungen steht nicht im Einklang mit dem T^3 -Verhalten. Es handelt sich hier um ein Artefakt des Regularisierungsverfahrens. Als Vergleich wird die Entropie in Gleichung (4.29) auf eine andere Art regularisiert: Anstatt Regulatoren für alle Terme zu addieren und zu subtrahieren, regularisiert man nur den Vakuumanteil $\propto E_p^{-1}$ und lässt die ohnehin endlichen Mediumanteile ohne Regulatoren. Ein solches Verfahren wurde bereits im Abschnitt 3.1.2 über die Regularisierung im Medium kurz angerissen. Das Temperaturverhalten dieser drei Entropiedichten ist in Abbildung 4.7 gezeigt. Wie man sieht, liefert ein solches Verfahren tatsächlich für hohe Temperaturen ein T^3 -Gesetz analog zu Gleichung (4.31) und stimmt für kleine Temperaturen mit s_{mf} überein.

4.4 Korrekturen in $O(1/N_c)$

In diesem Abschnitt wollen wir Korrekturen zum Mean-field-Potential Ω_{mf} berechnen. Das Ziel soll lediglich sein, eine Korrektur für die Entropiedichte zu berechnen und nicht den Korrekturterm

in die Minimierung des großkanonischen Potentials Ω einzubeziehen. Obwohl wir damit bereits die vollständige Konsistenz verloren haben, werden wir uns auch hier an dem Entwicklungsschema in $1/N_c$ orientieren.

4.4.1 Herleitung

Der Mean-field Lagrangian \mathcal{L}_{mf} , der zur Herleitung des großkanonischen Potentials Ω_{mf} am Anfang dieses Kapitels benutzt wurde, unterscheidet sich um den Fluktuationsterm

$$\mathcal{L}_{fl} = g[\delta_\sigma^2 + \delta_\pi^2] \quad (4.32)$$

vom gesamten Lagrangian \mathcal{L} des NJL-Modells. Aus diesem Term berechnen wir nun formal den zugehörigen Beitrag zum thermodynamischen Potential Ω_{fl} mit Hilfe der Methode der Kopplungskonstantenintegration (siehe zum Beispiel [31]).

$$\Omega_{fl} = \int_0^1 \frac{d\mathcal{G}}{\mathcal{G}} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{T}{2} \sum_{i\omega_q} \text{Tr}(\Sigma_{fl}^{\mathcal{G}}(i\omega_q, \mathbf{q}) G^{\mathcal{G}}(i\omega_q, \mathbf{q})) \quad (4.33)$$

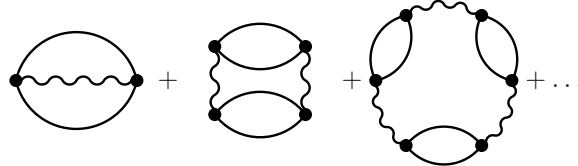
Hierbei ist \mathcal{G} die modifizierte Kopplungskonstante, die nun eine Integrationsvariable geworden ist. $G^{\mathcal{G}}$ ist der volle Quarkpropagator und $\Sigma_{fl}^{\mathcal{G}}$ die Quark-Selbstenergie durch \mathcal{L}_{fl} bei dieser Kopplungskonstanten.

Diesen Beitrag entwickeln wir nun nach dem Entwicklungsschema nach Ordnungen $O(1/N_c)$. Der Hartree-Beitrag, diagrammatisch



$$(4.34)$$

ausgedrückt, entspricht der Ordnung $O(1)$. Wir benötigen so als nächsthöheren Term Ω_{fl} in der Ordnung $O(1/N_c)$. Diese Beiträge entsprechen dem Fock-Term und der Ringsumme.



$$(4.35)$$

Diese Aufsummation von Polarisationsloops Π weist deutliche Ähnlichkeiten mit der Beschreibung von RPA-Mesonen auf. Der Ringsummenbeitrag lässt sich schreiben als

$$\Omega_{fl} = \sum_{M \in \{\sigma, \pi^a\}} \Omega_M. \quad (4.36)$$

Die Korrektur zum thermodynamischen Potential Ω_M ist nach Ausintegration der modifizierten Kopplungskonstanten \mathcal{G}

$$\Omega_M = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{T}{2} \sum_{\omega_q} \ln(1 - 2g\Pi_M(i\omega_q, \mathbf{q})). \quad (4.37)$$

Wir können diesen Anteil des thermodynamischen Potentials als Beitrag durch die Mesonen π und σ deuten.

4.4.2 Die Mesonbeiträge zum thermodynamischen Potential Ω_M

Im Prinzip lässt sich Gleichung (4.37) direkt numerisch berechnen. Jedoch lässt sich durch einige Umformungen noch ein eleganteres Ergebnis erzielen. Außerdem weist das numerische Ausführen der Matsubara-Summe bei der von uns bevorzugten Pauli-Villars-Regularisierung einige Schwierigkeiten auf, die bei einfachen Dreierimpuls-Cut-offs oder dem pNJL-Modell nicht auftreten. Sie rühren von der Schwierigkeit der Abschätzung des asymptotischen Verhaltens äußerer Parameter bei im Unendlichen nur schwach abfallenden Integranden her.

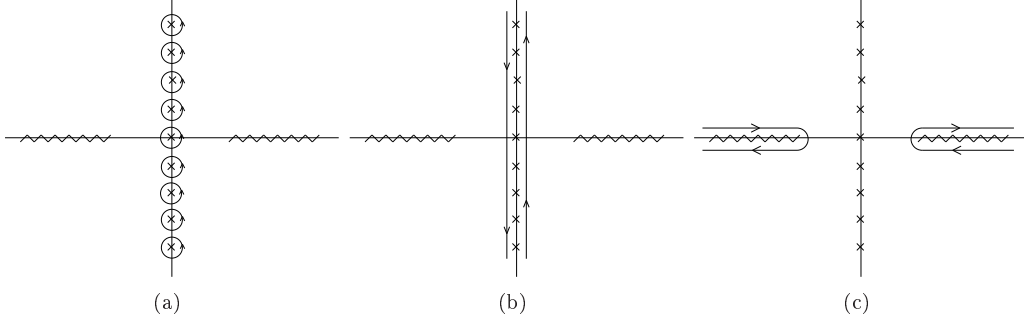


Abbildung 4.8: Konturverformung zu Gleichung (4.39)

Wir schreiben den Ausdruck (4.37) um in ein Konturintegral in der komplexen Ebene.

$$\Omega_M = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \oint_C \frac{dz}{2\pi i} n_B(z) \ln(1 - 2g\Pi_M(z, \mathbf{q})) \quad (4.38)$$

Hierbei ist $n_B(x) = (\exp(x/T) - 1)^{-1}$ die Bose-Verteilungsfunktion.

Nun verformen wir die Kontur C analog zu Abbildung 4.8, so dass man

$$\Omega_M = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi i} n_B(\omega) (\ln(1 - 2g\Pi_M(\omega + i\epsilon, \mathbf{q})) - \ln(1 - 2g\Pi_M(\omega - i\epsilon, \mathbf{q}))) \quad (4.39)$$

erhält. Unter Ausnutzung von $n_B(-\omega) = -1 - n_B(\omega)$ und der Symmetrie des Realteils von Π lässt sich Ω_M schreiben als

$$\Omega_M = \frac{1}{2} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi i} (1 + 2n_B(\omega)) \ln \frac{1 - 2g\Pi_M(\omega + i\epsilon, \mathbf{q})}{1 - 2g\Pi_M(\omega - i\epsilon, \mathbf{q})} \quad (4.40)$$

Streuphasen

Wir wollen nun den Integranden mit Streuphasen beschreiben. In der Dyson-Lehmann-Jost-Darstellung ist die Streumatrix S

$$S(\omega, \mathbf{q}) = \frac{1 - 2g\Pi_M(\omega - i\epsilon, \mathbf{q})}{1 - 2g\Pi_M(\omega + i\epsilon, \mathbf{q})} = e^{2i\phi_M(\omega, \mathbf{q})} \quad (4.41)$$

mit der Streuphase ϕ_M . Diese Streuphase kann auch mit dem Propagator D_M verknüpft werden

$$D_M(\omega, \mathbf{q}) = |D_M(\omega, \mathbf{q})| e^{i\phi_M(\omega, \mathbf{q})} \quad (4.42)$$

und besitzt die für unsere Zwecke relevante Darstellung

$$\phi_M(\omega, \mathbf{q}) = \frac{1}{2i} \ln \frac{1 - 2g\Pi_M(\omega - i\epsilon, \mathbf{q})}{1 - 2g\Pi_M(\omega + i\epsilon, \mathbf{q})}. \quad (4.43)$$

Man beachte, dass wegen

$$\frac{1}{2i} \ln \frac{z}{z^*} = \frac{1}{2i} \ln \frac{|z|e^{+i\phi_z}}{|z|e^{-i\phi_z}} = \frac{1}{2i} \ln e^{2i\phi_z} = \phi_z + n\pi \quad (4.44)$$

mit $n \in \mathbb{Z}$ für beliebige $z \in \mathbb{C}$ die Phase ϕ_M nicht eindeutig definiert ist.

Wir bekommen somit den mesonischen Beitrag zum thermodynamischen Potential als Funktion der Streuphase.

$$\Omega_M = -\frac{1}{2} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{d\omega}{\pi} (1 + 2n_B(\omega)) \phi_M \quad (4.45)$$

In Abbildung 4.9 sind exemplarisch Propagatoren D in der komplexen Zahlenebene dargestellt. Die Darstellung ist ein wenig ungewöhnlich, aber für die Zwecke dieser Veranschaulichung sehr nützlich. Gezeigt ist der Weg $\mathbb{R}^+ \ni \omega \mapsto D_M(\omega) \in \mathbb{C}$, also die Kurve $\{D_M(z) \in \mathbb{C} : z \in \mathbb{R}_0^+\}$. Jede dieser komplexen Zahlen kann nun durch einen Winkel und einen Radius ausgedrückt werden. Der Winkel ist nach Gleichung (4.42) genau die Streuphase ϕ_M .

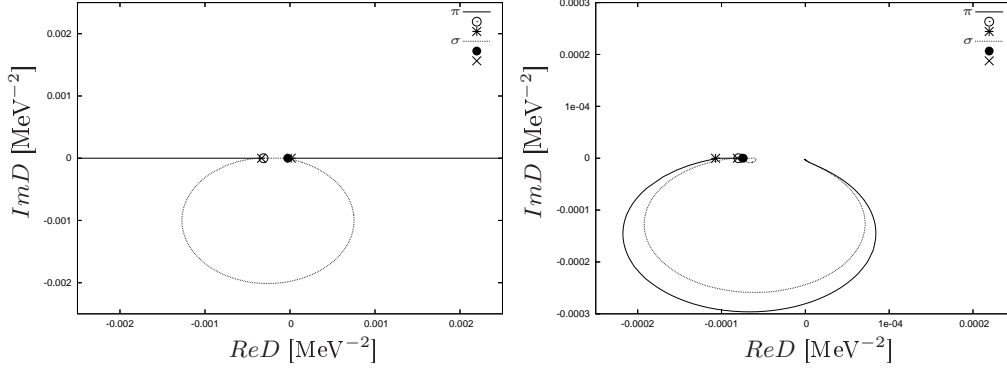


Abbildung 4.9: π - und σ -Propagatoren als mit ω parametrisierte Wege in der komplexen Zahlenebene. Mit Kreisen sind die Punkte $D_M(\omega = 0)$ markiert, mit Kreuzen die Punkte $D_M(\omega = 2m)$. Die Kurven starten also in der Halbebene negativer Realteile und laufen dann weiter gegen den Uhrzeigersinn, um sich für $\omega \rightarrow \infty$ dem Wert $2g$ anzunähern. Links: $T = 0$, $\mu = 0$; rechts: $T = 200$ MeV, $\mu = 10$ MeV; Pauli-Villars-Parametersatz 1.

Zerlegung von Ω_M

Wie auch bei Ω_{mf} können wir den divergierenden Ausdruck durch Abziehen des Vakuumbeitrags auf einen endlichen Wert Ω'_M bringen.

$$\Omega'_M = \Omega_M - \Omega_{M,vac} \quad (4.46)$$

Wir werden im Folgenden diesen umgekehrten Ausdruck ebenfalls mit Ω_M bezeichnen, also keine explizite Unterscheidung zwischen Ω_M und Ω'_M machen. Wir zerlegen Ω_M nun in zwei Summanden, die sich schon in Gleichung (4.45) ankündigen und bei deren Benennung wir [36] folgen.

$$\Omega_M = \Omega_{NSR} + \Omega_{qfl} \quad (4.47)$$

$$\Omega_{NSR} = - \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{d\omega}{\pi} n_B(\omega) \phi_M \quad (4.48)$$

$$\Omega_{qfl} = - \frac{1}{2} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{d\omega}{\pi} \phi_M \quad (4.49)$$

$$(4.50)$$

Ω_{NSR} ist der so genannte Nozière-Schmitt-Rink-Beitrag [37], der erstmals von Nozière und Schmitt-Rink im nichtrelativistischen Fall hergeleitet wurde. Ω_{qfl} wird als Beitrag durch Quantenfluktuationen interpretiert.

Neben dieser Zerlegung in zwei Summanden kann ist noch eine weitere Abspaltung von Ω_M interessant. Diese wird uns den Zusammenhang mit $\Omega_{M,free}$, dem großkanonischen Potential eines freien Mesongases zeigen. Im ω -Integral kann man eine partielle Integration durch führen.

$$\Omega_M = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{\pi} \left(\frac{\omega}{2} + T \ln(1 - e^{-\beta\omega}) \right) \frac{\partial \phi_M}{\partial \omega} \quad (4.51)$$

Nun fällt eine Besonderheit auf. Hat $1 - 2g\Pi_M$ einen Durchgang durch den Punkt $z = 0 + i0$ auf der reellen Achse, so springt der Winkel von $-\pi$ nach 0. Einen solchen Nulldurchgang gibt es nicht immer - er tritt beim einem scharfen Pion bei $\omega^2 = m_M^2 + \mathbf{q}^2$ auf. In einem solchen Fall kann man die Streuphase in der Umgebung des Pols schreiben als

$$\phi_\pi(\omega) = -\pi\theta(m_\pi^2 + \mathbf{q}^2 - \omega^2) \quad (4.52)$$

und entsprechend die Ableitung nach ω als

$$\frac{\partial \phi_\pi}{\partial \omega}(\omega) = \pi \operatorname{sgn}(\omega) \delta(|\omega| - \sqrt{m_\pi^2 + \mathbf{q}^2}). \quad (4.53)$$

Wir schreiben dieses Verhalten für das Pion wieder allgemein für ein Meson M und setzen die Ergebnisse in Ω_M ein.

$$\begin{aligned} \Omega_M &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \left(\int_0^{|\mathbf{q}|} + \int_{\sqrt{2m^2+\mathbf{q}^2}}^{\infty} \right) \frac{d\omega}{\pi} \left(\frac{\omega}{2} + T \ln(1 - e^{-\beta\omega}) \right) \frac{\partial\phi_M}{\partial\omega} \\ &+ \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \int_{|\mathbf{q}|}^{\sqrt{2m^2+\mathbf{q}^2}} \frac{d\omega}{\pi} \left(\frac{\omega}{2} + T \ln(1 - e^{-\beta\omega}) \right) \pi\delta(|\omega| - \sqrt{m_\pi^2 + \mathbf{q}^2}) \end{aligned} \quad (4.54)$$

Den zweiten Term nennen wir Ω_{pol} , da er von der Polstelle im Propagator D herrührt. Die so zerlegten Terme werden nun in den folgenden Abschnitten einzeln diskutiert.

4.4.3 Polbeitrag Ω_{pol}

Die δ -Funktion erlaubt es uns, die ω -Integration sofort analytisch auszuführen.

$$\Omega_{pol} = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \theta(2m - m_M(\mathbf{q})) \left[\sqrt{m_M^2 + \mathbf{q}^2} + T \ln(1 - \exp(-\beta\sqrt{m_M^2 + \mathbf{q}^2})) \right] \quad (4.55)$$

Der Polanteil beschreibt also den Beitrag eines freien Mesonengases zum thermodynamischen Potential. Da dies der Vernachlässigung von Kontinuums- und Teilchen-Loch-Branch entspricht, erwarten wir, dass Ω_{pol} für kleine Temperaturen T und chemische Potentiale μ am besten mit dem vollen Ω_M übereinstimmt.

Den Beitrag Ω_{pol} gibt es nur, wenn die Masse des Mesons M kleiner als die doppelte Konstituentenmasse ist, also nur, wenn das Meson einen scharfen Massenpeak besitzt. Dies ist in der Formel (4.55) durch die θ -Funktion berücksichtigt. Diese Situation tritt ausschließlich bei π -Mesonen auf, σ -Mesonen können also überhaupt nicht durch eine solche Polapproximation beschrieben werden (wie wir ja auch ihre Masse nur in einem weiteren Sinne definieren konnten).

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass die \mathbf{q} -Abhängigkeit der Mesonmasse M von entscheidender Bedeutung ist. Es gibt sehr wohl Situationen im Medium, in denen Mesonen erst unterhalb eines bestimmten Impulses \mathbf{q}_s instabil sind ($m_M(\mathbf{q} < \mathbf{q}_s) > 2m$) und oberhalb stabil werden ($m_M(\mathbf{q} > \mathbf{q}_s) < 2m$). Daraus kann man auch folgern, dass der Polbeitrag der π -Mesonen nicht sprunghaft bei einer Mott-Temperatur verschwindet, sondern stetig null wird.

Auch Ω_{pol} kann man wieder in zwei Summanden aufteilen.

$$\Omega_{pol} = \Omega_{pol,NSR} + \Omega_{pol,qfl}$$

$$\Omega_{pol,NSR} = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \theta(2m - m_M(\mathbf{q})) T \ln(1 - \exp(-\beta\sqrt{m_M^2 + \mathbf{q}^2})) \quad (4.56)$$

$$\Omega_{pol,qfl} = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \theta(2m - m_M(\mathbf{q})) \sqrt{m_M^2 + \mathbf{q}^2} \quad (4.57)$$

Diese Aufteilung erlaubt es uns, direkt den Polanteil der vollen Potentiale Ω_{NSR} und Ω_{qfl} durch Vergleich zu analysieren.

In Abbildung 4.10 ist das Verhalten von Ω_{pol} als Funktion von T bei einem konstanten chemischen Potential von $\mu = 10$ MeV gezeigt. Hier sieht man, dass in der Tat am Mott-Übergang ein Abknicken der Kurve zu beobachten ist. Ab der Temperatur, bei der $m_\pi(|\mathbf{q}| = \Lambda_M) > 2m$ ist, verschwindet der Beitrag Ω_{pol} vollständig. Auch ist zu erkennen, dass der Nozières-Schmitt-Rink-Beitrag eine deutlich stärkere Temperaturabhängigkeit als der Quantenfluktuationsbeitrag besitzt. Man bedenke hierbei, dass der Absolutwert aufgrund der Wahlfreiheit einer Konstanten vollkommen unerheblich ist.

4.4.4 Nozière-Schmitt-Rink Ω_{NSR}

Der Integrand der ω -Integration des NSR -Beitrags enthält die Bose-Verteilungsfunktion $n_B(\omega)$, die einen Pol erster Ordnung bei $\omega = 0$ besitzt. Man beachte, dass notwendiger Weise

$$\phi(0) = 0 \quad (4.58)$$

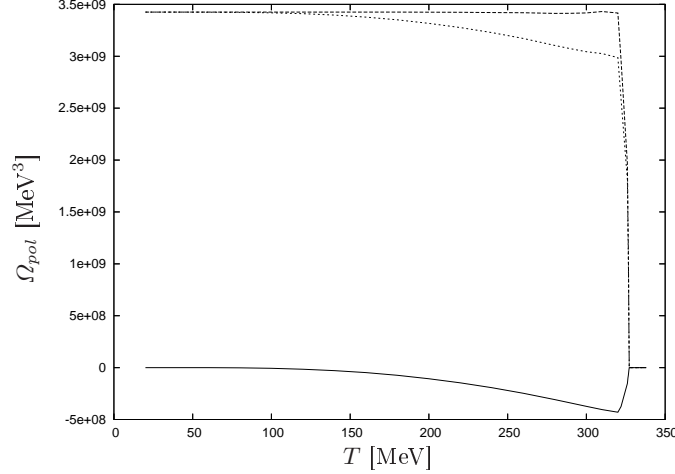


Abbildung 4.10: Polanteil zum mesonischen Anteil des thermodynamischen Potentials als Funktion der Temperatur T bei chemischem Potential $\mu = 10$ MeV. Durchgezogene Linie: $\Omega_{pol,NSR}$, gestrichelte Linie: $\Omega_{pol,qfl}$, gepunktete Linie: $\Omega_{pol} = \Omega_{pol,NSR} + \Omega_{pol,qfl}$. Pauli-Villars-Parametersatz 5. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wurde darauf verzichtet, den Vakuumanteil von $\Omega_{pol,qfl}$ abzuziehen.

gelten muss, damit das Integral existiert. Dies steht im Widerspruch zur üblichen Konvention der Streuphase nach dem Levinson-Theorem, das

$$\phi(0) = \text{Anzahl der gebunden Zustände} \cdot \pi = \pi \quad (4.59)$$

vorhersagt. Wir erinnern uns aber daran, dass ϕ nur bis auf ein additives Vielfaches von π festgelegt ist. Wir definieren also einfach ϕ so, dass die Bedingung (4.58) erfüllt ist. So erhält man zwar ein ungewöhnliches Ultraviolettverhalten der Streuphase, doch ist durch die Bose-Verteilungsfunktion die Konvergenz des Integrals gesichert.

4.4.5 Quantenfluktuationen Ω_{qfl}

Da das Integral in der Form, wie es in Gleichung 4.50 angegeben wurde, nicht existiert, ziehen wir den unendlichen Vakuumbeitrag ab.

$$\Omega_{qfl} = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \Delta\phi(\omega) \quad (4.60)$$

Hierbei ist die sogenannte Phasenverschiebung im Medium

$$\Delta\phi(\omega) = \phi_{T,\mu}(\omega) - \phi_{T=0,\mu=0}(\omega). \quad (4.61)$$

der Unterschied der Streuphase zwischen Vakuum und Medium.

Man kann sich davon überzeugen, dass das Ultraviolettverhalten von $\Delta\phi$

$$\Delta\phi^{(\pi)}(q_0, \mathbf{q}) \rightarrow \frac{1}{\pi} N_c N_f g A_q^4 6 (m_{vac}^2 - m^2) \frac{1}{(q_0^2 - \mathbf{q}^2)^2} \quad (4.62)$$

$$\Delta\phi^{(\sigma)}(q_0, \mathbf{q}) \rightarrow \frac{1}{\pi} N_c N_f g A_q^4 2 ((m_{vac}^2 - m^2) \frac{1}{(q_0^2 - \mathbf{q}^2)^2}) \quad (4.63)$$

tatsächlich das Integral konvergieren lässt.

Kapitel 5

Scherviskosität

5.1 Was ist die Scherviskosität?

Die Scherviskosität, üblicherweise mit dem Symbol η bezeichnet, ist ein Parameter der relativistischen Hydrodynamik. Wir werden zunächst einige Grundlagen erläutern, um die Bedeutung dieser Größe zu erklären. Eine ausführlichere Darstellung bietet zum Beispiel [38].

Relativistische Hydrodynamik beschreibt auf sehr allgemeine Weise Fluide durch Gleichungen, die durch die Erhaltungsgrößen eines Systems und weitere nötige Annahmen gewonnen werden. Die zu beschreibenden Größen sind der Energie-Impuls-Tensor $T^{\mu\nu}$ des Systems sowie erhaltene verallgemeinerte Ladungen J^μ . Diese Ladungen können elektrisch sein, aber auch Baryonenzahlen, Seltsamkeit und andere Ladungen sind von dieser Beschreibung nicht ausgenommen. Die Anzahl der unbekanntenen Größen ist damit 14.

$$T^{\mu\nu} \rightarrow 10 \quad (5.1)$$

$$J^\mu \rightarrow 4 \quad (5.2)$$

Für diese Unbekannten wollen wir nun versuchen, Bedingungen zu finden, um das System hydrodynamisch erfassen zu können. Die Erhaltungssätze des Systems

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (5.3)$$

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \quad (5.4)$$

liefern jedoch lediglich fünf Gleichungen. An dieser Stelle setzt das Prinzip der relativistischen Hydrodynamik ein. Wir füllen diese fehlenden Informationen, in dem wir weitere Annahmen über das System treffen.

Wir fordern zunächst, dass sich das System nur schwach ändert. Das wird es uns erlauben, ∂_μ als kleine Größe und damit als Grundlage einer Entwicklung zu behandeln. Man kann den Ausgangspunkt dieser Entwicklung als den statischen und isotropen Fall verstehen. Wir werden zunächst nur die führende Ordnung betrachten.

Als zweite Annahme beschreiben wir das System lokal an jeder Koordinate x durch einen Vierervektor $u_\mu(x)$. Per Konvention normieren wir ihn durch die Bedingung $u_\mu u^\mu = 1$. Die Größen J^μ und $T^{\mu\nu}$ drücken wir nun durch u^μ aus.

$$T^{\mu\nu} = (\epsilon + p)u^\mu u^\nu - g^{\mu\nu} p \quad (5.5)$$

$$J^\mu = u^\mu n \quad (5.6)$$

Die hier neu eingeführten Parameter offenbaren ihre Bedeutung, wenn man die Gleichungen im lokalen Ruhesystem $u = (1, \mathbf{0})^T$ betrachtet.

$$n = J^0 \quad \text{Eigenladungsdichte} \quad (5.7)$$

$$\epsilon = T^{00} \quad \text{Eigenenergiedichte} \quad (5.8)$$

$$p = T^{ii} \quad \text{Druck} \quad (5.9)$$

Als drittes nehmen wir an, dass sich das System lokal im thermischen Gleichgewicht befindet. Dies geht mit der Existenz einer Zustandsgleichung einher, einer Gleichung, die es erlaubt, den Druck p als eine Funktion von Ladungsdichte n und Energiedichte ϵ auszudrücken.

Somit haben wir unser System durch die sechs Größen u^μ , ϵ und p beschrieben, die nun durch sechs Gleichungen, nämlich die fünf Erhaltungssätze und die Zustandsgleichung, bestimmbar geworden sind. Diese erste Ordnung in der Entwicklung entspricht einer idealen Flüssigkeit. Eine ideale Flüssigkeit besitzt keine innere Reibung oder Viskosität, keine Energiedissipation und keine Entropieänderung.

Um solche Effekte mit einzubeziehen, ist eine Entwicklung bis zum nächsthöheren Term notwendig. Das führt, zunächst einmal rein formal, zu Zusatztermen ν^μ und $\pi^{\mu\nu}$ in den Ausdrücken für J^μ und $T^{\mu\nu}$.

$$T^{\mu\nu} = (\epsilon + p)u^\mu u^\nu - g^{\mu\nu}p + \pi^{\mu\nu} \quad (5.10)$$

$$J^\mu = u^\mu n + \nu^\mu \quad (5.11)$$

Diese Zusatzterme können nun durch physikalisch interpretierbare Größen ausgedrückt werden.

$$\pi^{\mu\nu} = \eta (\partial^\mu u^\nu + \partial^\nu u^\mu - u^\nu u_\lambda \partial^\lambda u^\mu - u^\mu u_\lambda \partial^\lambda u^\nu) + \left(\zeta - \frac{2}{3}\eta \right) (g^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu) \partial_\lambda u^\lambda \quad (5.12)$$

$$\nu^\mu = \kappa \left(\frac{nT}{\epsilon + p} \right)^2 (\partial^\mu - u^\mu u^\nu \partial_\nu) \frac{\mu}{T} \quad (5.13)$$

Hier bezeichnet T die Temperatur und μ das chemische Potential. Die auftretenden Materialkonstanten

- η Scherviskosität
- ζ Bulk-Viskosität
- κ thermische Leitfähigkeit

beschreiben die Korrekturen, die sich durch ein schwaches lokales Nichtgleichgewicht ergeben. In dieser Näherung, der viskosen Hydrodynamik, beinhaltet die Gleichungen Dissipationseffekte und Entropiezunahme.

5.2 Herleitung

Wir werden in dieser Arbeit ausschließlich die Beschreibung von Viskositäten über die Kubo-Formel benutzen. Neben diesem Weg ist es auch möglich, die Scherviskosität von Quarkmaterie über statistische Gleichungen herzuleiten (siehe zum Beispiel [39]). Die Kubo-Formel resultiert aus dem Fluktuations-Dissipations-Theorem und bildet auch eine Grundlage zur Berechnung der elektrischen Leitfähigkeit (siehe zum Beispiel [40]). Wir folgen in dieser Herleitung [16]. Nach der Kubo-Formel ist die Scherviskosität η gegeben durch

$$\eta(\omega) = \beta \int_0^\infty dt e^{i\omega t} \text{dr} (T_{xy}(\mathbf{r}, t), T_{xy}(\mathbf{0}, 0)). \quad (5.14)$$

Hierbei ist T_{xy} der Energie-Impuls-Tensor, der im NJL-Modell gegeben ist durch

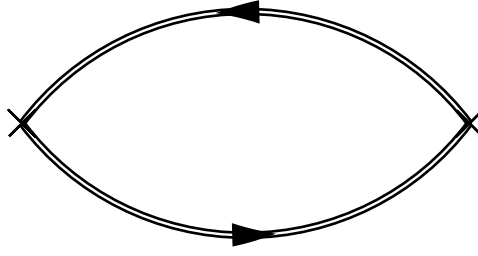
$$T_{xy} = \frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma^2 \partial^1 \psi - \partial^1 \bar{\psi} \gamma^2 \psi). \quad (5.15)$$

Der Korrelator $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist definiert als

$$(A, B) = T \int_0^\beta d\lambda \langle e^{\lambda H} A e^{-\lambda H} B \rangle, \quad (5.16)$$

wobei H der Hamilton-Operator und $\langle \cdot \rangle$ der thermische Mittelwert ist. Wir setzen dies ein und erhalten

$$\eta = - \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{d}{d\omega} \text{Im} II^R(\omega) \quad (5.17)$$


 Abbildung 5.1: Diagramm für die Korrelationsfunktion Π

mit der der retardierten Korrelationsfunktion

$$\Pi^R(\omega) = \Pi(i\omega_e \rightarrow \omega + i\delta), \quad (5.18)$$

die durch stetige Fortsetzung aus der Matsubara-Korrelationsfunktion

$$\Pi(i\omega_e) = - \int_0^\beta d\tau e^{-i\omega_e \tau} \int d\mathbf{r} \langle \mathcal{T}_\tau (T_{xy}(\mathbf{r}, \tau) T_{xy}(\mathbf{0}, 0)) \rangle \quad (5.19)$$

erhalten werden kann. \mathcal{T}_τ ist der Zeitordnungsoperator des Imaginärzeitformalismus, $i\omega_e$ ist eine bosonische Matsubarafrequenz, deren Index e suggeriert, dass sie die externe, durch den Loop laufende Impulskomponente ist.

Wir setzen den Ausdruck für den Energie-Impuls-Tensor (5.15) ein und erhalten das wichtige Zwischenergebnis

$$\Pi(i\omega_e) = T \sum_{\omega_p} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \text{Tr} [p_x \gamma^2 G(\mathbf{p}, i\omega_p + i\omega_e) p_x \gamma^2 G(\mathbf{p}, i\omega_p)]. \quad (5.20)$$

Hierbei ist $G(\mathbf{p}, i\omega_p)$ der volle Quark-Propagator (im Gegensatz zum Hartree-Propagator S). Diese Gleichung bildet die Basis der weiteren Untersuchungen. Sie lässt sich diagrammatisch interpretieren, wie es in Abbildung 5.1 gezeigt ist.

Um nun die Scherviskosität η zu berechnen, muss das Diagramm 5.1 berechnet werden. Da es nicht möglich ist, dies auf exakte Weise zu tun, da der volle Quarkpropagator unbekannt ist, muss dieses Diagramm genähert werden. Wie wir noch sehen werden, ist der Versuch, die offensichtliche Näherung

$$G(\mathbf{p}, \omega_p) = \text{doppelt gezeichnete Linie mit Pfeil} \approx \text{einfache Linie mit Pfeil} = S(\mathbf{p}, \omega_p) \quad (5.21)$$

durchzuführen, nicht sehr fruchttragend. Da wir ohnehin ein wenig Aufwand treiben müssen, ist es angebracht, diese Tatsache hier nicht weiter zu beleuchten, sondern sie im Zuge der folgenden Schritte zu erläutern. Wir werden in den folgenden Abschnitten systematisch Näherungen für Gleichung (5.20) entwickeln.

Wir führen zur Verbesserung der Übersichtlichkeit der nachfolgenden Rechenschritte einige Abkürzungen ein

$$\Pi(\omega_e) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} S \quad (5.22)$$

$$S = T \sum_{\omega_p} P(\omega_p + \omega_e, \omega_p) \quad (5.23)$$

$$P(\omega_1, \omega_2) = \text{Tr} [p_x \gamma^2 G(\mathbf{p}, \omega_1) p_x \gamma^2 G(\mathbf{p}, \omega_2)] \quad (5.24)$$

die uns in den nächsten Schritten in dieser oder ähnlicher Weise wieder begegnen werden.

5.3 Entwicklung in $O(1/N_c)$

Die Idee dieser Näherung ist die Entwicklung in $O(1/N_c)$. Man kann sich unter dieser Näherungsmethode Korrekturen durch Mesonen vorstellen, die eben auch die Eigenschaften von NJL-Quarkmaterie beeinflussen.

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram 1} = \text{Diagram 2} + \\
 & + \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} + \text{Diagram 5} + \text{Diagram 6} + \\
 & + O(1/N_c^1) \tag{5.25}
 \end{aligned}$$

Dabei entspricht der erste Beitrag, der RPA-Loop, der führenden Ordnung N_c^1 , die weiteren Terme gehören zur nächsthöheren Ordnung N_c^0 .

5.3.1 Führende Ordnung: RPA

Wir betrachten den Beitrag in erster Ordnung, den RPA-Loop. Wir stellen die zugehörige Korrelationsfunktion $\Pi^{(0)}$ auf diagrammatische Weise dar.

$$\Pi^{(0)} = \text{Diagram} \tag{5.26}$$

Dieser Term hat eine ähnliche Form wie die exakte Lösung (5.20). Wir wollen diesen Term daher, wie es auch in [16] getan wird, in einer etwas allgemeineren Form herleiten. Wir bauen auf Gleichung (5.20) auf und werden auch weiterhin den Propagator G und nicht S nennen.

Wir wollen zunächst die Matsubara-Summe ausführen. Formal lässt sich die Summe als Konturintegral umschreiben

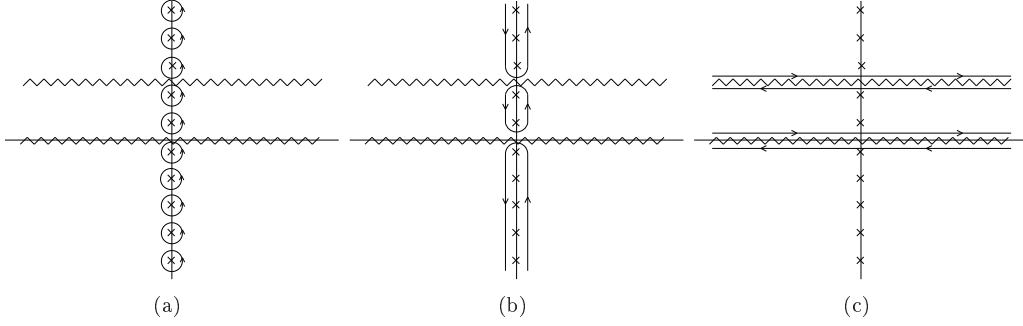
$$S = - \oint_C \frac{dz}{2\pi i} n_F(z) \text{Tr} [p_x \gamma^2 G(\mathbf{p}, z) p_x \gamma^2 G(\mathbf{p}, z + i\omega_e)] . \tag{5.27}$$

Die übliche Technik verlangt eine Fortsetzung der Matsubara-Propagatoren in die komplexe Ebene hinein. Wir benutzen dazu die Lehmann-Darstellung der Propagatoren (siehe zum Beispiel Gleichung (3.35)), um uns klarzumachen, dass es zwei Branchcuts in der komplexen Ebene gibt: einen bei $\text{Im}z = 0$ und einen bei $\text{Im}z = \omega_e$. Wir können den Integrationsweg C gemäss Abbildung 5.2 verformen. Wir parametrisieren die umgeformten Wege in der Form $\epsilon \pm i\delta$ und $\epsilon - i\omega_e \pm i\delta$ ($\epsilon \in \mathbb{R}$, δ infinitesimal) und erhalten auf diese Weise

$$\begin{aligned}
 S = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\epsilon}{2\pi i} \left\{ \right. & n_F(\epsilon - i\delta) \text{Tr} [p_x \gamma^2 G(\epsilon - i\delta) p_x \gamma^2 G(\epsilon + i\omega_e - i\delta)] \\
 & - n_F(\epsilon + i\delta) \text{Tr} [p_x \gamma^2 G(\epsilon + i\delta) p_x \gamma^2 G(\epsilon + i\omega_e + i\delta)] \\
 & + n_F(\epsilon - i\omega_e - i\delta) \text{Tr} [p_x \gamma^2 G(\epsilon - i\omega_e - i\delta) p_x \gamma^2 G(\epsilon - i\delta)] \\
 & \left. - n_F(\epsilon - i\omega_e + i\delta) \text{Tr} [p_x \gamma^2 G(\epsilon - i\omega_e + i\delta) p_x \gamma^2 G(\epsilon + i\delta)] \right\} \tag{5.28}
 \end{aligned}$$

Nutzt man aus, dass

$$n_F(\epsilon) = n_F(\epsilon + 2\pi i n T) = n_F(\epsilon \pm i\delta), \tag{5.29}$$


 Abbildung 5.2: Umformung des Integrationswegs C von Gleichung (5.27) nach Gleichung (5.28).

so erhält man

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\epsilon}{2\pi} n_F(\epsilon) \text{Tr} [p_x \gamma^2 (-2\text{Im}G(\epsilon)) p_x \gamma^2 G(\epsilon + i\omega_e) + p_x \gamma^2 G(\epsilon - i\omega_e) p_x \gamma^2 (-2\text{Im}G(\epsilon))] . \quad (5.30)$$

Wir erinnern uns, dass $-2\text{Im}G(\epsilon) = \rho_G(\epsilon)$ die Definition für die Spektralfunktion ist, ordnen die Spur um und erhalten die Gleichung

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\epsilon}{2\pi} n_F(\epsilon) \text{Tr} [p_x \gamma^2 (\rho_G(\epsilon)) p_x \gamma^2 (G(\epsilon + i\omega_e) + G(\epsilon - i\omega_e))] . \quad (5.31)$$

Um nun die retardierte Form zu erhalten, führen wir die stetige Fortsetzung $i\omega_e \rightarrow \omega + i\delta$ durch.

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\epsilon}{2\pi} n_F(\epsilon) \text{Tr} [p_x \gamma^2 (\rho_G(\epsilon)) p_x \gamma^2 (G(\epsilon + \omega + i\delta) + G(\epsilon - \omega - i\delta))] . \quad (5.32)$$

Nehmen wir davon den Imaginärteil, so erhalten wir das entscheidende Zwischenergebnis

$$\text{Im}S = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\epsilon}{2\pi} \frac{1}{2} (n_F(\epsilon + \omega) - n_F(\epsilon)) \text{Tr} [\rho(\epsilon + \omega) p_x \gamma^2 \rho(\epsilon) p_x \gamma^2] . \quad (5.33)$$

Wir erinnern uns, dass die Viskosität η mit S verknüpft war durch

$$\eta = - \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{d}{d\omega} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \text{Im}S \quad (5.34)$$

In unserer Näherung ist aber $\rho(\epsilon) \propto \delta(\epsilon \pm m)$, und so ist $\rho(\epsilon + \omega)\rho(\epsilon) = 0$. Somit verschwindet der Term in führender Ordnung.

$$\eta^{(0)} = 0 \quad (5.35)$$

Bemerkung zu Grenzübergängen

Das letzte Ergebnis ist eine Frage der Reihenfolge der beiden Grenzübergänge, die zur Berechnung von η durchgeführt werden. Neben dem Grenzübergang

$$\eta = - \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{d}{d\omega} \text{Im}II \quad (5.36)$$

gibt es nämlich noch den Grenzübergang der δ -Funktion, den man sich

$$\delta(x) = \lim_{\Gamma \rightarrow 0} d(x) \quad (5.37)$$

vorstellen kann, mit einer geeigneten Verteilung $d(x)$ mit endlicher Breite Γ . Eine solche Verteilung kann zum Beispiel durch eine Breit-Wigner-Verteilung realisiert werden [16]. Es gilt

$$\eta^{(0)} = - \lim_{\omega \rightarrow 0} \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \frac{d}{d\omega} \text{Im}II = 0 \quad (5.38)$$

und

$$\eta^{(0)} = - \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{d}{d\omega} \text{Im} \Pi = \infty. \quad (5.39)$$

Welche Reihenfolge der Grenzübergänge vorzunehmen ist, scheint schon an Gleichung (5.17) abgelesen werden zu können, nämlich (5.38). Jedoch hängt das Vorgehen auch von der Fragestellung ab. Somit ist es wenig sinnvoll, mit einem einfachen Hartree-Quarkloop die Scherviskosität berechnen zu wollen, weil dahinter die Interpretation eines freien Quarkgases als Grenzfall eines reellen Quarkgases steckt. Dieser Grenzübergang entspricht Gleichung (5.39). Dagegen ist der Beitrag als rein mathematisch notwendiger Summand in einer Entwicklung so implementiert, dass der Grenzübergang durch Gleichung (5.38) entspricht.

5.3.2 Nächsthöhere Ordnung: (a)

Der Beitrag

$$\Pi^{(a)}(i\omega_e) = \text{Diagram} \quad (5.40)$$

wird den entscheidenden Beitrag für die Berechnungen dieses Abschnitts liefern.

$$\Pi^{(a)}(i\omega_e) = T \sum_{\omega_p} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} P(\omega_p + \omega_e, \omega_p) \quad (5.41)$$

mit

$$P(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{2} D^M(\omega_1, \mathbf{p}) \Gamma_{\Delta\gamma^2 MM'}(\omega_1, \mathbf{p}, -\omega_2, -\mathbf{p}) D^{M'}(\omega_2, \mathbf{p}) \Gamma_{\Delta\gamma^2 M'M}(-\omega_1, -\mathbf{p}, \omega_2, \mathbf{p}). \quad (5.42)$$

Die Notation orientiert sich an vergleichbaren Größen vorangegangener Abschnitte. Hierbei ist

$$\Gamma_{\Delta\gamma^2 MM}(p_1, p_2) = \text{Diagram} \quad (5.43)$$

$$= i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} [k_x \gamma^2 S(k + p_1 + p_2) \Gamma_M S(k + p_1) \Gamma_M S(k)] + ex. \quad (5.44)$$

das Quark-Dreieck, in welchem beide Umlaufsinn der Quarks berücksichtigt sind. Dies geschieht durch das Vertauschen von p_1 und p_2 , in der Gleichung mit ex . bezeichnet. Es gibt zu P Beiträge durch die Propagatoren D^{π^a} und D^σ . Aufgrund der Struktur von Γ_Δ gibt es keine Mischungen von Mesonen, d.h. $M = M' \in \{\sigma, \pi^a\}$. Der Vorfaktor $1/2$ entsteht durch die Berücksichtigung des Symmetriefaktors bei der von uns gewählten Definition des Quarkdreiecks Γ_Δ .

Wie bei der Berechnung des RPA-Beitrags in Abschnitt 5.3.1 wollen wir die Matsubarasumme geschickt durch ein Konturintegral ausdrücken. Wollen wir eine ähnliche Strategie verfolgen, wie sie sonst üblich ist (nämlich der Einführung einer Boseverteilungsfunktion und einem Integrationsweg um deren Pole), so stoßen wir auf ein Problem: Zwei der Pole liegen auf dem Branchcut. Dieses Problem umgehen wir, indem wir diese beiden Polstellen nicht vom Integrationsweg umlaufen lassen und sie als Matsubarabeiträge einfach separat dazuaddieren. Diese Aufspaltung ist in den folgenden Gleichungen formal dargelegt, eine Veranschaulichung des Integrationsweges bietet Abbildung 5.3.

$$S = T \sum_{\omega_p} P(\omega_p + \omega_e, \omega_p) \quad (5.45)$$

$$= T (P(i\omega_e, 0) + P(0, -i\omega_e)) - \oint \frac{dz}{2\pi i} n_B(z) P(z + i\omega_e, z) \quad (5.46)$$

$$= S_1(\omega_e) + S_2(\omega_e) \quad (5.47)$$

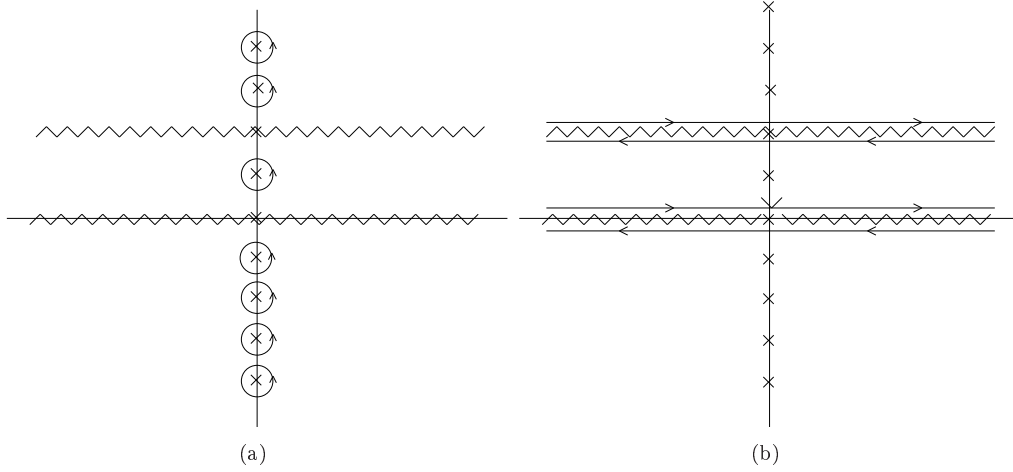


Abbildung 5.3: Umformung des Integrationswegs von S_2 . Man beachte, dass der Integrationsweg *nicht* um die auf den Branchcuts befindlichen Pole herumgeht.

Während S_1 in der hiesigen Form stehen bleiben kann, ist die Untersuchung von S_2 interessant. Diese Form ist analog zur Rechnung in [16] und [40], und als Ergebnis erhält man

$$\begin{aligned} \text{Im}S_2 &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\epsilon}{2\pi} [n_B(\epsilon) - n_B(\epsilon + \omega)] \\ &\quad \times [P(\epsilon + i\delta, \epsilon + \omega + i\delta) - P(\epsilon + i\delta, \epsilon + \omega - i\delta) \\ &\quad + P(\epsilon - i\delta, \epsilon + \omega - i\delta) - P(\epsilon - i\delta, \epsilon + \omega + i\delta)] \end{aligned} \quad (5.48)$$

Eine weitere Umformung ist wenig sinnvoll, da die Struktur von P zu kompliziert ist, um eine echte Vereinfachung zuzulassen. Wir wenden uns daher den nächsten Beiträgen zu.

5.3.3 Nächsthöhere Ordnung: (b), (c)

Die Beiträge (b) und (c) lassen sich auf eine ähnliche Form bringen, und auch im weiteren Verlauf wird sich ihre Behandlung auf sinnvolle Weise gemeinsam durchführen lassen. Die Loop-Beiträge sind

$$\Pi^{(b)}(i\omega_e) = \text{Diagramm} \quad (5.49)$$

$$= \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} T \sum_{i\omega_p} \Gamma_{\square\gamma^2 M M \gamma^2}((-i\omega_p, -\mathbf{p}), (i\omega_p, \mathbf{p}), (-i\omega_e, \mathbf{0})) D^M(i\omega_p, \mathbf{p}) \quad (5.50)$$

und

$$\Pi^{(c)}(i\omega_e) = \text{Diagramm} \quad (5.51)$$

$$= \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} T \sum_{i\omega_p} \Gamma_{\square\gamma^2 M\gamma^2 M}((-i\omega_p, -\mathbf{p}), (-i\omega_e, \mathbf{0}), (i\omega_p, \mathbf{p})) D^M(i\omega_p, \mathbf{p}). \quad (5.52)$$

Die Quarkvierecke $\Gamma_{\square\gamma^2 M\gamma^2 M}$ und $\Gamma_{\square\gamma^2 MM\gamma^2}$ sind analog zu den Quarkdreiecken Γ_{Δ} definiert.

$$\Gamma_{\square\gamma^2 MM\gamma^2}(p_1, p_2, p_3) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & p_2 & \\ & \diagup \quad \diagdown & \\ p_1 & \Gamma_M & \Gamma_M & \\ & \diagdown \quad \diagup & \\ & p_3 & \\ p_1 - p_2 - p_3 & & \end{array} \end{array} \quad (5.53)$$

$$= i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} [k_x \gamma^2 S(k) \Gamma_M S(k+p_1) \Gamma_M S(k+p_1+p_2) k_x \gamma^2 S(k+p_1+p_2+p_3)] \quad (5.54)$$

$$\Gamma_{\square\gamma^2 M\gamma^2 M}(p_1, p_2, p_3) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & p_2 & \\ & \diagup \quad \diagdown & \\ p_1 & \Gamma_M & p_x \gamma^2 & \\ & \diagdown \quad \diagup & \\ & p_3 & \\ p_1 - p_2 - p_3 & & \end{array} \end{array} \quad (5.55)$$

$$= i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} [k_x \gamma^2 S(k) \Gamma_M S(k+p_1) k_x \gamma^2 S(k+p_1+p_2) \Gamma_M S(k+p_1+p_2+p_3)] \quad (5.56)$$

Auch hier ließe sich die Matsubarasumme in eine Integration verwandeln. Auch könnte man Beitrag (b) als Quark-Selbstenergie ausdrücken. Da all dies jedoch nicht benötigt wird, gehen wir zum letzten und einfachsten Term der Entwicklung über.

5.3.4 Nächsthöhere Ordnung: (d)

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass der Loop-Beitrag

$$\Pi^{(d)} = \begin{array}{c} \begin{array}{c} \text{---} \bullet \text{---} \\ \text{---} \bullet \text{---} \\ \text{---} \bullet \text{---} \\ \text{---} \bullet \text{---} \\ \text{---} \bullet \text{---} \end{array} \end{array} \quad (5.57)$$

$$= \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} T \sum_{i\omega_p} \text{Tr} [p_x \gamma^2 S^{\Sigma^{(a)}}(i\omega_p + i\omega_e, \mathbf{p}) p_x \gamma^2 S(i\omega_p, \mathbf{p})] \quad (5.58)$$

verschwindet. $S^{\Sigma^{(a)}}$ ist ein um die skalare Selbstenergie $\Sigma^{(a)}$ korrigierter Quarkpropagator. $\Sigma^{(a)}$ ist einer der beiden $O(1/N_c)$ -Korrekturterme zur Quark-Selbstenergie.

$$\Sigma^{(a)} = \begin{array}{c} \begin{array}{c} \text{---} \bullet \text{---} \\ \text{---} \bullet \text{---} \\ \text{---} \bullet \text{---} \\ \text{---} \bullet \text{---} \\ \text{---} \bullet \text{---} \end{array} \end{array} \quad (5.59)$$

Der so modifizierte Propagator hat die Form

$$S^{\Sigma^{(a)}}(p) = S(p) \Sigma^{(a)}(p) S(p). \quad (5.60)$$

Zu dem Propagator $S^{\Sigma^{(a)}}$ gehört selbstverständlich auch eine Quark-Spektralfunktion $\rho^{(a)}(p)$. Der Ausdruck lässt sich analog zu (5.33) umformen, und man erhält

$$\text{Im} S = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\epsilon}{2\pi} \frac{1}{2} (n_F(\epsilon + \omega) - n_F(\epsilon)) \text{Tr} [\rho^{(a)}(\epsilon + \omega) \gamma^2 \rho(\epsilon) \gamma^2]. \quad (5.61)$$

Um nun die Zustandsdichten $\rho^{(a)}(p)$ zu berechnen, muß der Imaginärteil der Propagatoren gebildet werden.

$$\text{Im}S^{(a)} = \text{Im}S\text{Re}\Sigma^{(a)}\text{Re}S + \text{Re}S\text{Im}\Sigma^{(a)}\text{Re}S + \text{Re}S\text{Re}\Sigma^{(a)}\text{Im}S + \text{Im}S\text{Im}\Sigma^{(a)}\text{Im}S \quad (5.62)$$

Alle Terme, die ein $\text{Im}S$ enthalten, verschwinden wie in Gleichung (5.33). Der einzig interessante Term ist $\text{Re}S\text{Im}\Sigma^{(a)}\text{Re}S$. Was wir also benötigen, ist der Imaginärteil von $\Sigma^{(a)}$.

Wir schreiben $\Sigma^{(a)}$ nach der Definition in Gleichung (5.59):

$$\Sigma^{(a)} = D^{(\sigma)}(0, \mathbf{0}) \sum_M T \sum_{\omega_p} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \Gamma_{\Delta MM\sigma}(p, -p) D^{(M)}(p) \quad (5.63)$$

$$= D^{(\sigma)}(0, \mathbf{0}) \sum_M \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} X. \quad (5.64)$$

Nun schreiben wir die Matsubarasumme um und erhalten mit einer einfachen Konturumformung ein wichtiges Ergebnis.

$$X = - \oint_C \frac{dz}{2\pi i} n_F(z) \Gamma_{\Delta MM\sigma}(z, \mathbf{p}) D^{(M)}(z, \mathbf{p}) \quad (5.65)$$

$$= - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\epsilon}{2\pi i} n_F(\epsilon) \Gamma_{\Delta MM\sigma}(\epsilon + i\delta, \mathbf{p}) D^{(M)}(\epsilon + i\delta, \mathbf{p}) \\ + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\epsilon}{2\pi i} n_F(\epsilon) \Gamma_{\Delta MM\sigma}(\epsilon - i\delta, \mathbf{p}) D^{(M)}(\epsilon - i\delta, \mathbf{p}) \quad (5.66)$$

$$= - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\epsilon}{2\pi} n_F(\epsilon) \text{Im} \left(\Gamma_{\Delta MM\sigma}(\epsilon - i\delta, \mathbf{p}) D^{(M)}(\epsilon - i\delta, \mathbf{p}) \right) \quad (5.67)$$

$\in \mathbb{R}$

Da $\text{Im}D^M(0, \mathbf{p}) = 0$, ist auch $\text{Im}\Sigma^{(a)} = 0$ und somit auch

$$\eta^{(d)} = 0. \quad (5.68)$$

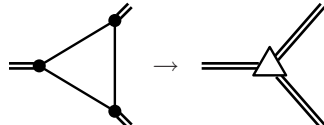
5.3.5 Problematik

Was zu tun bleibt, ist die Ergebnisse (5.48), (5.50) und (5.52) weiter zu vereinfachen und auszuwerten. Die größte technische Schwierigkeit besteht darin, die retardierten Quarkdreiecke und Quarkvierecke, deren Imaginärteile und deren Ableitungen nach dem äußeren Impuls zu berechnen. Selbst wenn dies durchgeführt wäre, bliebe ein sehr anisotropes Hauptwertintegral übrig. Der folgende Abschnitt stellt eine Näherungsmethoden vor, die gerade bei solchen effektiven Meson-Vertices diskutiert wurde.

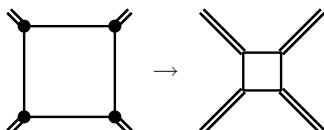
5.4 Quadratischer Statischer Limes

Wir machen nun eine weitere Näherung. Die Quarkdreiecke Γ_{Δ} und die Quarkvierecke Γ_{\square} nähern wir durch eine Entwicklung in Potenzen des externen Impulses p bis zur ersten nichtverschwindenden Ordnung. Die erste nichtverschwindende Ordnung von Γ_{Δ} ist proportional zu p^2 , wir nennen diesen genäherten Meson-Meson-Vertex Γ_{Δ}^{qsl} für *quadratischer statischer Limes*.

Diagrammatisch können wir diese neuen Objekte ebenfalls darstellen.



$$(5.69)$$



$$(5.70)$$

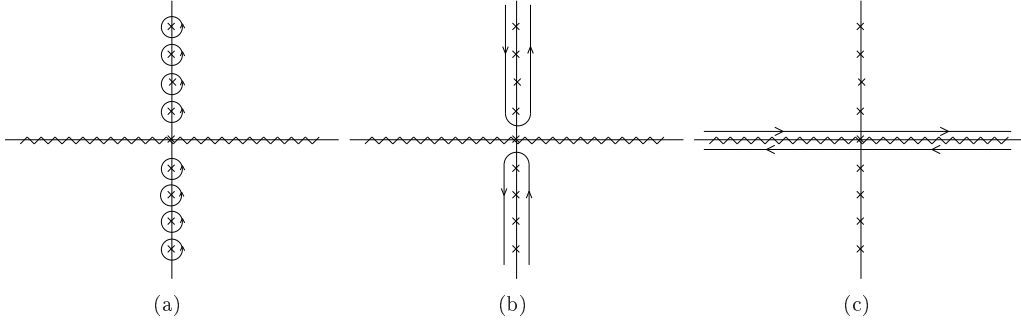


Abbildung 5.4: Der Integrationsweg von Gleichung (5.74) und seine Umformung hin zu Gleichung (5.75). Man beachte, dass der auf dem Branchcut liegende Pol separat behandelt wird.

Hierbei suggeriert die Form des Vertex die Verbindung zu dem auf einen Punkt zusammengezogenen Dreieck bzw. Viereck.

Nur diese erste von Null verschiedene Ordnung zu berücksichtigen scheint eine sehr drastische Näherung zu sein, ist doch das Verhalten für große \mathbf{p} deutlich verschieden. Da wir jedoch das Integral über den Mesonen-Impuls \mathbf{p} mit einem Dreierimpuls-Cut-off regularisieren werden (analog zu [17]), ist diese Näherung gar nicht so willkürlich. Problematisch ist eher, dass die Genauigkeit von der Temperatur abhängt: Streng genommen ist es eine Entwicklung nach dem dimensionslosen Vektor p^μ/m , und die Masse ist im entsprechenden Bereich des Phasendiagramms eine relativ stark variierende Größe (siehe auch Abschnitt 2.2.2).

Der so erhaltene Vertex Γ_{Δ}^{qsl} wird im Anhang C hergeleitet und hat die Form

$$-i\Gamma_{\Delta}^{qsl} = \text{const.} \cdot ip_x p_y. \quad (5.71)$$

Er ist insbesondere unabhängig von p_0 , hat eine triviale \mathbf{p} -Abhängigkeit und ist rein reell.

Für die Vertices Γ_{\square}^{qsl} ergibt sich

$$-i\Gamma_{\square}^{qsl} = \text{const.} \cdot ip_x^2 p_y^2. \quad (5.72)$$

Auch dieser Vertex ist unabhängig von p_0 , hat die triviale \mathbf{p} -Abhängigkeit und ist reell. Das wird uns als Eigenschaft schon genügen, um daraus weitreichende Konsequenzen ziehen zu können.

5.4.1 Die Beiträge (b) und (c) im statischen Limes

Wir schreiben $\Pi^{(b),(c),qsl}$ in der gemeinsamen Form

$$\Pi_M^{(b),(c),qsl} = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \Gamma_{\square}^{(b),(c),qsl} T \sum_{\omega_p} D_M(i\omega_p, \mathbf{p}). \quad (5.73)$$

Das Symbol $\Gamma_{\square}^{(b),(c),qsl}$ bezeichnet die Quark-Vierecke von $\Pi^{(b),(c)}$, wie sie in den Gleichungen (5.53) und (5.55) eingeführt wurden, im quadratischen Limes. Wir führen die Matsubara-Summe wieder einmal auf ein Konturintegral zurück und vergessen nicht, auf den auf dem Branchcut befindlichen Pol acht zu geben. Der Integrationsweg und seine Verformung ist in Abbildung 5.4 gezeigt.

$$\Pi_M^{(b),(c),qsl} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \Gamma_{\square}^{(b),(c),qsl} \left(TD(0, \mathbf{p}) + \oint \frac{dz}{2\pi i} n_B(z) D_M(z, \mathbf{p}) \right) \quad (5.74)$$

$$= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \Gamma_{\square}^{(b),(c),qsl} \left(TD(0, \mathbf{p}) + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\epsilon}{2\pi i} n_B(\epsilon) (D_M(\epsilon + i\delta, \mathbf{p}) - D_M(\epsilon - i\delta, \mathbf{p})) \right) \quad (5.75)$$

$$= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \Gamma_{\square}^{(b),(c),qsl} \left(TD(0, \mathbf{p}) + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\epsilon}{\pi} n_B(\epsilon) \text{Im} D_M(\epsilon, \mathbf{p}) \right) \in \mathbb{R} \quad (5.76)$$

Also ist $\text{Im}\Pi_M^{(b),(c),qsl} = 0$ und somit sind

$$\eta^{(b)qsl} = \eta^{(c)qsl} = 0. \quad (5.77)$$

Übrig bleibt also nur Term (a).

5.4.2 Der einzige nichtverschwindende Beitrag: (a)

Wir benutzen die Erkenntnisse zu Γ_Δ^{qsl} gemeinsam mit (5.47) und (5.48), um S_1 und S_2 auszurechnen.

$$\text{Im}S_1^{qsl} = T(\Gamma_\Delta^{qsl})^2 D(0)D(\omega) \quad (5.78)$$

$$\text{Im}S_2^{qsl} = (\Gamma_\Delta^{qsl})^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\epsilon}{2\pi} [n_B(\epsilon + \omega) - n_B(\epsilon)] [\text{Im}D(\epsilon)\text{Im}D(\epsilon + \omega)] \quad (5.79)$$

Bildet man nun die Ableitung nach ω für den Grenzfall $\omega \rightarrow 0$, so erhält man Quadrate von Spektralfunktionen. Hier ist eine kleine Besonderheit zu beachten, denn im Falle stabiler π -Mesonen ergibt sich eine ähnliche Situation wie im Teil 5.3.1: der Imaginärteil enthält zwar eine δ -Funktion, da diese jedoch immer um ein Stück $\omega > 0$ auseinanderliegen, ergibt das Produkt der beiden keinen Beitrag. Da ω beliebig klein wird, kann die δ -Funktion auch nicht auf dem Kontinuum oder dem Teilchen-Loch-Branch liegen. Der Imaginärteil ohne eine δ -Funktion wurde aber in (3.33) als $\text{Im}\tilde{D}$ bezeichnet.

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{d}{d\omega} \text{Im}S_1^{qsl} = T(\Gamma_\Delta^{qsl})^2 D(0)\text{Im}D'(0) \quad (5.80)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{d}{d\omega} \text{Im}S_2^{qsl} = (\Gamma_\Delta^{qsl})^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\epsilon}{2\pi} n'_B(\epsilon) \text{Im}\tilde{D}^2(\epsilon) \quad (5.81)$$

Man beachte, dass der Integrand in (5.81) symmetrisch ist und sich für $\epsilon \rightarrow 0$ stetig verhält. Wir erhalten also für den Beitrag eines Mesonloops zur Viskosität den Ausdruck

$$\begin{aligned} \eta^{(M),qsl} &= - \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (\Gamma_\Delta^{qsl})^2 \\ &\times \left(TD(0, \mathbf{p})\text{Im}D'(0, \mathbf{p}) + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\epsilon}{2\pi} n'_B(\epsilon) (\text{Im}\tilde{D}(\epsilon, \mathbf{p}))^2 \right) \end{aligned} \quad (5.82)$$

und für die gesamte Scherviskosität im statischen Limes

$$\eta^{qsl} = \eta^{(\sigma)qsl} + \sum_a \eta^{(\pi^a)qsl} \quad (5.83)$$

durch die Beiträge der einzelnen Mesonen.

5.5 Numerische Ergebnisse im statischen Limes

In diesem Abschnitt wollen wir nun die Formel (5.82) numerisch auswerten. Die verschiedenen Teile beleuchten verschiedene, aus unterschiedlichen Gründen interessante Bereiche des QCD-Phasendiagramms.

5.5.1 Ergebnisse bei niedriger Dichte

Einer der Anreize, sich mit dem Thema der Scherviskosität von Kernmaterie zu beschäftigen, waren Experimente am RHIC. Selbstverständlich muss man einige Vorsicht walten lassen, wenn man Schwerionenkollisionen mit Größen des thermischen Gleichgewichtes beschreibt. Aber nimmt man einmal letzteres an, so entsprechen die Experimente Zuständen bei nur schwach von null verschiedenem chemischen Potential μ . Wir nehmen im Folgenden das recht kleine chemische Potential $\mu = 10$ MeV an.

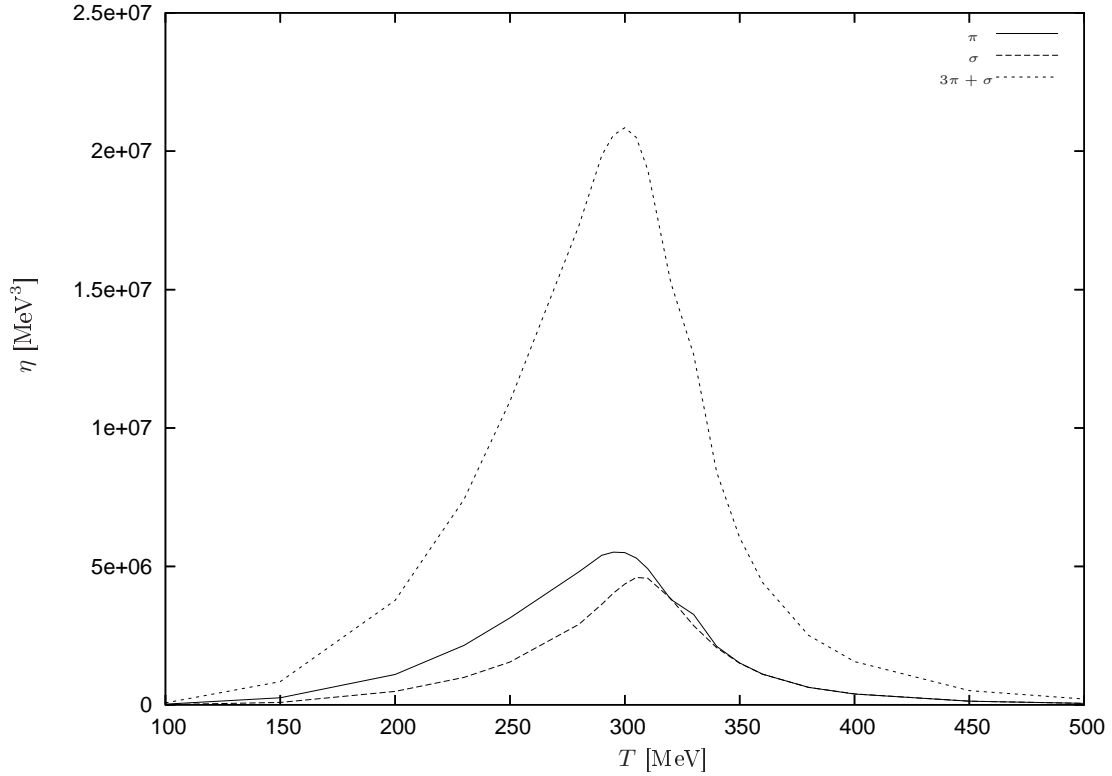


Abbildung 5.5: Scherviskosität η in $O(1/N_c)$ im statischen Limes als Funktion der Temperatur T bei chemischem Potential $\mu = 10$ MeV. Pauli-Villars-Parametersatz 5.

Für dieses chemische Potential lässt sich nun numerisch die Scherviskosität η als Funktion der Temperatur T berechnen. Das Ergebnis einer solchen Rechnung ist in Abbildung 5.5 gezeigt. Benutzt wurde hier der Pauli-Villars-Parametersatz 5. Man erkennt ein langsames Anwachsen der Viskosität bis zu einem klaren Maximum in der Umgebung des Mott-Übergangs. Dieses Verhalten kann direkt aus Gleichung (5.82) verstanden werden. Die Bose-Verteilungsfunktion wird mit steigender Temperatur breiter, gleichzeitig wächst der Teilchen-Loch-Zweig, wenn man sich aus dem Vakuum entfernt. Das Kontinuum wird ebenfalls stärker, wenn sich der Massenpol gegen $2m$ verschiebt. Nach dem Mott-Übergang werden die Spektralfunktionsbeiträge kleiner. Man erkennt ebenfalls die asymptotische Entartung von π und σ .

5.5.2 Am kritischen Punkt

Die Untersuchung der Scherviskosität nach Gleichung (5.82) am kritischen Endpunkt des QCD-Phasendiagramms verspricht interessante Ergebnisse. In Abschnitt 4.2.6 wurde diskutiert, dass das σ -Meson am kritischen Punkt ein interessantes Verhalten aufweist. In der Spektralfunktion $\rho_\sigma(\omega)$ bildet sich ein Pol bei $\omega = 0$ heraus, wenn man sich auf den kritischen Punkt zubewegt. Dies ist nun interessant, da η^{qsl} die Terme $D_\sigma(0, \mathbf{p})$, $\text{Im}D'_\sigma(0, \mathbf{p})$ und $n_B(\epsilon)\text{Im}D_\sigma(\epsilon, \mathbf{p})$ enthält, die allesamt sehr sensitiv auf das Verhalten des Propagators und der zugehörigen Spektralfunktion an der Stelle null sind.

In Abbildung 5.6 ist das Verhalten von η in der Nähe des kritischen Punktes gezeigt. Dabei ist $\mu = 430$ knapp unterhalb von $\mu_{krit} \approx 436$ MeV gewählt, während T im Crossovergebiet variiert wird. Wir haben uns für den Pauli-Villars-Parametersatz 5 entschieden, um das Verhalten von η zu untersuchen. In der Tat sieht man eine deutliche Dominanz des σ -Anteils an der Viskosität. Somit haben wir ein weiteres Merkmal des kritischen Endpunktes des QCD-Phasendiagramms gefunden.

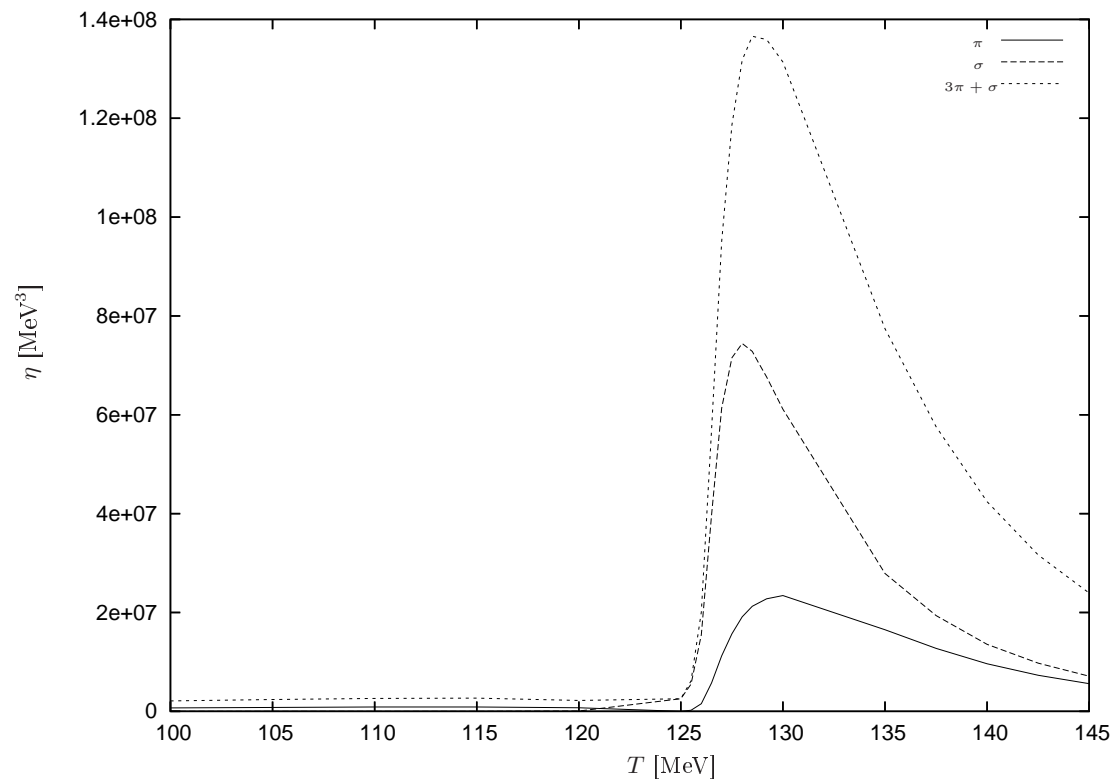


Abbildung 5.6: Scherviskosität η in $O(1/N_c)$ im statischen Limes als Funktion der Temperatur T bei chemischem Potential $\mu_{krit} \gtrsim \mu = 430$ MeV in der Nähe des kritischen Punktes. Pauli-Villars-Parametersatz 5.

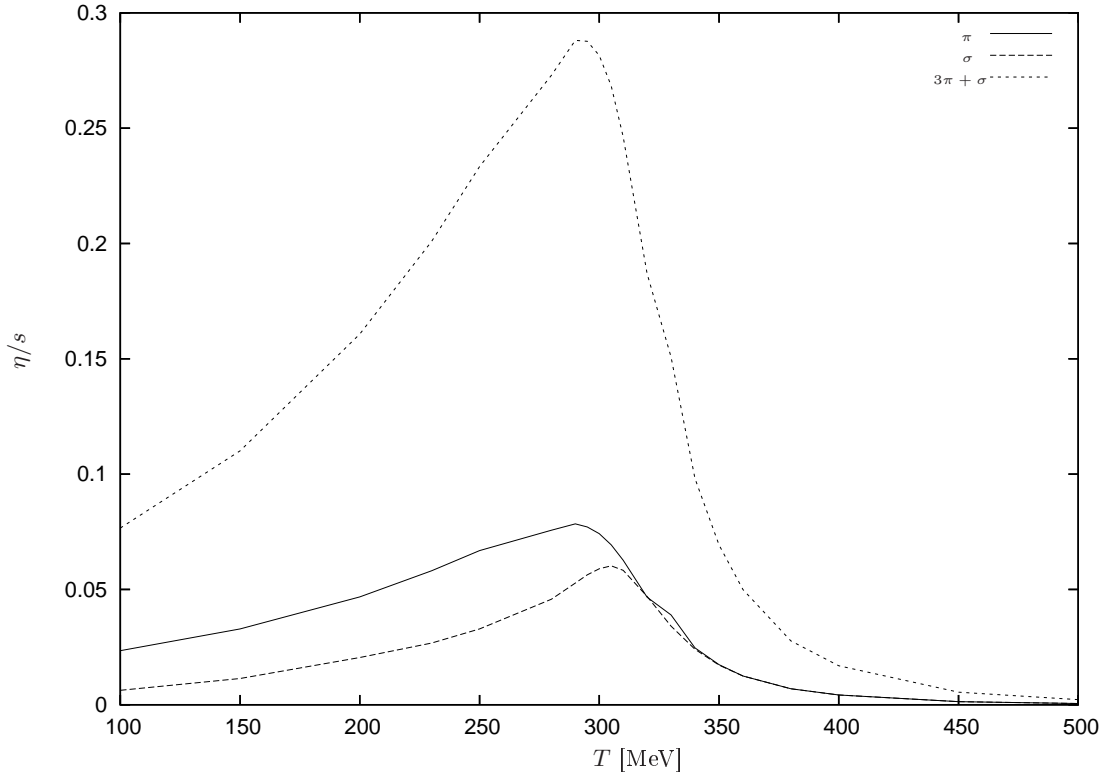


Abbildung 5.7: Verhältnis von Scherviskosität zu Entropiedichte η/s in $O(1/N_c)$ im statischen Limes als Funktion der Temperatur T bei chemischen Potential $\mu = 10$ MeV. Pauli-Villars-Parametersatz 5.

5.6 η/s und die KSS-Grenze

Wir verlassen nun den vorangegangenen, sehr technischen Abschnitt und kommen zu einer neuen, interessanten Größe.

Im Jahre 2005 machten P.K. Kovtun, D.T. Son und A. O. Starinets [41] eine Vorhersage, die sich auf das Verhältnis von Scherviskosität η und Entropiedichte s bezieht. Sie stellten die Behauptung auf, dass dieses Verhältnis stets über dem seit dem als KSS-Grenze bekannten Wert

$$\frac{\eta}{s} \geq \frac{1}{4\pi} \quad (5.84)$$

liegt. Sie benutzten zum Beweis die AdS/CFT-Dualität der Stringtheorie [42, 43]. Eine gewisse Klasse von Quantenfeldtheorien bei endlicher Temperatur hat eine Dualität zu schwarzen Branen, den höherdimensionalen Verallgemeinerungen von schwarzen Löchern. Diese Dualität kann zur Berechnung von Korrelationsfunktionen benutzt werden [44, 45, 41]. So lassen sich hydrodynamische Eigenschaften durch die Betrachtung solcher Brane berechnen [46]. Die Aussage ist sehr allgemein, so dass die Bereiche, in dem die KSS-Grenze gültig ist, viele verschiedene Systeme umfasst. Ebenso wurde nach der Möglichkeit, Gegenbeispiele zu konstruieren, gesucht [47]. Während bei alltäglichen Flüssigkeiten wie Wasser oder auch flüssigem Helium die KSS-Grenze von η/s um Größenordnungen übertroffen wird, scheint das Quark-Gluon-Plasma ein Kandidat für das asymptotische Erreichen der KSS-Grenze zu sein [48].

Wir können nun mit den vorliegenden Rechnungen versuchen, dieses Verhältnis zu überprüfen. Dazu verwenden wir die Mean-field-Entropiedichte s und die Scherviskosität nach der vorliegenden Berechnung. In Abbildung 5.7 ist das Verhalten für den Pauli-Villars-Parametersatz 5 gezeigt. Aufgetragen sind die Beiträge π und σ sowie deren Summe als Funktion der Temperatur. Das Verhältnis erreicht in der Nähe des Mott-Übergangs ein Maximum und fällt danach stark ab. Die KSS-Grenze wird dabei unterschritten. Dies kann verschiedene Gründe haben. Zum einen ist kann

es auf die Vereinfachungen der Rechnung, dem statischen Limes, zurückzuführen sein. Andererseits können Regulatoreffekte der Grund für die Unterschreitung sein. Man sollte auch nicht vergessen, dass auch die Gültigkeit der KSS-Grenze nicht als bewiesen angesehen werden kann.

5.7 Ausblick: Weitere Näherungsmethoden

5.7.1 Quarkpropagatoren mit endlicher Breite

Es wurde bereits diskutiert, dass der Konstituentenquarkloop keinen Beitrag zur Scherviskosität liefert, da der Peak der Hartree-Quark-Spektralfunktion keine Breite besitzt. Nun kann man natürlich Methoden verwenden, die dem Propagator S' eine Breite zuordnen.

Dies kann zum einen geschehen, in dem man phänomenologisch eine Quark-Spektralfunktion vorgibt, deren Parameter man motiviert. Statt eines δ -Peaks kann eine andere normierte Verteilung benutzt werden. Eine derartige Rechnung kann mit der aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung bekannten Breit-Wigner-Verteilung d

$$d(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma}{(x - m)^2 + \Gamma^2/4} \quad (5.85)$$

getan werden. Beachtet werden müssen auch noch die Eigenschaften der Spektralfunktion (wie sie sich zum Beispiel in Abschnitt 3.3.2 finden). Eine solche Rechnung wurde bereits durchgeführt [16]. Die Problematik eines solchen Vorgehens liegt natürlich in der Schwierigkeit, den äußeren Parameter Γ zu wählen und seine Temperaturabhängigkeit zu bestimmen.

Eine weit konsistentere Vorgehen ist die Verwendung von $1/N_c$ -Korrekturen zur Quark-Selbstenergie Σ .

$$\Sigma(p) = \Sigma^{(a)} + \Sigma^{(b)}(p) \quad (5.86)$$

$$= \text{[Diagramm: Selbstenergie mit Quark-Schleife]} + \text{[Diagramm: Selbstenergie mit Meson-Schleife]} \quad (5.87)$$

Den Korrekturterm $\Sigma^{(a)}$ kennen wir bereits aus Abschnitt 5.3.4, aber auch $\Sigma^{(b)}$ taucht in Abschnitt 5.3.3 im Term Π^b auf. Der korrigierte Quarkpropagator S^Σ kann nun durch die Selbstenergiebeiträge ausgedrückt werden.

$$S^\Sigma = S(p)\Sigma^{(a)}S(p) + S(p)\Sigma^{(b)}(p)S(p) \quad (5.88)$$

Wie schon gesehen wurde, ist $\Sigma^{(a)}$ reell und konstant und verändert somit zwar die Konstituentenquarkmasse, gibt ihm jedoch keine endliche Breite. $\Sigma^{(b)}$ dagegen kann die Quark-Spektralfunktion verändern. Dies geschieht jedoch nicht im statischen Limes. So muß entweder volle Impulsabhängigkeit von Meson-Vertices berücksichtigt werden oder zu einer anderen Näherung gegriffen werden.

5.7.2 Andere Vertex-Näherungen

Der statische Limes ist nicht die einzige Näherung, die bei Meson-Vertices vollzogen werden kann. Eine andere Möglichkeit, die Impulsabhängigkeit von Quarkdreiecken oder Quarkvierecken zu approximieren, ist ein Verfahren des Typs

$$|\mathbf{k} + \mathbf{q}| = \max(|\mathbf{k}|, |\mathbf{q}|). \quad (5.89)$$

Hier wird also die Summe zweier Vektoren durch den größeren Vektor genähert. Daraus folgt sofort, dass das Skalarprodukt $\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}$ verschwindet, denn mit dieser Näherung gilt automatisch

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{q} = \frac{1}{4} ((\mathbf{k} + \mathbf{q})^2 - (\mathbf{k} - \mathbf{q})^2) = \frac{1}{4} (\max^2(|\mathbf{k}|, |\mathbf{q}|) - \max^2(|\mathbf{k}|, |-\mathbf{q}|)) = 0. \quad (5.90)$$

Ein solcher Ansatz wurde ebenfalls schon in einer Berechnung der Scherviskosität benutzt [49].

Kapitel 6

Zusammenfassung und Ausblick

Wir untersuchten das Nambu-Jona-Lasinio-Modell im Vakuum sowie im Medium als Funktion der Temperatur T und des chemischen Potentials μ . Dabei verwendeten wir zunächst die Standard- beziehungsweise Mean-field-Approximationen Hartree+RPA. Wir legten ein besonderes Gewicht auf die Untersuchung der Mesonen π und σ und leiteten deren Spektralfunktionen her. Die Verwendung der Pauli-Villars-Regularisierung ermöglichte es uns, interessante Aspekte der Spektralfunktion wie auch Erweiterungen des Modells über die Standard-Approximationen Hartree+RPA hinaus vornehmen zu können. Der Rahmen dieser Erweiterung wurde von der Entwicklung in $1/N_c$ vorgegeben. Mit Hilfe des großkanonischen Potentials diskutierten wir das Mean-field-Phasendiagramm des Modells und konnten das Verhalten verschiedener Parametersätze miteinander vergleichen. Zusätzlich berechneten wir die Entropiedichte in diesem Näherungsschritt. Dabei wurden die Vor- und Nachteile der verschiedenen üblichen Regularisierungsschemata und deren Varianten diskutiert. Wir konnten außerdem Eigenschaften des σ -Mesons am kritischen Endpunkt des Phasendiagramms untersuchen. Wir benutzten dazu die Pauli-Villars-Regularisierung und fanden das erwartete Verhalten im Teilchen-Loch-Branch der Spektralfunktion, wie es schon in anderen Regularisierungsschemata auftrat. Wir berechneten die Beiträge zum thermodynamischen Potential durch mesonische Fluktuationen in nächsthöherer Ordnung in $1/N_c$. Schließlich haben wir erstmals die Scherviskosität des NJL-Modells in führender nicht-verschwindender Ordnung in der Entwicklung $O(1/N_c)$ hergeleitet. Wir haben diesen Transportkoeffizienten numerisch im statischen Limes berechnet. Die Ergebnisse wurden für Parameter ähnlich der der Experimente am RHIC diskutiert. Wir erhielten als Ergebnis, dass die Scherviskosität im Rahmen der Entwicklung für große Temperaturen klein wird. Dies werteten wir als Hinweis, dass das Quark-Gluon-Plasma Verhaltensweisen eines nur schwach viskosen Fluids zeigt. Die KSS-Grenze, die als eine universelle Grenze für die Viskosität eines hydrodynamischen Systems vorgeschlagen wurde, erlaubte es uns, einzuschätzen, in wie weit dieses Verhalten dem einer idealen Flüssigkeit entspricht. Die Ergebnisse legten die gute Übereinstimmung mit einem solchen idealisierten Fluid nahe, auch wenn aufgrund der Näherungen ein quantitativer Schluss nicht möglich war. Wir untersuchten weiterhin das Verhalten der Scherviskosität am kritischen Endpunkt des Phasendiagramms. Wir beobachten dabei, dass der σ -Beitrag zur Viskosität in der Nähe des kritischen Endpunktes sehr groß wird und haben damit ein weiteres Charakteristikum dieses Punktes gefunden.

Die Rechnungen dieser Arbeit zeigen bereits, dass die Scherviskosität im NJL-Modell durch eine Berechnung in nächsthöherer Ordnung in $1/N_c$ ein interessantes Verhalten aufweist. Da es nötig war, für einen ersten Einblick in dieses Gebiet weitere Näherungen durchzuführen, kann die Untersuchung dieses hydrodynamischen Parameters noch nicht als abgeschlossen gelten. Die natürliche Fortsetzung besteht darin, die einzelnen Näherungen zu hinterfragen und zu schrittweise auf sie zu verzichten.

Eine erste Erweiterung der hier vorgestellten Rechnungen zur Scherviskosität kann im Verlassen des statischen Limes bestehen. Neben der nicht-bosonisierten Behandlung der $O(1/N_c)$ -Entwicklung sind aber auch andere Näherungen für die Vertizes denkbar. Doch das große Ziel wäre die Berechnung in einer $O(1/N_c)$ -Entwicklung bis zur benötigten Ordnung N_c^0 ohne weitere Vereinfachungen. Dieses geht weiter als die bloße Berücksichtigung weiterer Terme im Ausdruck für die Viskosität. Es beinhaltet auch die konsistente Berücksichtigung von mesonischen Kor-

rekturen in der Minimierung des thermodynamischen Potentials. Dies führt zu Korrekturen zur Quark-Selbstenergie und Modifikationen der Propagatoren der Mesonen. Die Grundlage zu diesen Erweiterungen wurden mit der Berechnung der mesonischen Beiträge Ω_M in dieser Arbeit gelegt. Eine Berücksichtigung dieser Beiträge verspricht auch interessante Aspekte in anderen Fragestellungen des NJL-Modells, bei denen thermodynamische Potentiale eine Rolle spielen.

Anhang A

Elementare Integrale im Vakuum

A.1 Die Gapgleichung: iI_1

Das hier zu vereinfachende Integral iI_1 genügt der Gleichung

$$iI_1 = i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (\text{A.1})$$

mit $\epsilon > 0$ infinitesimal und dem Quadrat des Viererimpuls $k^2 = k_0^2 - \mathbf{k}^2$. Wir definieren die Energie $E_k^2 = m^2 + \mathbf{k}^2$ und führen eine Partialbruchzerlegung durch.

$$iI_1 = i \int \frac{dk_0}{2\pi} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_k} \left(\frac{1}{k_0 - \sqrt{E_k^2 - i\epsilon}} - \frac{1}{k_0 + \sqrt{E_k^2 - i\epsilon}} \right) \quad (\text{A.2})$$

Da ϵ eine infinitesimale Grösse ist, können wir diesen Ausdruck umschreiben.

$$iI_1 = i \int \frac{dk_0}{2\pi} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_k} \left(\frac{1}{k_0 - E_k + i\epsilon} - \frac{1}{k_0 + E_k - i\epsilon} \right) \quad (\text{A.3})$$

Wir wollen nun die k_0 -Integration analytisch durchführen. Dies ist recht einfach mit Hilfe des Residuensatzes zu realisieren. Wir denken uns den Integranden als Funktion von k_0 in die komplexe Zahlenebene fortgesetzt. Er besitzt zwei Pole, in Abbildung A.1(a) dargestellt. Wir addieren ein weiteres Stück Integrationsweg (siehe Abbildung A.1(b)), das die Kurve schliesst und keinen Beitrag liefert, und erhalten so eine geschlossene Kurve, die einen Pol enthält. Wir wenden nun den Residuensatz an und erhalten das Endergebnis.

$$iI_1 = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_k} \quad (\text{A.4})$$

Hierbei konnten wir stetig die Fortsetzung von ϵ nach Null durchführen. iI_1 enthält keine infinitesimale Grösse mehr.

A.2 Mesonen: iI

In diesem Abschnitt behandeln wir das Integral

$$iI(q) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 - m^2 + i\epsilon][(k+q)^2 - m^2 + i\epsilon]}. \quad (\text{A.5})$$

Wieder ist $\epsilon > 0$ infinitesimal. Mit Umformungen, die analog zu denen im vorangegangenen Abschnitt A.1 sind, gelangen wir zu dem Ausdruck

$$iI(q) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int \frac{dk_0}{2\pi} \left\{ \frac{1}{4E_k E_{kq}} \left(\frac{1}{k_0 - E_k + i\epsilon} - \frac{1}{k_0 + E_k - i\epsilon} \right) \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{1}{k_0 + q_0 - E_{kq} + i\epsilon} - \frac{1}{k_0 + q_0 + E_{kq} - i\epsilon} \right) \right\}. \quad (\text{A.6})$$

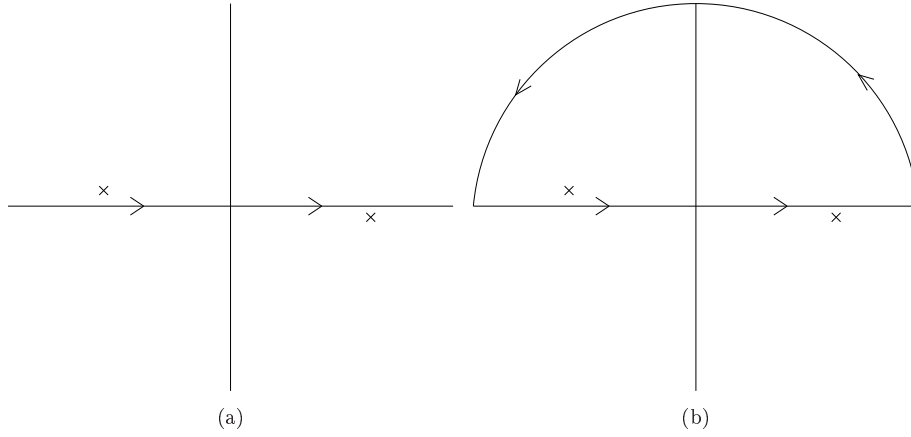


Abbildung A.1: Umformung von Integrationswegen in der komplexen k_0 -Ebene ausgehend von Gleichung (A.3).

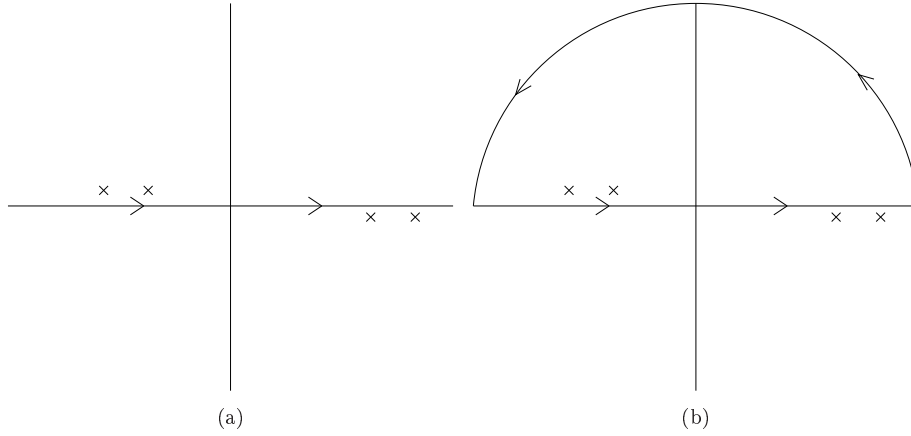


Abbildung A.2: Umformung von Integrationswegen in der komplexen k_0 -Ebene ausgehend von Gleichung (A.6).

Hierbei ist $E_{kq}^2 = m^2 + (\mathbf{k} + \mathbf{q})^2$. Um die k_0 -Integration analytisch auszuführen, betrachten wir den Integranden in der komplexen Zahlenebene. Es besitzt dieses Mal vier Pole, zwei in der oberen Halbebene und zwei in der unteren Halbebene. Diese Struktur ist in Abbildung A.2(a) dargestellt. Dem auf der reellen Achse verlaufenden Integrationsweg fügen wir einen beitragslosen Halbkreisbogen mit k_0 im positiven Imaginärteil hinzu und schließen ihn so (siehe Abbildung A.2(b)). Mit dem Residuensatz erhalten wir

$$iI(q) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{4E_k E_{kq}} \frac{1}{q_0^2 - s_E^2} (E_k + E_{kq}). \quad (\text{A.7})$$

Die neu eingeführte Variable $s_E = E_k + E_{kq}$ bezeichnet die Summe der beiden Energien. Wir setzen Translationsinvarianz in \mathbf{k} voraus und können so im zweiten Summanden durch Substitution $\mathbf{k}' = \mathbf{k} + \mathbf{q}$ und anschließendes Umbenennen und Zusammenfassen der Integrale das Endergebnis

$$iI(q) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_k} \frac{1}{q_0^2 - s_E^2} \quad (\text{A.8})$$

erhalten. Hierbei sei angemerkt, dass die Translationsinvarianz bei einer Cut-off-Regularisierung (siehe Abschnitt 2.6) nicht allgemein gegeben ist, sondern nur für $\mathbf{q} = 0$ erfüllt ist.

Anhang B

Elementare Integrale im Medium

B.1 Die Gapgleichung: iI_1

Im Medium erhalten wir das elementare Integral

$$iI_1 = - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} T \sum_{i\omega_k} \frac{1}{(i\omega_k + \mu)^2 - \mathbf{k}^2 - m^2}. \quad (\text{B.1})$$

Hierbei ist T die Temperatur und μ das chemische Potential. Die Summe läuft über alle fermionischen Matsubarafrequenzen

$$i\omega_k = (2n + 1)\pi iT, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (\text{B.2})$$

Wir können wie im Vakuum die Energie $E_k^2 = m^2 + \mathbf{k}^2$ definieren.

$$iI_1 = - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} T \sum_{i\omega_k} \frac{1}{(i\omega_k + \mu)^2 - E_k^2}. \quad (\text{B.3})$$

Haben wir im Vakuum ein Integral über k_0 gehabt, das sich analytisch auswerten ließ, haben wir nun eine Summe. Die übliche Technik, mit der solcherlei Matsubarafrequenzen berechnet werden, schreibt die Summe formal in ein Integral in der komplexen Ebene um.

$$iI_1 = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \oint_C \frac{dz}{2\pi i} n_F(z) \frac{1}{(z + \mu)^2 - E_k^2}. \quad (\text{B.4})$$

Hierbei bezeichnet C eine Kurve, die aus Ringen in der komplexen Ebene um die fermionischen Matsubarafrequenzen besteht. Das andere neu eingeführte Symbol bezeichnet die Fermi-Verteilungsfunktion $n_F(x) = (\exp(x/T) + 1)^{-1}$. Diesen Schritt macht man sich am Besten rückwärts, das heißt von Gleichung (B.4) nach Gleichung (B.3), klar. Der Integrand von Gleichung (B.4) hat in der komplexen Ebene zwei Pole bei $z = \pm E_k - \mu$ durch den Nenner des letzten Terms und zusätzlich unendlich viele Pole bei den fermionischen Matsubarafrequenzen durch die Fermi-Verteilungsfunktion n_F . Diese Pole und der Integrationsweg C sind in Abbildung B.1(a) veranschaulicht. Wendet man nun den Residuensatz auf dieses Integral um die Pole der Fermi-Verteilungsfunktion an, gelangt man zu Gleichung (B.3). Ein Vorteil ergibt sich nun, weil der Integrationsweg auch zu einem Weg C' , abgebildet in Abbildung B.1(b), umgeformt werden kann. Nun umschließt der Integrationsweg lediglich die zwei Pole bei $\pm E_k - \mu$. Davon lässt sich das Residuum leicht ausrechnen. Man erhält

$$iI_1 = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{dz}{2\pi i} (n_F(-E_k - \mu) - n_F(E_k - \mu)). \quad (\text{B.5})$$

Nun nutzt man die Eigenschaft der Fermi-Verteilungsfunktion

$$n_F(-x) = 1 - n_F(x) \quad (\text{B.6})$$

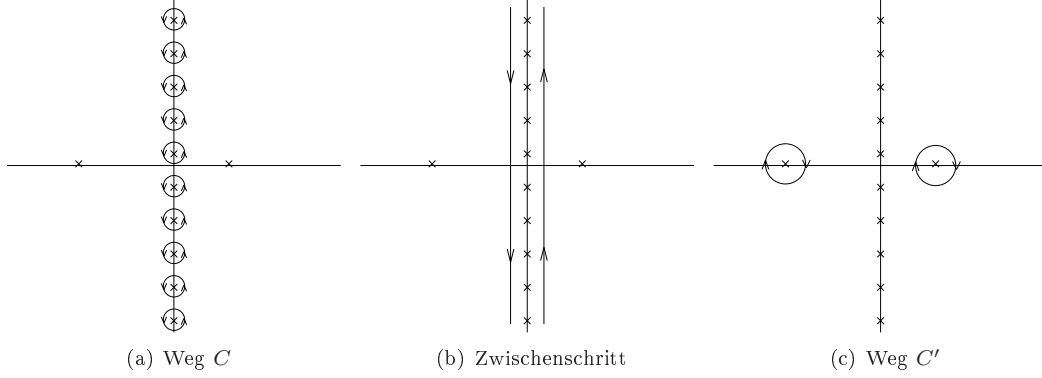


Abbildung B.1: Umformung von Integrationswegen in der komplexen k_0 -Ebene ausgehend von Gleichung (A.3).

aus und kommt so zum Endergebnis

$$iI_1 = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{dz}{2\pi i} (1 - n_F(E_k - \mu) - n_F(E_k + \mu)). \quad (\text{B.7})$$

Oft werden die beiden Fermi-Verteilungsfunktionen in Gleichung (B.7) mit $n_F(E_k - \mu) = n_k$ und $n_F(E_k + \mu) = \bar{n}_k$ bezeichnet, da sie als die Korrekturen durch die Quarks und Antiquarks des Mediums interpretiert werden können. Man sieht auch sofort die Verbindung zu iI_1 im Vakuum und kann so das Integral in einen Vakuum- und einen Mediumanteil aufspalten.

B.2 Mesonen: iI

Wir wenden uns dem Integral iI im Medium zu.

$$iI(i\omega_q, \mathbf{q}) = - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} T \sum_{i\omega_k} \frac{1}{[(i\omega_k + \mu) - \mathbf{k}^2 - m^2][(i\omega_k + i\omega_q + \mu) - (\mathbf{k} + \mathbf{q})^2 - m^2]} \quad (\text{B.8})$$

Hierbei läuft $i\omega_k$ analog zu der Rechnung in B.1 wieder über alle fermionischen Matsubarafrequenzen. Degegen ist $i\omega_q$ als Summe zweier fermionischer Matsubarafrequenzen eine bosonische Matsubarafrequenz der Form

$$i\omega_q = 2n\pi iT, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (\text{B.9})$$

Wir führen analog zu A.2 die Energien E_k und E_{kq} ein, $E_k^2 = \mathbf{k}^2 + m^2$, $E_{kq}^2 = (\mathbf{k} + \mathbf{q})^2 + m^2$ und können so iI ein Stück kompakter schreiben.

$$iI(i\omega_q, \mathbf{q}) = - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} T \sum_{i\omega_k} \frac{1}{[(i\omega_k + \mu) - E_k^2][(i\omega_k + i\omega_q + \mu) - E_{kq}^2]} \quad (\text{B.10})$$

Wieder schreiben wir die Matsubarasumme in ein Konturintegral um.

$$iI(i\omega_q, \mathbf{q}) = - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \oint_C \frac{dz}{2\pi i} n_F(z) \frac{1}{[(z + \mu) - E_k^2][(z + i\omega_q + \mu) - E_{kq}^2]} \quad (\text{B.11})$$

Der Integrationsweg C verläuft um die fermionischen Matsubarafrequenzen herum. Um dieses Wegintegral vereinfachen zu können, betrachten wir den Integranden in der komplexen Zahlenebene von z . Neben den Polen durch die Fermi-Verteilungsfunktion bei $z = (2n + 1)\pi iT$, $n \in \mathbb{Z}$, gibt es noch vier weitere Pole bei $z = \pm E_k - \mu$ und $z = \pm E_{kq} - \mu - i\omega_q$. Die Pole sowie der Weg C sind im Abbildung B.2(a) gezeigt. Über den Zwischenschritt in Abbildung B.2(b) formen wir C in C' um, welcher in Bild B.2(c) gezeigt wird. Nun werden lediglich vier Pole von C' umschlossen. Dieses Integral kann man mit Hilfe des Residuensatzes analytisch ausrechnen.

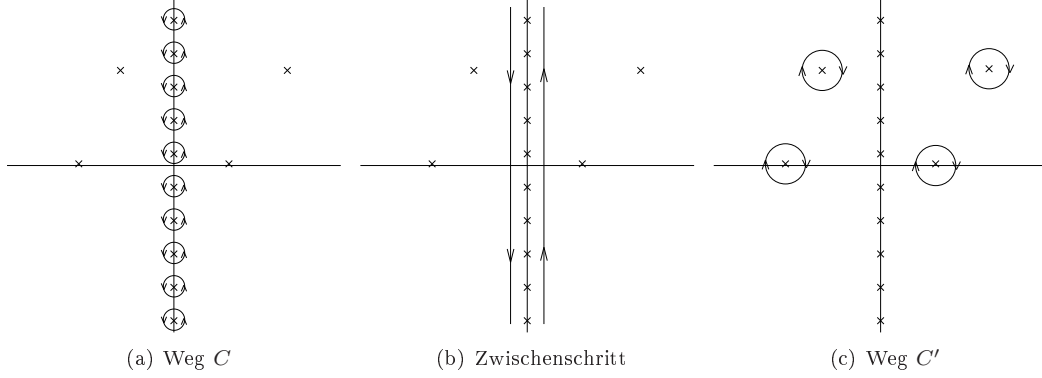


Abbildung B.2: Umformung von Interationswegen in der komplexen z -Ebene ausgehend von Gleichung (B.11). Die Pole sind bei $\pm E_k - mu$, $\pm E_{kq} - i\omega_q - \mu$ und $i\omega_k$. $i\omega_q$ ist eine bosonische, $i\omega_k$ sind fermionische Matsubarafrequenzen.

$$\begin{aligned}
 iI(i\omega_q, \mathbf{q}) &= - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} T \sum_{i\omega_k} \frac{1}{4E_k E_{kq}} \times \\
 &\quad \left\{ \frac{n_F(E_k - \mu)}{i\omega_q - d_E} - \frac{n_F(E_{kq} - \mu)}{i\omega_q + d_E} - \frac{n_F(E_k - \mu)}{i\omega_q + s_E} + \frac{n_F(-E_{kq} - \mu)}{i\omega_q + s_E} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{n_F(E_k - \mu)}{i\omega_q - s_E} + \frac{n_F(E_{kq} - \mu)}{i\omega_q - s_E} + \frac{n_F(-E_k - \mu)}{i\omega_q + d_E} - \frac{n_F(-E_{kq} - \mu)}{i\omega_q + d_E} \right\} \quad (\text{B.12})
 \end{aligned}$$

Hierbei ist $s_E = E_{kq} + E_k$ die Summe der beiden Energien und $d_E = E_{kq} - E_k$ die Differenz der beiden Energien. Ausgenutzt wurde, dass $n_F(x + i\omega_B) = n_F(x)$ für alle bosonischen Matsubarafrequenzen $i\omega_B$ gilt. Durch geschicktes Aufteilen in Einzelsummanden, Substitution $\mathbf{k}' = \mathbf{k} + \mathbf{q}$ und Rekombination kann man die Energien E_{kq} aus den Fermi-Verteilungsfunktionen eliminieren.

$$\begin{aligned}
 iI(i\omega_q, \mathbf{q}) &= - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} T \sum_{i\omega_k} \frac{1}{4E_k E_{kq}} \left\{ \right. \\
 &\quad n_F(E_k - \mu) \left(\frac{1}{i\omega_q - d_E} - \frac{1}{i\omega_q + d_E} - \frac{1}{i\omega_q + s_E} + \frac{1}{i\omega_q - s_E} \right) \\
 &\quad \left. + n_F(-E_k - \mu) \left(\frac{1}{i\omega_q + s_E} - \frac{1}{i\omega_q - s_E} + \frac{1}{i\omega_q + d_E} - \frac{1}{i\omega_q - d_E} \right) \right\} \quad (\text{B.13})
 \end{aligned}$$

Benutzt man nun wieder den Trick $n_F(-x) = 1 - n_F(x)$, so verschwinden einige Summanden und übrig bleibt

$$iI(i\omega_q, \mathbf{q}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{E_k} - \frac{n_k + \bar{n}_k}{2E_k E_{kq}} s_E \right) \frac{1}{(i\omega_q)^2 - s_E^2} - \frac{n_k + \bar{n}_k}{2E_k E_{kq}} d_E \frac{1}{(i\omega_q)^2 - d_E^2}. \quad (\text{B.14})$$

Wie bereits in Abschnitt B.1 definiert, ist $n_k = n_F(E_k - \mu)$ und $\bar{n}_k = n_F(E_k + \mu)$. Dieser Ausdruck ist für imaginäre Matsubarafrequenzen $i\omega_q$ definiert. Um ihn für reelle Energien q_0 zu berechnen, muss nun die stetige Fortsetzung $i\omega_q \rightarrow q_0 + i\epsilon$ berechnet werden. Den Realteil erhält man sofort, in dem $\epsilon = 0$ gesetzt wird und so das Integral in ein Hauptwertintegral übergeführt wird.

$$\text{Re}iI(q_0, \mathbf{q}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{E_k} - \frac{n_k + \bar{n}_k}{2E_k E_{kq}} s_E \right) \frac{1}{q_0^2 - s_E^2} - \frac{n_k + \bar{n}_k}{2E_k E_{kq}} d_E \frac{1}{q_0^2 - d_E^2}. \quad (\text{B.15})$$

Um den Imaginärteil zu erhalten, muss ein wenig mehr Aufwand betrieben werden, was im folgenden Abschnitt getan wird.

B.3 Der Imaginärteil von iI

In diesem Abschnitt wird der Imaginärteil des Integrals iI hergeleitet. Dies geschieht durch die Ersetzung $i\omega_q \rightarrow q_0 + i\epsilon$ in Formel (B.14). Durch diese Ersetzung wird man den Ausdruck von $\text{Im}iI$ erhalten, der für den retardierten Mesonpropagator benötigt wird. Der avancierte Propagator würde über eine analoge Rechnung $i\omega_q \rightarrow q_0 - i\epsilon$ berechnet - einfacher ist es jedoch, das retardierte Ergebnis komplex zu konjugieren, was zum gleichen Ergebnis führt. Mit Hilfe der Identität

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{Im} \frac{1}{x + i\epsilon} = -\pi \delta(x) \quad (\text{B.16})$$

gelangt man so zu

$$\begin{aligned} \text{Im}iI(q_0, \mathbf{q}) = - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{\pi}{2s_E} \left(\frac{1}{E_k} - \frac{n_k + \bar{n}_k}{2E_{kq}E_k} s_E \right) (\delta(q_0 - s_E) - \delta(q_0 + s_E)) \right. \\ \left. - \frac{\pi}{2d_E} \frac{n_k + \bar{n}_k}{2E_{kq}E_k} d_E (\delta(q_0 - d_E) - \delta(q_0 + d_E)) \right\} \quad (\text{B.17}) \end{aligned}$$

Wir schreiben das Integral in Kugelkoordinaten. Das Koordinatensystem von \mathbf{k} wählen wir derart, dass \mathbf{q} in die k_z Richtung zeigt. Wir entschließen uns dazu, die δ -Funktion bei der θ -Integration zu berücksichtigen. Diese Integration lässt sich sofort ausführen. Wir müssen im Folgenden immer Unterscheidungen treffen, ob $q_0^2 - \mathbf{q}^2$ raumartig oder zeitartig ist.

Falls $q^2 = q_0^2 - \mathbf{q}^2 > 0$:

$$\begin{aligned} \text{Im}iI(q_0, \mathbf{q}) = -\frac{1}{8\pi} \int_m^\infty dE_k \frac{\sqrt{E_k^2 - m^2}}{|\mathbf{k}| \cdot |\mathbf{q}|} \theta(q^2 - 4m^2) \times \\ \times \left\{ \theta(q_0 - E_k)(q_0 - E_k) \left(\frac{1}{q_0} - \frac{n_k + \bar{n}_k}{2(q_0 - E_k)} \right) \chi_{[\frac{q_0}{2} \pm \sqrt{\Delta}]}(E_k) \right. \\ - \theta(-q_0 - E_k)(-q_0 - E_k) \left(\frac{1}{-q_0} - \frac{n_k + \bar{n}_k}{2(-q_0 - E_k)} \right) \chi_{[-\frac{q_0}{2} \pm \sqrt{\Delta}]}(E_k) \\ + \theta(q_0 + E_k)(q_0 + E_k) \left(-\frac{n_k + \bar{n}_k}{2(q_0 + E_k)} \right) \chi_{[-\frac{q_0}{2} \pm \sqrt{\Delta}]}(E_k) \\ \left. - \theta(-q_0 + E_k)(-q_0 + E_k) \left(-\frac{n_k + \bar{n}_k}{2(-q_0 + E_k)} \right) \chi_{[\frac{q_0}{2} \pm \sqrt{\Delta}]}(E_k) \right\} \quad (\text{B.18}) \end{aligned}$$

Falls $q^2 = q_0^2 - \mathbf{q}^2 < 0$:

$$\begin{aligned} \text{Im}iI(q_0, \mathbf{q}) = -\frac{1}{8\pi} \int_m^\infty dE_k \frac{\sqrt{E_k^2 - m^2}}{|\mathbf{k}| \cdot |\mathbf{q}|} \theta(-q^2) \times \\ \times \left\{ \theta(q_0 - E_k)(q_0 - E_k) \left(\frac{1}{q_0} - \frac{n_k + \bar{n}_k}{2(q_0 - E_k)} \right) \left(1 - \chi_{[\frac{q_0}{2} \pm \sqrt{\Delta}]}(E_k) \right) \right. \\ - \theta(-q_0 - E_k)(-q_0 - E_k) \left(\frac{1}{-q_0} - \frac{n_k + \bar{n}_k}{2(-q_0 - E_k)} \right) \left(1 - \chi_{[-\frac{q_0}{2} \pm \sqrt{\Delta}]}(E_k) \right) \\ + \theta(q_0 + E_k)(q_0 + E_k) \left(-\frac{n_k + \bar{n}_k}{2(q_0 + E_k)} \right) \left(1 - \chi_{[-\frac{q_0}{2} \pm \sqrt{\Delta}]}(E_k) \right) \\ \left. - \theta(-q_0 + E_k)(-q_0 + E_k) \left(-\frac{n_k + \bar{n}_k}{2(-q_0 + E_k)} \right) \left(1 - \chi_{[\frac{q_0}{2} \pm \sqrt{\Delta}]}(E_k) \right) \right\} \quad (\text{B.19}) \end{aligned}$$

Das neu eingeführte Symbol $\sqrt{\Delta}$ ist auf folgende Weise definiert.

$$\sqrt{\Delta} = \frac{|\mathbf{q}|}{2} \sqrt{\frac{q^2 - 4m^2}{q^2}} \quad (\text{B.20})$$

Die Stufenfunktionen θ und die charakteristischen Funktionen χ schränken nun das E_k -Integrationsintervall weiter ein.

Falls $q^2 = q_0^2 - \mathbf{q}^2 > 0$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} i I(q_0, \mathbf{q}) &= -\frac{1}{8\pi} \theta(q_0^2 - \mathbf{q}^2 - 4m^2) \frac{1}{|\mathbf{q}|} \\ &\times \left\{ \theta(q_0) \int_{[\frac{q_0}{2} \pm \sqrt{\Delta}]} dE_k \left(1 - \frac{E_k}{q_0} - \frac{1}{2}(n_k + \bar{n}_k) \right) \right. \\ &\left. + \theta(-q_0) \int_{[-\frac{q_0}{2} \pm \sqrt{\Delta}]} dE_k \left(1 + \frac{E_k}{q_0} - \frac{1}{2}(n_k + \bar{n}_k) \right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

Falls $q^2 = q_0^2 - \mathbf{q}^2 < 0$:

$$\operatorname{Im} i I(q_0, \mathbf{q}) = \frac{1}{16\pi|\mathbf{q}|} \int_{-\frac{q_0}{2} + \sqrt{\Delta}}^{\infty} dE_k (n_k + \bar{n}_k) - \frac{1}{16\pi|\mathbf{q}|} \int_{\frac{q_0}{2} + \sqrt{\Delta}}^{\infty} dE_k (n_k + \bar{n}_k) \quad (\text{B.22})$$

Diese Ausdrücke lassen sich noch ein Stück weiter vereinfachen. Als Endergebnis erhält man Integrale über endliche Raumbereiche.

Falls $q_0^2 - \mathbf{q}^2 > 0$ (zeitartiger Impuls)

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} i I(q_0, \mathbf{q}) &= \frac{1}{16\pi} \theta(q_0^2 - \mathbf{q}^2 - 4m^2) \operatorname{sgn}(q_0) \\ &\times \left(-\sqrt{1 - \frac{4m^2}{q_0^2 - \mathbf{q}^2}} + \frac{1}{|\mathbf{q}|} \int_{|\frac{q_0}{2}| - \sqrt{\Delta}}^{|\frac{q_0}{2}| + \sqrt{\Delta}} dE_k (n_k + \bar{n}_k) \right), \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

Falls $q_0^2 - \mathbf{q}^2 < 0$ (raumartiger Impuls)

$$\operatorname{Im} i I(q_0, \mathbf{q}) = \frac{1}{16\pi|\mathbf{q}|} \operatorname{sgn}(q_0) \int_{\sqrt{\Delta} - |\frac{q_0}{2}|}^{\sqrt{\Delta} + |\frac{q_0}{2}|} dE_k (n_k + \bar{n}_k) \quad (\text{B.24})$$

Das verbliebene Integral lässt sich sogar mit Hilfe der Stammfunktion

$$\int dx \frac{1}{\exp(\frac{x}{T}) + 1} = -T \ln \left(1 + \exp\left(-\frac{x}{T}\right) \right) \quad (\text{B.25})$$

analytisch lösen.

Anhang C

Das Quark-Dreieck

Wir wollen hier $-i\Gamma_{\Delta}^{(\pi)}$ berechnen, wobei wir letztendlich daran interessiert sind, eine Näherung für kleine einlaufende Impulse zu machen. So werden wir den externen Impuls $i\omega_e$ gänzlich vernachlässigen.

$$-i\Gamma_{\Delta}^{(\pi,\sigma)} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} (k_x \gamma^2 S(k) \Gamma_{\pi^a, \sigma} S(k+p) \Gamma_{\pi^b, \sigma} S(k)) + ex. \quad (\text{C.1})$$

Der Zusatz $+ex$ bedeutet, dass beide Umlaufrichtungen berücksichtigt werden. Dies wird durch den Übergang $p \rightarrow -p$ realisiert. Nach Auswertung der Spur erhalten wir

$$\begin{aligned} -i\Gamma_{\Delta}^{(\pi)} &= -4N_c N_f \delta_{ab} \left\{ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(\frac{k_x k_y}{[k^2 - m^2]^2} - \frac{k_x p_y}{[k^2 - m^2][(k+p)^2 - m^2]} \right) \right. \\ &\quad \left. - p^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_x k_y}{[k^2 - m^2]^2 [(k+p)^2 - m^2]} \right\} + ex. \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

$$\begin{aligned} -i\Gamma_{\Delta}^{(\sigma)} &= -4N_c N_f \left\{ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(\frac{k_x k_y}{[k^2 - m^2]^2} - \frac{k_x p_y}{[k^2 - m^2][(k+p)^2 - m^2]} \right) \right. \\ &\quad \left. - (p^2 - 4m^2) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_x k_y}{[k^2 - m^2]^2 [(k+p)^2 - m^2]} \right\} + ex. \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Die ersten beiden Summanden sind gleich, beim dritten ist der Vorfaktor leicht verschieden. Der Integrand des ersten Termes ist antisymmetrisch und fällt somit weg. Es bleiben die beiden anderen, die nun $\zeta_{1,2}$ genannt seien.

$$\zeta_1 = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{p_y k_x}{[k^2 - m^2][(k+p)^2 - m^2]} \quad (\text{C.4})$$

$$= -\frac{1}{2} p_x p_y \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k - \frac{p}{2})^2 - m^2][(k + \frac{p}{2})^2 - m^2]} \quad (\text{C.5})$$

$$\zeta_2 = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_x k_y}{[k^2 - m^2]^2 [(k+p)^2 - m^2]} \quad (\text{C.6})$$

$$= \int_0^1 2(1-x) dx \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{(l_x - x p_x)(l_y - x p_y)}{[l^2 - m^2 + p^2 x(1-x)]^3} \quad (\text{C.7})$$

$$= p_x p_y \int_0^1 2(1-x) dx \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{[l^2 - m^2 + p^2 x(1-x)]^3} \quad (\text{C.8})$$

Nun wird eine Taylorentwicklung von ζ_1 und ζ_2 nach p bis zur ersten nichtverschwindenden Ordnung durchgeführt. Das ist hier die quadratische. Da eine ähnliche Entwicklung von [17] mit

dem Begriff statischer Limes versehen wird, nennen wir diese Vereinfachung den quadratischen statischen Limes (abgekürzt qsl). Dabei ist der Vorfaktor p^2 bzw. $p^2 - 4m^2$ vor ζ_2 nicht zu vergessen.

$$\zeta_1^{qsl} = -\frac{1}{2}p_x p_y \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 - m^2]^2} \quad (\text{C.9})$$

$$\zeta_2^{qsl} = \frac{1}{6}p_x p_y \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 - m^2]^3} \quad (\text{C.10})$$

Der Austauschterm führt zu einem Faktor zwei. Damit ist auch schon das Endergebnis erreicht.

$$-i\Gamma_{\Delta}^{(\pi)qsl} = -4N_c N_f \delta_{ab} p_x p_y \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 - m^2]^2} \quad (\text{C.11})$$

$$-i\Gamma_{\Delta}^{(\sigma)qsl} = -4N_c N_f p_x p_y \left(\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 - m^2]^2} - \frac{4}{3}m^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 - m^2]^3} \right) \quad (\text{C.12})$$

Literaturverzeichnis

- [1] M. Gell-Mann, “A Schematic Model of Baryons and Mesons,” *Phys. Lett.* **8** (1964) 214–215.
- [2] S. Weinberg, “Nonabelian Gauge Theories of the Strong Interactions,” *Phys. Rev. Lett.* **31** (1973) 494–497.
- [3] H. Fritzsche, M. Gell-Mann, and H. Leutwyler, “Advantages of the Color Octet Gluon Picture,” *Phys. Lett.* **B47** (1973) 365–368.
- [4] D. J. Gross and F. Wilczek, “Asymptotically Free Gauge Theories. I,” *Phys. Rev. D* **8** (Nov, 1973) 3633–3652.
- [5] D. J. Gross and F. Wilczek, “Ultraviolet Behavior of Non-Abelian Gauge Theories,” *Phys. Rev. Lett.* **30** (Jun, 1973) 1343–1346.
- [6] H. D. Politzer, “Reliable Perturbative Results for Strong Interactions?,” *Phys. Rev. Lett.* **30** (Jun, 1973) 1346–1349.
- [7] A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, C. B. Thorn, and V. F. Weisskopf, “A New Extended Model of Hadrons,” *Phys. Rev.* **D9** (1974) 3471–3495.
- [8] A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, and C. B. Thorn, “Baryon Structure in the Bag Theory,” *Phys. Rev.* **D10** (1974) 2599.
- [9] G. Ecker, “Chiral perturbation theory,” *Prog. Part. Nucl. Phys.* **35** (1995) 1–80, hep-ph/9501357.
- [10] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, “Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity. I,” *Phys. Rev.* **122** (1961) 345–358.
- [11] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, “Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity. II,” *Phys. Rev.* **124** (1961) 246–254.
- [12] **BRAHMS** Collaboration, I. Arsene *et al.*, “Quark gluon plasma and color glass condensate at RHIC? The perspective from the BRAHMS experiment,” *Nucl. Phys.* **A757** (2005) 1–27, nucl-ex/0410020.
- [13] P. F. Kolb, P. Huovinen, U. W. Heinz, and H. Heiselberg, “Elliptic flow at SPS and RHIC: From kinetic transport to hydrodynamics,” *Phys. Lett.* **B500** (2001) 232–240, hep-ph/0012137.
- [14] P. F. Kolb and U. W. Heinz, “Hydrodynamic description of ultrarelativistic heavy-ion collisions,” nucl-th/0305084.
- [15] **STAR** Collaboration, J. Adams *et al.*, “Experimental and theoretical challenges in the search for the quark gluon plasma: The STAR collaboration’s critical assessment of the evidence from RHIC collisions,” *Nucl. Phys.* **A757** (2005) 102–183, nucl-ex/0501009.
- [16] M. Iwasaki, H. Ohnishi, and T. Fukutome, “Shear viscosity and spectral function of the quark matter,” hep-ph/0606192.
- [17] M. Oertel, “Investigation of meson loop effects in the Nambu-Jona-Lasinio model,” hep-ph/0012224. Dissertation, TU-Darmstadt (2000).

- [18] J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer, “Microscopic theory of superconductivity,” *Phys. Rev.* **106** (1957) 162.
- [19] S. P. Klevansky, “The Nambu-Jona-Lasinio model of quantum chromodynamics,” *Rev. Mod. Phys.* **64** (1992) 649–708.
- [20] V. Dmitrašinović, H. J. Schulze, R. Tegen, and R. H. Lemmer, “Chirally symmetric O ($1/N(c)$ corrections to the Nambu-Jona-Lasinio model,” *Annals Phys.* **238** (1995) 332–369.
- [21] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, “An Introduction to quantum field theory,” Reading, USA: Addison-Wesley (1995) 842 p.
- [22] M. Oertel, M. Buballa, and J. Wambach, “Pion properties in the $1/N(c)$ corrected NJL model,” *Phys. Lett.* **B477** (2000) 77–82, [hep-ph/9908475](#).
- [23] M. Oertel, M. Buballa, and J. Wambach, “Meson properties in the $1/N(c)$ -corrected NJL model,” *Nucl. Phys.* **A676** (2000) 247–272, [hep-ph/0001239](#).
- [24] M. Oertel, M. Buballa, and J. Wambach, “Meson loop effects in the NJL model at zero and non-zero temperature,” *Phys. Atom. Nucl.* **64** (2001) 698–726, [hep-ph/0008131](#).
- [25] E. N. Nikolov, W. Broniowski, C. V. Christov, G. Ripka, and K. Goeke, “Meson loops in the Nambu-Jona-Lasinio model,” *Nucl. Phys.* **A608** (1996) 411–436, [hep-ph/9602274](#).
- [26] M. Buballa, “NJL model analysis of dense quark matter,” *Phys. Rept.* **407** (2005) 205–376, [hep-ph/0402234](#).
- [27] W. Pauli and F. Villars, “On the Invariant regularization in relativistic quantum theory,” *Rev. Mod. Phys.* **21** (1949) 434–444.
- [28] A. L. Fetter and J. D. Walecka, “Quantum Theory of Many-Particle Systems,” McGraw-Hill 1971.
- [29] J. I. Kapusta, “Finite-Temperatur Field Theory,” Cambridge University Press 1989.
- [30] M. L. Bellac, “Thermal Field Theory,” Cambridge University Press 2000.
- [31] J. Hüfner, S. P. Klevansky, P. Zhuang, and H. Voss, “Thermodynamics of a quark plasma beyond the mean field: A generalized Beth-Uhlenbeck approach,” *Annals Phys.* **234** (1994) 225–244.
- [32] M. Asakawa and K. Yazaki, “Chiral restoration at finite density and temperature,” *Nucl. Phys.* **A504** (1989) 668–684.
- [33] M. A. Stephanov, K. Rajagopal, and E. V. Shuryak, “Signatures of the tricritical point in QCD,” *Phys. Rev. Lett.* **81** (1998) 4816–4819, [hep-ph/9806219](#).
- [34] O. Scavenius, A. Mocsy, I. N. Mishustin, and D. H. Rischke, “Chiral Phase Transition within Effective Models with Constituent Quarks,” *Physical Review C* **64** (2001) 045202.
- [35] H. Fujii, “Scalar density fluctuation at critical end point in NJL model,” *Phys. Rev.* **D67** (2003) 094018, [hep-ph/0302167](#).
- [36] H. Abuki, “BCS / BEC crossover in quark matter and evolution of its static and dynamic properties: From the atomic unitary gas to color superconductivity,” *Nucl. Phys.* **A791** (2007) 117–164, [hep-ph/0605081](#).
- [37] P. Nozières and S. Schmitt-Rink, “From Bose Condensation in an Attractive Fermion Gas: From Weak to Strong Coupling Superconductivity,” *J. Low Temp. Phys.* **59** (1984) 195–211.
- [38] Y. B. Ivanov, “Hydrodynamic Approach to Relativistic Heavy-Ion Collisions,” Lecture presented at the Helmholtz International Summer School Dense Matter in Heavy Ion Collisions and Astrophysics in Dubna 2006, <http://theor.jinr.ru/dm2006/talks/ivanov.pdf>.

- [39] G. Baym, H. Monien, C. J. Pethick, and D. G. Ravenhall, “Transverse interactions and transport in relativistic quark - gluon and electromagnetic plasmas,” *Phys. Rev. Lett.* **64** (1990) 1867–1870.
- [40] G. Mahan, “Many-Particle Physics,”. Plenum Press, New York 2000.
- [41] P. Kovtun, D. T. Son, and A. O. Starinets, “Viscosity in strongly interacting quantum field theories from black hole physics,” *Phys. Rev. Lett.* **94** (2005) 111601, [hep-th/0405231](#).
- [42] J. M. Maldacena, “The large N limit of superconformal field theories and supergravity,” *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 231–252, [hep-th/9711200](#).
- [43] E. Witten, “Anti-de Sitter space, thermal phase transition, and confinement in gauge theories,” *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 505–532, [hep-th/9803131](#).
- [44] S. S. Gubser, I. R. Klebanov, and A. M. Polyakov, “A semi-classical limit of the gauge/string correspondence,” *Nucl. Phys.* **B636** (2002) 99–114, [hep-th/0204051](#).
- [45] O. Aharony, S. S. Gubser, J. M. Maldacena, H. Ooguri, and Y. Oz, “Large N field theories, string theory and gravity,” *Phys. Rept.* **323** (2000) 183–386, [hep-th/9905111](#).
- [46] P. Kovtun, D. T. Son, and A. O. Starinets, “Holography and hydrodynamics: Diffusion on stretched horizons,” *JHEP* **10** (2003) 064, [hep-th/0309213](#).
- [47] A. Cherman, T. D. Cohen, and P. M. Hohler, “A sticky business: the status of the conjectured viscosity/entropy density bound,” [arXiv:0708.4201 \[hep-th\]](#).
- [48] **PHENIX** Collaboration, A. Adare *et al.*, “Energy loss and flow of heavy quarks in Au + Au collisions at $\sqrt{s(NN)} = 200$ -GeV,” *Phys. Rev. Lett.* **98** (2007) 172301, [nucl-ex/0611018](#).
- [49] T. Fukutome and M. Iwasaki, “Effect of Soft Modes on the Shear Viscosity of Quark Matter,” [arXiv:0707.3196 \[hep-ph\]](#).

Danksagung

Mein erster Dank gilt Herrn Prof. Dr. J. Wambach, der mir diese Diplomarbeit angeboten hat und der sie in ihrem Verlauf mit vielen Inspirationen in interessante Richtungen zu lenken wusste. Bei PD Dr. Michael Buballa möchte ich mich herzlich für seine intensive Betreuung und die physikalische Einblicke, die ich durch ihn gewonnen habe, bedanken.

Der NHQ-Gruppe, in deren angenehmer Atmosphäre ich mich sehr wohl gefühlt haben, möchte ich an dieser Stelle ebenso meinen Dank aussprechen. Ebenso Haris Djapo, Patrick Hedfeld, Jan Heffner, Christian Kellermann und Alexander Rothkopf, die durch interessante Diskussionen sicherlich meine Augen für viele spannende Phänomene unserer Welt geöffnet haben.

Ich will des weiteren hier die Gelegenheit ergreifen, den vielen guten Dozenten und Betreuern, die ich während meines Studiums kennen gelernt habe, für ihre Lehre zu danken.

Zu guter Letzt möchte ich meiner Freundin Marianne für ihre Unterstützung danken, die mir nicht nur während des Verlaufs dieser Arbeit sehr geholfen hat.

Erklärung zur Diplomarbeit

Ich habe diese Diplomarbeit selbstständig verfasst. Alle benutzten Quellen und Hilfsmittel sind im Literaturverzeichnis angegeben worden.

Darmstadt, 28. September 2007

Klaus Heckmann