
Der Quarkpropagator in selbstkonsistenter $1/N_c$ Entwicklung im NJL Modell

The Quark Propagator in a selfconsistent $1/N_c$ Expansion in the NJL Model

Master-Thesis von Daniel Müller

August 2009



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Fachbereich Physik
Institut für Kernphysik
Nuclei, Hadrons & Quarks

Der Quarkpropagator in selbstkonsistenter $1/N_c$ Entwicklung im NJL Modell
The Quark Propagator in a selfconsistent $1/N_c$ Expansion in the NJL Model

vorgelegte Master-Thesis von Daniel Müller

1. Gutachten: Prof. Dr. J. Wambach
2. Gutachten: PD Dr. M. Buballa

Tag der Einreichung:

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird der Quarkpropagator im NJL Modell in einer selbstkonsistenten $1/N_c$ Entwicklung in nächst-führender Ordnung berechnet. Die Berechnungen werden iterativ im euklidischen Raum durchgeführt. Das chirale Quarkkondensat wird direkt berechnet und die Abhängigkeit von Temperatur und chemischem Potential mit Meanfield Rechnungen verglichen. Aus den euklidischen Propagatoren werden mit Hilfe der Maximum-Entropie-Methode (MEM) die zugehörigen Spektralfunktionen bestimmt. Dadurch können die Massen von Quarks und Mesonen abgeschätzt und auch Zerfallskanäle identifiziert werden. Zum Testen dieser Methode werden die MEM Ergebnisse mit bekannten oder perturbativen Spektralfunktionen, welche direkt im Minkowskiraum berechnet wurden, verglichen.

Abstract

In this thesis the quark propagator is calculated in the NJL model in a selfconsistent $1/N_c$ expansion at next-to-leading order. The calculations are carried out iteratively in euclidean space. The chiral quark condensate and its dependence on temperature and chemical potential is calculated directly and compared with meanfield results. By using the Maximum-Entropy-Method (MEM) spectral functions are determined from the euclidean propagators. Thereby quark and meson masses can be estimated and decay channels identified. For testing this method the MEM results are compared with exact or perturbative spectral functions calculated directly in Minkowski space.

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	3
2	Das SU(2) NJL Modell	5
2.1	Das Modell	5
2.2	NJL Lagrangian und Symmetrien	5
2.3	Quarks und Mesonen	6
2.4	Thermodynamisches Potential	9
2.5	Spektralfunktionen	11
2.6	Massen instabiler Teilchen	12
3	$1/N_c$ Entwicklung	13
3.1	$1/N_c$ Entwicklung und Zählschema	13
3.2	Φ -ableitbare Theorie	13
4	Struktur der Propagatoren und Spektralfunktionen	17
4.1	Bosonischer Sektor	17
4.2	Fermionischer Sektor	20
5	Lösen der Gapgleichung in $1/N_c$ Näherung	23
5.1	Regularisierung	23
5.2	Selbstenergiebeiträge	24
5.3	Thermodynamisches Potential	25
5.4	Numerische Berechnung	27
5.5	Das chirale Quarkkondensats in NLO	30
6	Bestimmung der Spektralfunktion mit der Maximum-Entropie-Methode	33
6.1	Maximum-Entropie-Methode	33
6.2	Numerische Implementation	35
6.3	Ergebnisse	37
6.4	Vergleich mit (perturbativen) Berechnungen im Minkowskiraum	41
7	Zusammenfassung und Ausblick	47

1 Einführung

Durch die Einführung des Quarkmodells konnte Murray Gell-Mann Mitte des zwanzigsten Jahrhunderts das bis dahin entdeckte Spektrum an stark wechselwirkenden Teilchen systematisch einordnen, welches durch die steigenden Energien an Teilchenbeschleunigern zugänglich wurde [1]. Da bereits die elektroschwache Wechselwirkung erfolgreich durch Quantenfeldtheorien beschrieben werden konnte, wurde die Quantenchromodynamik (QCD) zur feldtheoretischen Beschreibung der Quarks entwickelt. Die zugrundeliegende Eichgruppe der QCD ist die nichtabelsche $SU(3)$, weshalb die Austauschbosonen der starken Wechselwirkung, die Gluonen, auch untereinander wechselwirken können. Die Ladung der starken Wechselwirkung wird als Farbladung bezeichnet. Ein direkt aus der Eichsymmetrie folgendes Phänomen ist die asymptotische Freiheit [2], [3]. Sie besagt, dass die Kopplungskonstante der QCD, welche bei niedrigen Energien sehr hoch ist und dort keinen perturbativen Zugang ermöglicht, bei hohen Energien bzw. kleinen Abständen sehr klein wird. In diesem Energiebereich kann die QCD durch störungstheoretische Entwicklung in der Kopplungskonstanten untersucht werden, daher ist dieses Regime experimentell gut bestätigt [4]. Im Niederenergiebereich ist der Zugang zur QCD jedoch recht kompliziert und dort auftretende Phänomene wie das Confinement, durch welches farbladungstragende Quarks und Gluonen nicht isoliert sondern nur in farblosen Hadronen vorkommen, sind theoretisch noch nicht vollständig verstanden. Eine weitere wichtige Eigenschaft der QCD sind die Symmetrien. Hier spielt die chirale Symmetrie eine besondere Rolle, welche bei niedrigen Energien spontan gebrochen ist und die niedrigen Massen des pseudoskalaren Mesonoktetts erklärt, welche die Pseudogoldstonebosonen der Symmetriebrechung sind.

Um den Niederenergiebereich der QCD zu beschreiben, sind effektive Theorien und Modelle sehr hilfreich. Diese stimmen in einem bestimmten Grenzwert mit der QCD überein, sind aber durch Vernachlässigen von bestimmten Eigenschaften und Freiheitsgraden der QCD, welche erst bei höheren Energien wichtig werden, einfacher zu handhaben. Will man auch den Bereich des Phasenübergangs zwischen chiral gebrochener und restaurierter Phase beschreiben, benötigt man ein Modell, das einen nicht-störungstheoretischen Zugang ermöglicht. Ein Modell, welches dies bietet und in dieser Arbeit verwendet wird, ist das Nambu-Jona-Lasinio Modell (NJL Modell) [5], [6]. Die Freiheitsgrade des Modells sind die Quarks, während gluonische Beiträge vernachlässigt werden. Die Quark-Gluon Wechselwirkung wird im Modell durch eine einfachere effektive 4-Punkt Wechselwirkung zwischen Quarks und Antiquarks ersetzt. Da das Modell die chirale Symmetrie und deren spontane Brechung beinhaltet, können damit recht einfach in Meanfield Näherung ein Phasendiagramm berechnet werden und in Random-Phase Näherung Mesonen im Vakuum und Medium beschrieben werden. Einige Mängel des Modells, die auf das fehlende Confinement zurückzuführen sind, wie zu hohe Quarkdichten bei niedrigen Temperaturen, können durch Einführung des Polyakovloopfeldes und dessen Kopplung an die Quarks behoben werden, wodurch auch der Confinement-Deconfinement Phasenübergang beschrieben werden kann [7], [8], [9], [10]. Ein weiteres Problem des NJL Modells, ebenfalls aufgrund des fehlenden Confinements, ist das mögliche Auftreten von freien Quarks. Dadurch ist ein unphysikalischer Zerfall von schweren Mesonen in ein Quark-Antiquarkpaar möglich. Bei leichten Mesonen wie dem pseudoskalaren Oktett ist dieser kinematisch nicht möglich, wohl aber bei

den schwereren Vektormesonen. Will man das Rho Meson beschreiben, welches insbesondere bei der Berechnung Dileptonproduktionsraten in Schwerionenkollisionen eine Rolle spielt, so hat man in Hartree / Random-Phase Näherung nur zwei unphysikalische Möglichkeiten. Entweder liegt die Rho Meson Masse leicht unterhalb der Quark-Antiquarkschwelle und das Meson ist stabil, oder es ist schwerer und der Zerfall in ein Quark-Antiquark Paar ist möglich. Der physikalische Zerfall in Pionen ist nicht implementiert. Dieser Mangel kann beseitigt werden, wenn man im NJL Modell eine $1/N_c$ Entwicklung durchführt und Beiträge höherer Ordnung berücksichtigt. In [11] wurde bereits das NJL Modell mit mesonischen Korrekturen untersucht. Dabei wurde zum einen ein perturbatives Dressing der Quarkpropagatoren mit Mesonloops untersucht, welches bei niedrigen Temperaturen eine gute Beschreibung des Quarkkondensats und des Rho Mesons lieferte, aufgrund des perturbativen Charakters jedoch nicht bei höheren Temperaturen in der Nähe des Phasenübergangs anwendbar ist. Zum anderen wurde auch eine selbstkonsistente Methode untersucht, wobei jedoch nur lokale Beiträge zur Quarkselbstenergie berücksichtigt wurden. Diese Methode konnte auch bei höheren Temperaturen angewandt werden, die Vernachlässigung der nichtlokalen Beiträge führte jedoch zu Problemen wie tachyonischen Pionen, welche erst durch weitere Regularisierungsvorschriften beseitigt werden konnten. Zudem trat im chiralen Limes bei endlicher Temperatur ein 1. Ordnung Phasenübergang auf, wobei man jedoch für die QCD einen Phasenübergang 2. Ordnung erwartet. Ziel dieser Arbeit ist es nun, die $1/N_c$ Entwicklung im NJL Modell konsistent in erster Ordnung über Meanfield hinaus durchzuführen und den Quarkpropagator zu berechnen.

Im ersten Abschnitt wird dazu das NJL Modell vorgestellt und in führender Hartree / Random-Phase Näherung untersucht. Im zweiten Abschnitt wird eine systematische Entwicklung in der Anzahl der Farben $1/N_c$ eingeführt. Im dritten Abschnitt werden allgemeine Eigenschaften von Quark- und Mesonpropagatoren untersucht, welche im vierten Abschnitt verwendet werden, um den Quarkpropagator in nächster Ordnung in der $1/N_c$ Entwicklung zu bestimmen. Die Berechnungen werden dabei im euklidischen Raum für imaginäre Energien durchgeführt, weshalb auch die Ergebnisse direkt nur für euklidische Impulse vorliegen. Um dennoch Aussagen über das Verhalten dynamischer Größen wie Spektralfunktionen für reelle Energien treffen zu können, ist eine analytische Fortsetzung nötig. Diese kann mit Hilfe der Maximum-Entropie-Methode (MEM) abgeschätzt werden, was im fünften Abschnitt beschrieben wird.

2 Das SU(2) NJL Modell

2.1 Das Modell

In den sechziger Jahren entwickelten Nambu und Jona-Lasinio ein effektives Modell zur Beschreibung von Nukleonen [5], [6], indem sie eine Analogie zwischen der Energielücke (Gap) zwischen Grundzustand und angeregten Zuständen eines BCS Supraleiters und der Fermionenmasse feststellten. Diese Energielücke wird im Supraleiter dynamisch durch die attraktive, durch Phononen vermittelte, Wechselwirkung zwischen den Elektronen erzeugt. Die Fermionenmasse wird daher im NJL Modell ebenfalls dynamisch durch die attraktive Wechselwirkung zwischen leichten nackten Fermionen erzeugt. Quarks, welche zu dieser Zeit noch nicht bekannt waren, kamen in dem Modell nicht vor. Etwa 20 Jahre später wurde daher das Modell wieder aufgegriffen und zur Beschreibung von Quarks uminterpretiert [12], [13], [14]. Da bei der Beschreibung von Nukleonen Confinement keine Rolle spielt, sofern man deren innere Struktur nicht betrachtet, ist dieses essentielle Phänomen der QCD nicht im Modell implementiert. Will man nun Quarks beschreiben, fehlt das Confinement und es treten teilweise unphysikalische Effekte wie zum Beispiel Zerfälle von Mesonen in Quark-Antiquark Paare auf. Nichtsdestotrotz ist das Modell auch bei der Beschreibung von Quarks erfolgreich, da wichtige Symmetrien der QCD wie auch deren spontane und explizite Brechung im Modell realisiert werden können [15], [16], [17]. Dabei spielt insbesondere die chirale Symmetrie eine wichtige Rolle, durch deren spontane Brechung die Mesonen im pseudoskalaren Oktett als Goldstonebosonen sehr niedrige Massen bekommen. Zudem lassen sich durch den Übergang von spontan gebrochener zu restaurierter Phase auch Vorhersagen zum QCD Phasendiagramm und einem kritischen Endpunkt treffen. Insbesondere hier hat das Modell eine große Bedeutung, da in dieser Region störungstheoretische Ansätze wie eine Entwicklung um die niedrige Kopplungskonstante bei hohen Impulsen oder eine Entwicklung um kleine Impulse durch chirale Störungstheorie zusammenbrechen. Auch mit Gitterrechnungen ist es bei endlichen chemischen Potentialen nur sehr schwer möglich, Vorhersagen zu treffen.

2.2 NJL Lagrangian und Symmetrien

Im 2-Flavor Fall mit Skalar- und Vektorwechselwirkung lautet der NJL-Lagrangian

$$\mathcal{L} = \bar{q}(i\cancel{d} - m_0)q + g_s [(\bar{q}q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5\vec{\tau}q)^2] - g_v [(\bar{q}\gamma^\mu\vec{\tau}q)^2 + (\bar{q}\gamma_5\gamma^\mu\vec{\tau}q)^2] \quad (2.1)$$

mit den Quarkfeldern q , einer skalaren Kopplung g_s und einer Vektorkopplung g_v , sowie den Paulimatrizen im Isospinraum $\vec{\tau}$. Setzt man Isospinsymmetrie voraus, ist die Stromquarkmasse m_0 für Up- und Downquarks identisch.

Das NJL Modell weist die wichtigen Symmetrien der QCD auf. Der Lagrangian besitzt eine $U_V(1)$ Symmetrie, welche die Baryonenzahlerhaltung garantiert und auch für verschiedene Quarkmassen erfüllt ist. Im Isospin-symmetrischen Fall ist der Lagrangian invariant unter $SU_V(2)$ Rotationen im Isospinraum, wodurch Up- und Downquarks entartet sind. Im chiralen Limes $m_0 = 0$



Abbildung 2.1: Dyson Gleichung des Quarkpropagators mit nackten (dünne Linien) und gedressten (dicke Linien) Quarkpropagatoren

besitzt der Lagrangian zusätzlich eine Invarianz unter $SU_A(2)$ Rotationen und weist somit insgesamt eine $SU_V(2) \otimes SU_A(2) \otimes U_V(1)$ Symmetrie auf. Da $SU_V(2) \otimes SU_A(2) \cong SU_R(2) \otimes SU_L(2)$, nennt man diese Invarianz auch chirale Symmetrie, da der Lagrangian unter unabhängigen $SU(2)$ Transformationen der links- und rechtshändigen Quarkfelder invariant ist. Bei ausreichend großer Kopplungskonstante g_s ist dies jedoch nur die Symmetrie des Lagrangians, nicht des Grundzustandes. Im Vakuum ist die chirale Symmetrie dadurch spontan zur $SU_V(2) \otimes U_V(1)$ Symmetrie gebrochen. Ordnungsparameter dieser Symmetriebrechung ist das Quarkkondensat $\langle \bar{q}q \rangle$. Nach dem Goldstonetheorem erfordert dies $N_f^2 - 1 = 3$ masselose Goldstonebosonen, welche im 2-Flavor-Fall durch das Piontripllett gegeben sind. Für hohe Temperaturen und Dichten verschwindet das Quarkkondensat und die chirale Symmetrie ist restauriert. Dadurch bekommen die Pionen eine Masse und durch das Sigma Meson einen entarteten chiralen Partner. Außerhalb des chiralen Limes ist die chirale Symmetrie explizit gebrochen. In der Natur sind die Quarkmassen jedoch sehr klein, daher ist dies nur eine kleine Störung und die Effekte der Symmetrie sind dennoch beobachtbar. Dies äußert sich in einer kleinen, jedoch endlichen Pionmasse. Die $U_A(1)$ -Symmetrie des QCD Lagrangian, welche in der QCD durch die Quantisierung gebrochen wird, wird im 2-Flavor-NJL-Modell in jedem Fall explizit durch den skalaren und pseudoskalaren Wechselwirkungsterm gebrochen.

2.3 Quarks und Mesonen

In dieser Arbeit wird das Modell zur Vereinfachung ohne Vektorwechselwirkungen betrachtet ($g_v = 0$)

$$\mathcal{L} = \bar{q}(i\cancel{\partial} - m_0)q + g_s [(\bar{q}q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5 \vec{\tau}q)^2] \quad (2.2)$$

Die Stromquarks mit einer Masse m_0 erhalten durch die dynamisch durch die Wechselwirkung erzeugte Quarkselbstenergie eine effektive Masse (Konstituentenquarkmasse) m . Dies wird in Hartree Näherung durch die Dyson Gleichung Abb. 2.1 beschrieben, woraus man mit den üblichen Feynmanregeln erhält

$$iS(p) = iS_0(p) + iS_0(p)(-i\Sigma_H)iS(p) \quad (2.3)$$

$S_0(p) = (\cancel{p} - m_0 + i\epsilon)^{-1}$ ist der nackte, $S(p) = (\cancel{p} - m + i\epsilon)^{-1}$ der gedresste Quarkpropagator, sowie Σ_H die lokale Hartree Selbstenergie. Daraus erhält man

$$m = m_0 + \Sigma_H = m_0 + \sum_M 2ig_M \Gamma_M \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr}(\Gamma_M S(k)) \quad (2.4)$$

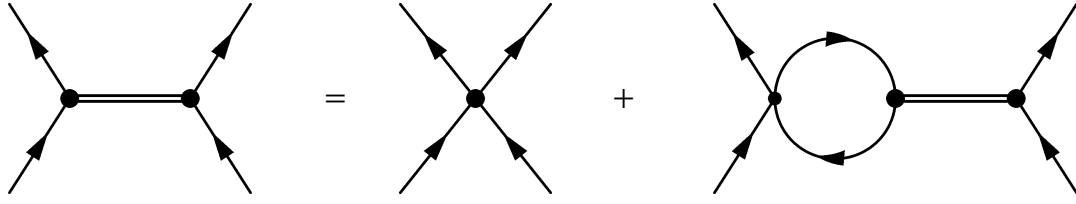


Abbildung 2.2: Bethe-Salpeter Gleichung der Quark-Antiquarkstreuung, die Doppellinien stellen RPA Mesonpropagatoren dar

mit den skalaren und pseudoskalaren Wechselwirkungskanälen $\Gamma_s = \mathbb{1}$, $\Gamma_p = i\gamma_5 \vec{\tau}$. Die Spuren werden im Dirac-, Farb- und Flavorraum ausgewertet. Durch die Spurbildung trägt nur der skalare Kanal bei und man erhält die Gapgleichung

$$m = m_0 + 8N_c N_f m g_s I_1(0)$$

$$\text{mit } I_1(\mathbf{q}) = i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k_0^2 - (\mathbf{k} - \mathbf{q})^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (2.5)$$

Unter Anwendung einer kovarianten Regularisierung wäre dieses Integral unabhängig von \mathbf{q} , da die Substitution $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k} + \mathbf{q}$ der Integrationsvariablen möglich wäre, welche die \mathbf{q} -Abhängigkeit beseitigt. Da in dieser Arbeit jedoch ein nicht-kovarianter 3er-Impuls Cutoff verwendet wird (siehe Abschnitt 5), wird auch das \mathbf{q} abhängige Integral benötigt.

Es fällt auf, dass im chiralen Limes ($m_0 = 0$) die triviale Lösung $m = 0$ die Gapgleichung erfüllt. Im Vakuum ist dies bei ausreichend hoher Kopplungskonstanten g_s jedoch nicht die einzige Lösung der nichtlinearen Gleichung. Beschreibt eine endliche Quarkmasse den Grundzustand des Systems, ist die chirale Symmetrie spontan gebrochen. Welche der Lösungen nun die physikalische Quarkmasse beschreibt, sieht man durch Untersuchung des thermodynamischen Potentials, welches später eingeführt wird.

Mesonen werden im NJL Modell als Resonanz in der Quark-Antiquark Streuung beschrieben. In Random-Phase-Approximation wird dieser Prozess durch die Bethe-Salpeter Gleichung Abb. 2.2 beschrieben und man erhält die Gleichung für die Streumatrix \hat{T}

$$i\hat{T}(q) = i\hat{K} + i\hat{K} (-i\hat{\Pi}(q)) i\hat{T}(q) \quad (2.6)$$

mit dem Streukern

$$i\hat{K} = \sum_M 2ig_M (\Gamma_M \otimes \Gamma_M) \quad (2.7)$$

und den Polarisationsfunktionen bei gleichmäßiger Aufteilung der externen 3er-Impulse auf die Quarkpropagatoren

$$J_{MN} = \Gamma_M \hat{\Pi}(q) \Gamma_N = i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr}[\Gamma_M S(k_0 + q_0, \mathbf{k} + \mathbf{q}/2) \Gamma_N S(k_0, \mathbf{k} - \mathbf{q}/2)] \quad (2.8)$$

Da die skalaren und pseudoskalaren Kanäle nicht mischen ($J_{sp} = 0$), entkoppeln diese beiden Kanäle und man erhält mit dem Ansatz $\hat{T}_M(q) = -\Gamma_M D_M(q) \Gamma_M$ den Mesonpropagator

$$D_M(q) = \frac{-2g_M}{1 - 2g_M J_M(q)} \quad (2.9)$$

Dies ist die Definition des Mesonpropagators, wie sie im NJL Modell üblicherweise verwendet wird. Da das NJL Modell ein effektives Modell für Quarks ist, liefert der Lagrangian direkt nur den Quarkpropagator. Mesonen sind im Modell nur Zwischenzustände und der Mesonpropagator nur eine abkürzende Schreibweise für die unendliche Reihe von Quarkloops. Der NJL Mesonpropagator unterscheidet sich daher von der allgemeinen Definition des Mesonpropagators, wie sie im nächsten Abschnitt verwendet wird, durch die Asymptotik, da insbesondere die äußeren Kopplungen in den NJL-Propagator absorbiert wurden. Daher verschwindet der Mesonpropagator nicht für große Impulse, wie man es von einem Propagator erwartet, sondern besitzt den Grenzwert $-2g_M$.

Die Sigma- und Pi-Polarisationsfunktionen kann man explizit angeben

$$\begin{aligned} J_s(q) &= 4N_c N_f I_1(\mathbf{q}/2) - (q^2 - 4m^2) 2N_c N_f I_2(q) \\ J_p(q) &= 4N_c N_f I_1(\mathbf{q}/2) - q^2 2N_c N_f I_2(q) \end{aligned} \quad (2.10)$$

mit $I_2(q) = i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{((k_0 + q_0)^2 - (\mathbf{k} + \mathbf{q}/2)^2 - m^2 + i\epsilon)(k_0^2 - (\mathbf{k} - \mathbf{q}/2)^2 - m^2 + i\epsilon)}$

Im Vakuum sind die Polarisationsfunktionen bei Verwendung einer kovarianten Regularisierung aufgrund von Lorentzsymmetrie nur vom Quadrat des 4er-Impulses abhängig ($J_s(q) = J_s(q^2)$, $J_p(q) = J_p(q^2)$). Die Mesonmasse ist nun als Polstelle des Mesonpropagators definiert und das Meson stellt somit eine Resonanz in der Quark-Antiquark Streuung dar.

$$D_M^{-1}(q)|_{q^2=m_M^2} = 0 \quad (2.11)$$

Um die Quark- und Mesonenmassen im Medium zu berechnen, verwendet man den Matsubara-Formalismus [18]. Dabei wird das Integral über die Zeitkomponente der auftretenden Impulsintegrale Gln. (2.5), (2.10) durch eine Matsubarasumme ersetzt

$$\begin{aligned} i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} f(k_0, \mathbf{k}) &\longrightarrow -T \sum_n \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} f(i\omega_n + \mu, \mathbf{k}) \\ i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} f(k_0 + q_0, \mathbf{k} + \mathbf{q}) &\longrightarrow -T \sum_n \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} f(i\omega_n + i\omega_m + \mu, \mathbf{k} + \mathbf{q}) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Hierbei sind $\omega_n = (2n+1)\pi T$ fermionische und $\omega_m = 2m\pi T$ bosonische Matsubarafrequenzen, m und n sind ganze Zahlen. In Hartree / Random-Phase Näherung kann man die Matsubarasummen noch analytisch berechnen und erhält mit der stetigen Fortsetzung $i\omega_m \rightarrow q_0 + i\epsilon$ für den retardierten Propagator

$$\begin{aligned} I_1(\mathbf{q}) &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{k-q}} (1 - n_F(E_{k-q} - \mu) - n_F(E_{k-q} + \mu)) \\ I_2(q) &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{4E_{k-q/2} E_{k+q/2}} (1 - n_F(E_{k-q/2} - \mu) - n_F(E_{k-q/2} + \mu)) \\ &\quad \cdot \left(\frac{1}{q_0 - s_E + i\epsilon} - \frac{1}{q_0 + s_E + i\epsilon} + \frac{1}{q_0 - d_E + i\epsilon} - \frac{1}{q_0 + d_E + i\epsilon} \right) \end{aligned} \quad (2.13)$$

mit $E_k = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$, $n_F(x) = \frac{1}{e^{x/T} + 1}$
 $s_E = E_{k+q/2} + E_{k-q/2}$, $d_E = E_{k+q/2} - E_{k-q/2}$

2.4 Thermodynamisches Potential

Die im letzten Abschnitt hergeleitete Gapgleichung lässt sich auch mit Hilfe des thermodynamischen Potentials bestimmen. Zusätzlich erhält man hierbei durch die absoluten Werte des thermodynamischen Potentials an den Lösungen der Gapgleichung auch Informationen über die Stabilität der Lösungen. Dies ist insbesondere wichtig, wenn die Gapgleichung mehrere Lösungen besitzt, um den Grundzustand zu finden. Desweiteren kann mit Hilfe des Potentials auch ein Phasendiagramm konstruiert werden.

Um das thermodynamische Potential auf Meanfield-Niveau zu bestimmen, werden die quadratisch auftretenden Wechselwirkungsterme im Lagrangian Gl. (2.2) zunächst linearisiert. Dazu führt man die Kondensate

$$\langle \bar{q} \hat{\theta} q \rangle = -i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr}(\hat{\theta} S(k)) \quad (2.14)$$

ein und vernachlässigt quadratische Terme der Fluktuationen $\delta(\bar{q} \hat{\theta} q) = \bar{q} \hat{\theta} q - \langle \bar{q} \hat{\theta} q \rangle$, so dass

$$(\bar{q} \hat{\theta} q)^2 \approx 2 \langle \bar{q} \hat{\theta} q \rangle (\bar{q} \hat{\theta} q) - \langle \bar{q} \hat{\theta} q \rangle^2 \quad (2.15)$$

Für den Lagrangian Gl. (2.2) existiert in dieser Näherung nur ein nichtverschwindendes Kondensat, das chirale Quarkkondensat

$$\langle \bar{q} q \rangle = \sigma \quad (2.16)$$

Damit kann man den Lagrangian nähern

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &\approx \bar{q}(i\hat{\not{d}} - m_0 + 2g_s\sigma)q - g_s\sigma^2 \\ &= \bar{q}(i\hat{\not{d}} - m)q - g_s\sigma^2 \end{aligned} \quad (2.17)$$

mit der bereits aus Gl. (2.5) bekannten Konstituentenquarkmasse m

$$m = m_0 - 2g_s\sigma \quad (2.18)$$

Das großkanonische Thermodynamische Potential ist über die großkanonische Zustandssumme \mathcal{Z} definiert

$$\Omega(T, \mu) = -\frac{T}{V} \ln \mathcal{Z} = -\frac{T}{V} \ln \text{Tr} \exp \left(-\frac{1}{T} \int d^3x (\mathcal{H} - \mu q^\dagger q) \right) \quad (2.19)$$

mit der Hamiltondichte

$$\mathcal{H} = iq^\dagger \dot{q} - \mathcal{L} \quad (2.20)$$

Setzt man die Meanfield Lagrangedichte Gl. (2.17) ein, erhält man

$$\Omega(T, \mu) = \Omega_{\text{free}}(T, \mu; m) + g_s\sigma^2 \quad (2.21)$$

mit dem Beitrag $\Omega_{\text{free}}(T, \mu; m)$ eines freien Fermionengases mit Fermionenmasse m . m ist jedoch nicht unabhängig, sondern wird über Gl. (2.18) bestimmt. Daher werden solche Variablen mit Semikolon von den „echten“ Variablen T und μ getrennt. Das freie Potential

$$\Omega_{\text{free}}(T, \mu) = -T \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \text{Tr} \ln \left(\frac{1}{T} S^{-1}(i\omega_n, \mathbf{k}) \right) \quad (2.22)$$

mit dem inversen Propagator

$$S^{-1}(i\omega_n, \mathbf{k}) = (i\omega_n + \mu)\gamma^0 - k_i\gamma_i - m \quad (2.23)$$

findet man in Textbüchern wie [18] und man erhält

$$\Omega(T, \mu) = \frac{(m - m_0)^2}{4g_s} - 2N_c N_f \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \cdot \left\{ E_k + T \ln \left(1 + \exp \left(-\frac{E_k - \mu}{T} \right) \right) + T \ln \left(1 + \exp \left(-\frac{E_k + \mu}{T} \right) \right) \right\} \quad (2.24)$$

Den Grundzustand für ein gegebenes Paar (T, μ) erhält man, indem man das Potential bezüglich der Konstituentenquarkmasse m minimiert und bei mehreren Lösungen diese mit dem kleinsten Potential auswählt

$$\frac{\delta\Omega}{\delta m} = 0 \quad (2.25)$$

Dadurch erhält man wiederum die Gapgleichung im Medium Gl. (2.5) mit (2.13)

$$m = m_0 + 4N_c N_f m g_s \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_k} (1 - n_F(E_k - \mu) - n_F(E_k + \mu)) \quad (2.26)$$

Mit Gl. (2.18) erhält man nun auch einen Ausdruck für das skalare Kondensat σ

$$\sigma = -2N_c N_f m \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_k} (1 - n_F(E_k - \mu) - n_F(E_k + \mu)) \quad (2.27)$$

Aufgrund thermodynamischer Konsistenz muss das thermodynamische Potential folgende Relation erfüllen

$$\frac{\partial\Omega}{\partial m_0} = \sigma \quad (2.28)$$

Mit Gln. (2.24) und (2.18) und Anwendung der Kettenregel ergibt sich

$$\frac{\partial\Omega}{\partial m_0} = \sigma + \frac{\delta\Omega}{\delta m} \frac{\partial m}{\partial m_0} \quad (2.29)$$

Damit sieht man sofort, dass Gl. (2.28) durch die Forderung Gl. (2.25) gewährleistet ist. An den Extrempunkten ist das Potential somit thermodynamisch konsistent. Dazwischen ist dies im Allgemeinen zwar nicht mehr der Fall [19], zur Ermittlung der physikalischen Quarkmasse genügt jedoch die Konsistenz der stationären Punkte.

2.5 Spektralfunktionen

Weitere Eigenschaften von Mesonen lassen sich über Spektralfunktionen erhalten. Insbesondere bei instabilen Mesonen kann man damit Aussagen über deren Zerfallsbreite treffen. Die Mesonspektralfunktion ist definiert als

$$\rho_M(q) = -2\text{Im } D_M(q) \quad (2.30)$$

Sind die Meson Polarisationsfunktionen J_M reell, so sind auch Zähler und Nenner von D_M reell. An der Polstelle ($q^2 = m_M^2$) kann man den Mesonpropagator dann entwickeln

$$D_M \approx \frac{g_{M\bar{q}q}^2}{q^2 - m_M^2} \quad (2.31)$$

mit der Quark-Meson Kopplungskonstanten $g_{M\bar{q}q}$. Mit der Ersetzung für den retardierten Propagator $q_0 \rightarrow q_0 + i\epsilon$ im Limes $\epsilon \rightarrow 0$, $\epsilon > 0$ ergibt sich mit Hilfe der Identität

$$\text{Im} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x \pm i\epsilon} = \mp \pi \delta(x) \quad (2.32)$$

die Spektralfunktion in der Umgebung des Pols zu

$$\rho_M(q) = -2\text{Im } D_M(q) \propto g_{M\bar{q}q}^2 \delta(q^2 - m_M^2) \quad (2.33)$$

Neben dem Polbeitrag besitzt die Spektralfunktion noch Beiträge, wenn die Mesonpolarisationsfunktionen J_M komplex werden. Für den Mesonpropagator Gl. (2.9)

$$D_M(q) = \frac{-2g_M}{1 - 2g_M J_M(q)} \quad (2.34)$$

ergibt dies

$$\rho_M(q) = \frac{8g_M^2 \text{Im } J_M}{(1 - 2g_M \text{Re } J_M)^2 + (2g_M \text{Im } J_M)^2} + \text{Polbeiträge} \quad (2.35)$$

Bei genauerer Untersuchung der Polarisationsfunktion findet man, dass Imaginärteile in Hartree / RPA in drei Impulsbereichen auftreten. Für raumartige Impulse $q^2 < 0$ erhält man im Medium den „Teilchen-Loch-Branch“, welcher durch Emissions- und Absorptionsprozesse von Mesonen durch Quarks oder Antiquarks interpretiert werden kann. Für zeitartige Impulse größer als die doppelte Quarkmasse $q^2 > 4m_q^2$ bildet sich ein Kontinuum im Spektrum aus. Dies beschreibt Quark-Antiquark Paarbildungs- / Vernichtungsprozesse [20]. Der dritte Beitrag ist der Massenpeak. Bei stabilen Teilchen ist dieser durch eine Deltafunktion an der Stelle der Mesonenmasse repräsentiert. Instabile Teilchen im NJL Modell haben in Hartree / RPA eine Masse größer als die doppelte Quarkmasse, daher liegt der Massenpeak im Kontinuum. Er besitzt eine endliche Breite, da das Modell den Zerfall in ein Quark-Antiquark Paar erlaubt. Die Masse des instabilen Teilchens kann man mit der Peakposition identifizieren.

In Analogie kann man auch die Spektralfunktion von Quarks angeben

$$\rho(p) = -2\text{Im } S(p) \quad (2.36)$$

wobei bei der Imaginärteilbildung die Diracmatrizen als reell zu behandeln sind. In Hartree Näherung ergibt dies

$$\rho(p) = 2\pi(\not{p} + m)\delta(p^2 - m^2)\text{sgn}(p_0) \quad (2.37)$$

Die Hartree Spektralfunktion besteht daher nur aus Delta-Peaks an den Stellen der Quarkmasse.

2.6 Massen instabiler Teilchen

Die Mesonen im NJL Modell wurden bereits in Kap. 2.3 beschrieben und deren Masse über Gl. (2.11) definiert. Dies ist jedoch direkt nur auf stabile Mesonen anwendbar, die einen Propagator mit einer reellen Polstelle besitzen. Bei instabilen Mesonen dagegen besitzt der Propagator einen Imaginärteil in der Umgebung der Massenresonanz und die Polstelle ist komplex. In diesem Fall gibt es keine eindeutige Definition der Mesonenmasse mehr. In [21] wurde der komplexe Pol berechnet und die Mesonenmasse als Realteil dieses Pols definiert

$$D_M^{-1}(z, \mathbf{q}) = 0 \rightarrow m_M^2 = (\text{Re}(z))^2 - \mathbf{q}^2 \quad (2.38)$$

Eine andere Möglichkeit besteht darin, den Imaginärteil des inversen Mesonpropagators von Hand zu entfernen und davon die reelle Nullstelle zu berechnen. Dies wurde z.B. in [17] angewandt

$$\text{Re}(D_M^{-1}(q))|_{q^2=m_M^2} = 0 \quad (2.39)$$

Weiterhin kann man auch die Spektralfunktion des jeweiligen Mesons berechnen. Die Masse des Mesons wird dann an der Stelle definiert, an der die Spektralfunktion ihr Maximum besitzt

$$\rho_M(q^2 = m_M^2) = \text{maximal} \quad (2.40)$$

Alle diese Definitionen gehen für den Fall stabiler Mesonen in die Definition Gl. (2.11) über.

3 $1/N_c$ Entwicklung

3.1 $1/N_c$ Entwicklung und Zählschema

Im letzten Abschnitt wurde das NJL Modell in führender Hartree / Random-Phase Näherung betrachtet. Um Korrekturen höherer Ordnung zu berechnen benötigt man ein systematisches Entwicklungsschema. Störungstheoretische Entwicklung in der Kopplungskonstanten analog zur QED scheidet jedoch aus, da gerade das Regime mit Confinement und großer Kopplung betrachtet werden soll. Zudem ist es sinnvoll, ein selbstkonsistentes Schema zu verwenden, welches auch in der Nähe des Phasenübergangs gültig ist. Dazu verwendet man im NJL Modell üblicherweise eine Entwicklung in der Anzahl der Farben $1/N_c$ ([22], [23], [11]). Diese Entwicklung hat den Vorteil, dass sie die chirale Symmetrie und die damit verknüpften Ward-Identitäten wahrt¹. Zudem ist es eine natürliche Erweiterung der Hartree / Random-Phase Näherung, welche gerade die niedrigste Ordnung in der $1/N_c$ Entwicklung darstellt.

Im $1/N_c$ Zählschema wird dazu gefordert, dass der Quarkpropagator die Ordnung N_c^0 besitzt. Ein geschlossener Quarkloop besitzt aufgrund der Spurbildung einen zusätzlichen Faktor N_c und somit die Ordnung N_c^1 . Wie man leicht aus der Gapgleichung Abb. 2.1 erkennt, muss der Vier-Quark Vertex die Ordnung N_c^{-1} haben, um den Faktor N_c des Quarkloops zu kompensieren. Somit besitzt der Hartree Quarkpropagator konsistent die Ordnung N_c^0 . Ein RPA Mesonpropagator besteht aus Summanden mit jeder möglichen Anzahl von Quarkloops (siehe Abb. 2.2). Jeder dieser Summanden besitzt einen Quarkloop weniger als Vier-Quark Vertizes, somit hat ein Mesonpropagator die Ordnung N_c^{-1} .

3.2 Φ -ableitbare Theorie

Um nun die selbstkonsistente Entwicklung bis zu einer bestimmten Ordnung zu erhalten, wird die sog. Φ -ableitbare Theorie verwendet, welche ausführlich in [11] besprochen wird.

Ausgangspunkt dazu ist die 2 Teilchen irreduzible effektive Wirkung für Fermionen. Ein Diagramm heißt dabei 2 Teilchen irreduzibel (2PI), falls es nicht möglich ist, es durch Zerschneiden von 2 Propagatorlinien in unzusammenhängende Teile zu zerlegen.

¹ Wie später gezeigt wird, gehorchen nicht alle auftretenden Mesonen der chiralen Symmetrie und insbesondere solche, die mit einer Bethe-Salpeter Gleichung niedrigerer Ordnung berechnet wurden, verletzen die Symmetrie. Die Methode gibt jedoch die Möglichkeit, in jeder Ordnung der Näherung eine chiral konsistente Bethe-Salpeter Gleichung zu bekommen.

Das erzeugende Funktional für zusammenhängende Greensfunktionen $W[\bar{\eta}, \eta, R]$ mit externen Quellen $\bar{\eta}, \eta$ für Einpunktfunktionen und R für Zweipunktfunktionen lautet

$$e^{iW[\bar{\eta}, \eta, R]} = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp \left(i \int_x \mathcal{L}[\bar{\psi}, \psi] + \int_x \bar{\psi}(x)\eta(x) + \int_x \bar{\eta}(x)\psi(x) + \int_{x,y} \bar{\psi}(x)R(x,y)\psi(y) \right) \quad (3.1)$$

Die 2PI effektive Wirkung erhält man daraus über eine Legendretransformation bezüglich aller Quellen

$$\Gamma[\bar{\Psi}, \Psi, S] = W[\bar{\eta}, \eta, R] - \int_x \frac{\delta W}{\delta \eta(x)} \eta(x) - \int_x \bar{\eta}(x) \frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}(x)} - \int_{x,y} \frac{\delta W}{\delta R_{ab}(x,y)} R_{ab}(x,y) \quad (3.2)$$

Die Funktionalableitungen von W sind direkt mit den Erwartungswerten $\langle \Psi \rangle$ und $\langle \bar{\Psi} \rangle$ der Fermionfelder und der Propagatoren S verknüpft.

$$\frac{\delta W}{\delta \eta(x)} = \langle \bar{\Psi}(x) \rangle, \quad \frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}(x)} = \langle \Psi(x) \rangle, \quad \frac{\delta W}{\delta R_{ab}(x,y)} = \langle \bar{\Psi}_a(x) \rangle \langle \Psi_b(y) \rangle + S_{ab}(x,y) \quad (3.3)$$

Die effektive Wirkung kann man nun nach Anzahl der Loops entwickeln und erhält für verschwindende Fermion Felderwartungswerte $\langle \bar{\Psi} \rangle = \langle \Psi \rangle = 0$ ([24], [25]).

$$\Gamma[S] = -i\text{Tr} \ln S^{-1} - i\text{Tr}(\Sigma S) + \Gamma_2[S] \quad (3.4)$$

wobei $\Gamma_2[S]$ ausschließlich 2PI Diagramme des Propagators S enthält und die Spuren über alle internen Freiheitsgrade zu verstehen sind. Die Selbstenergie Σ ist die Differenz aus inversem nackten und vollen Propagator $\Sigma = S_0^{-1} - S^{-1}$.

In der Φ -ableitbaren Theorie definiert man ein Funktional $\Phi[S]$ des vollen Propagators, das genau $-\Gamma_2[S]$ entspricht. Das thermodynamische Potential entspricht bis auf einem Vorzeichen der effektiven Wirkung

$$\Omega = i\text{Tr} \ln(S^{-1}) + i\text{Tr}(\Sigma S) + \Phi[S] \quad (3.5)$$

Die Stationaritätsbedingung bezüglich des vollen Quarkpropagators ergibt

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{\delta \Omega}{\delta iS} = -S^{-1} + S_0^{-1} + \frac{\delta \Phi[S]}{\delta iS} \quad (3.6)$$

Daraus erkennt man sofort

$$\Sigma = -\frac{\delta \Phi}{\delta(iS)} \quad (3.7)$$

Auch die höheren Quark (2n)-Punktfunktionen erhält man durch n-fache Ableitung von Φ nach dem vollen Quarkpropagator, wobei die Funktionalableitung graphisch dem „Durchschneiden“ eines Quarkpropagators entspricht. So erhält man den 4-Quark-Streukern durch

$$K = -\frac{\delta^2 \Phi}{\delta(iS)\delta(iS)} \quad (3.8)$$

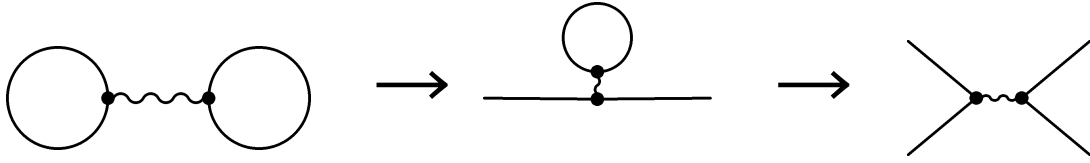


Abbildung 3.1: Niedrigster Beitrag zu Φ sowie einfache und zweifache Funktionalableitung nach dem Quarkpropagator

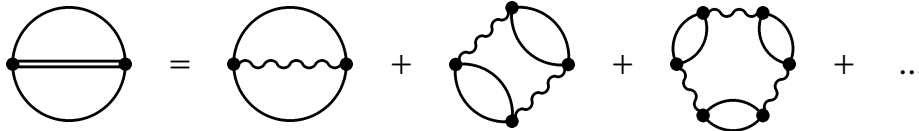


Abbildung 3.2: Ringsumme

Eine systematische Entwicklung in $1/N_c$ erhält man durch Trunkierung des Funktionals Φ , indem nur Diagramme bis zu einer bestimmten Ordnung berücksichtigt werden.

Der Beitrag führender Ordnung zu Φ (Ordnung N_c) ist in Abb. 3.1 links dargestellt. Die eigentlich lokale 4-Quark-Wechselwirkung wurde hierbei in nichtlokaler Weise durch die wellige Linie dargestellt. Dies soll den Unterschied zu dem Fockterm (erstes Diagramm der Ringsumme in NLO, s.u.), verdeutlichen, da die Diagramme von Hartree- und Fockterm ansonsten identisch aussehen würden, jedoch verschiedener Ordnung sind. Die erste Funktionalableitung ergibt den Hartree Selbstenergiebeitrag (Mitte), die zweite den RPA Streukern (rechts). Dies kann man leicht überprüfen, wenn man die Funktionalableitungen Gl. (3.7) und Gl. (3.8) auf

$$\Phi^{(0)}[S^{(0)}] = - \sum_M g_M \left(- \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr}(\Gamma_M iS^{(0)}(k)) \right)^2 \quad (3.9)$$

anwendet und mit den Hartree / RPA Ausdrücken Gl. (2.4) und Gl. (2.7) vergleicht.

Um nun die Gapgleichung in nächsthöherer Ordnung zu erhalten, benötigen wir Φ zur Ordnung N_c^0 . Dieser Beitrag kommt durch die Ringsumme Abb. 3.2. Jedes Diagramm der Ringsumme enthält gleich viele Vertizes und Quarkloops und somit die Ordnung N_c^0 . Durch Funktionalableitung der Ringsumme erhält man die Korrektur zur Quarkselbstenergie und somit die selbstkonsistente Gapgleichung in nächster Ordnung der $1/N_c$ Entwicklung (Abb. 3.3), mit der man den vollen Quarkpropagator (dicke Linie) selbstkonsistent berechnen kann. Das Funktional Φ lautet in dieser Ordnung

$$\Phi^{(1)}[S] = - \frac{i}{2} \sum_M \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \ln(1 - 2g_M J_M(k)) \quad (3.10)$$

und damit der neue Selbstenergiebeitrag

$$\Sigma^{(1)}(p) = i \sum_M \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} D_M(k) \Gamma_M S(p-k) \Gamma_M \quad (3.11)$$

Der Mesonpropagator ist dabei ein RPA Propagator, der jedoch die neuen vollen Quarkpropagatoren enthält. An dieser Stelle sei bereits anzumerken, dass dieser RPA Propagator nicht mehr

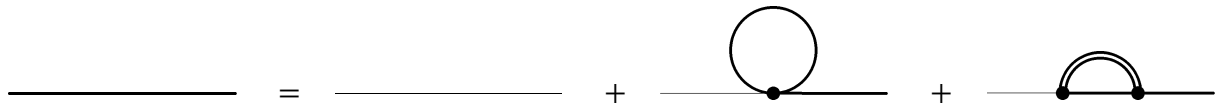


Abbildung 3.3: Gapgleichung in $1/N_c$ Entwicklung

der chiralen Symmetrie unterworfen ist und das zugehörige Pion im chiralen Limes nicht masselos ist. Für den konsistenten Mesonpropagator muss man auch die Bethe-Salpeter Gleichung für den Mesonpropagator in nächsthöherer Ordnung lösen [26].

Zusätzlich sei noch anzumerken, dass die Ordnung der $1/N_c$ Entwicklung auf dem Level des Φ -Funktionals festgelegt wurde. Betrachtet man jedoch die Gapgleichung Abb. 3.3, so stellt man fest, dass diese Gleichung nicht mehr eine eindeutige Ordnung besitzt, da der Hartreebeitrag und der NLO Beitrag verschiedener Ordnung sind. Der selbstkonsistent berechnete Quarkpropagator enthält daher im Prinzip Terme jeder beliebigen Ordnung von $1/N_c$.

Der neue Beitrag in der Gapgleichung ist im Vergleich zur Hartree Selbstenergie ein nichtlokaler und somit impulsabhängiger Beitrag mit Diracstruktur. Dies macht das Lösen dieser Gleichung deutlich komplizierter, weshalb im nächsten Abschnitt zunächst der Quarkpropagator allgemein untersucht wird.

4 Struktur der Propagatoren und Spektralfunktionen

Um einen allgemeinen Ansatz für den Quarkpropagator zu finden, ist es sinnvoll, vorher Eigenschaften und Symmetrien der Propagatoren zu untersuchen, um den Ansatz so einfach wie möglich halten zu können. Dabei muss man zunächst zwischen den fermionischen Quarkpropagatoren und den bosonischen Mesonpropagatoren unterscheiden.

4.1 Bosonischer Sektor

Zunächst werden nun bosonische Mesonpropagatoren und Spektralfunktionen betrachtet. Dies sind beides skalare Größen ohne Diracstruktur, jedoch im Allgemeinen komplexwertig. Der retardierte Propagator und der avancierte Propagator sind im Ortsraum definiert als [27]

$$\begin{aligned} iD^R(x-y) &= \theta(x^0 - y^0) \langle [\phi(x), \phi(y)] \rangle_\beta \\ iD^A(x-y) &= -\theta(y^0 - x^0) \langle [\phi(x), \phi(y)] \rangle_\beta \end{aligned} \quad (4.1)$$

Dabei zeigt der Index β , dass die Ausdrücke die thermischen Mittelwerte darstellen.

$$\langle \hat{O} \rangle_\beta = Z^{-1} \text{Tr} \{ e^{-\beta \hat{H}} \hat{O} \} \quad (4.2)$$

Die Felder genügen der üblichen bosonischen Kommutatorrelation

$$[\phi(t, \mathbf{x}), \dot{\phi}(t, \mathbf{y})] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (4.3)$$

In dieser Arbeit werden die Propagatoren überwiegend im Impulsraum betrachtet, was man durch Fouriertransformation von Gl. (4.1) erhält, diese werden mit $D^R(k)$ sowie $D^A(k)$ bezeichnet. Leitet man die fouriertransformierte Darstellung durch Einführung von vollständigen Sätzen von Zuständen $|i\rangle$ und deren zugehörigen Energien E_i und Impulsen \mathbf{p}_i explizit ab (vgl. [28])

$$D^A(\omega, \mathbf{k}) = Z^{-1} (2\pi)^3 \sum_{m,n} \frac{1}{\omega - E_n + E_m \pm i\epsilon} \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{p}_n + \mathbf{p}_m) e^{-\beta E_m} (1 - e^{-\beta(E_n - E_m)}) |\langle m | \phi(0) | n \rangle|^2 \quad (4.4)$$

erkennt man, dass $D^R(k)$ bzw. $D^A(k)$ meromorphe Funktionen sind, deren Pole sich ausschließlich in der unteren bzw. oberen Halbebene befinden, jedoch nur infinitesimal von der reellen Achse entfernt, wie man es auch von den Propagatoren fordert. Dies sind wichtige Eigenschaften bei Integrationen in der komplexen Ebene. Weiterhin sieht man dabei auch, dass $D^R(k)$ und $D^A(k)$ komplex konjugiert zueinander sind

$$D^R(k) = D^A(k^*)^* \quad (4.5)$$

Ein weiterer wichtiger Propagator, insbesondere im Medium, ist der Matsubara Propagator, welcher auf der imaginären Zeitachse definiert ist

$$D^{Mats}(\tau) = -\langle T [\phi(i\tau), \phi(0)] \rangle_{\beta} \quad (4.6)$$

Er ist periodisch in $\tau \rightarrow \tau + \beta$, daher ist seine Fouriertransformation eine diskrete Summe. Im Impulsraum ist der Matsubara Propagator daher nur an den diskreten Matsubarafrequenzen $D^{Mats}(i\omega_m, \mathbf{k})$, $\omega_m = 2m\pi T$ definiert.

Die Spektralfunktion ist direkt über den retardierten und avancierten Propagator definiert

$$\rho(\omega, \mathbf{k}) = i(D^R(\omega, \mathbf{k}) - D^A(\omega, \mathbf{k})) \stackrel{(4.5)}{=} -2\text{Im } D^R(\omega, \mathbf{k}) = 2\text{Im } D^A(\omega, \mathbf{k}) \quad (4.7)$$

Da die Spektralfunktion nur für reelle Argumente definiert ist, wird anstelle des im Allgemeinen komplexen k_0 das reelle ω verwendet. Setzt man die Propagatoren Gl. (4.4) ein, erhält man mit Gl. (2.32) die Darstellung (vgl. [27])

$$\begin{aligned} \rho(\omega, \mathbf{k}) &= Z^{-1}(2\pi)^4 \sum_{m,n} \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{p}_n + \mathbf{p}_m) e^{-\beta E_m} (1 - e^{-\beta\omega}) \delta(\omega - E_m + E_n) |\langle m|\phi(0)|n\rangle|^2 \\ &= Z^{-1}(2\pi)^4 \sum_{m,n} e^{-\beta E_m} |\langle m|\phi(0)|n\rangle|^2 \\ &\quad \cdot (\delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{p}_n + \mathbf{p}_m) \delta(\omega - E_n + E_m) - \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{p}_m + \mathbf{p}_n) \delta(\omega - E_m + E_n)) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Daran erkennt man wichtige Eigenschaften

- Positivität: $\text{sgn}(\omega)\rho(\omega, \mathbf{k}) \geq 0$
- Antisymmetrie: $\rho(\omega, \mathbf{k}) = -\rho(-\omega, -\mathbf{k})$
- Summenregel: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \omega \rho(\omega, \mathbf{k}) = 1$

Letztere lässt sich auch recht einfach zeigen

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \omega \rho(\omega, \mathbf{k}) &= i \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \rho(\omega, \mathbf{k}) e^{-i\omega t} \\ &\stackrel{(4.7)}{=} - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} (D^R(\omega, \mathbf{k}) - D^A(\omega, \mathbf{k})) e^{-i\omega t} \\ &= - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int d^4x (D^R(x) - D^A(x)) e^{i(\omega x_0 - \mathbf{p}\mathbf{x})} e^{-i\omega t} \\ &= - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d}{dt} \int d^3x (D^R(t, \mathbf{x}) - D^A(t, \mathbf{x})) e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}} \\ &\stackrel{(4.1)}{=} i \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d}{dt} \int d^3x \langle [\phi(t, \mathbf{x}), \phi(0, \mathbf{0})] \rangle_{\beta} e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}} \\ &= i \int d^3x \langle [\dot{\phi}(0, \mathbf{x}), \phi(0, \mathbf{0})] \rangle_{\beta} e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}} \\ &\stackrel{(4.3)}{=} 1 \end{aligned} \quad (4.9)$$

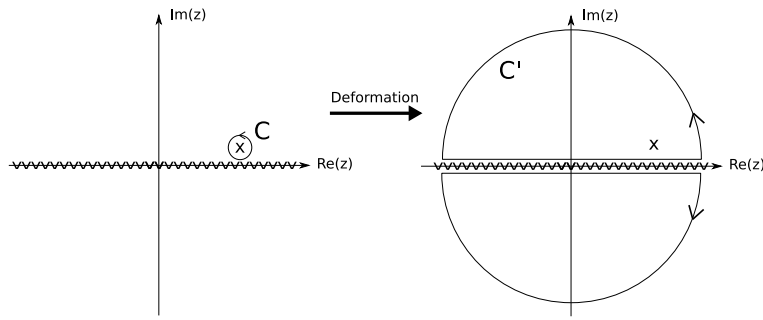


Abbildung 4.1: Verformung des Integrationswegs in der komplexen Ebene

Oft ist es nützlich, Propagatoren in einer Integraldarstellung, der Lehmann Darstellung, auszudrücken. Dazu wird der retardierte Propagator zunächst mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes dargestellt.

$$D^R(k_0) = \int_{C_k} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{D^R(\omega)}{\omega - (k_0 + i\epsilon)} \quad (4.10)$$

C_k ist dabei ein geschlossener Weg um $k_0 + i\epsilon$. Die infinitesimale Verschiebung $i\epsilon$ in die obere Halbebene soll dabei vermeiden, dass Pole des Propagators, welche nur in der unteren Halbebene auftreten, im Integrationsweg liegen. Durch Verformung des Integrationsweges gemäß Abb. 4.1 und Weglassen des Kreisbogens, welcher keinen Beitrag liefert, erhält man

$$D^R(k_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{D^R(\omega)}{\omega - (k_0 + i\epsilon)} \quad (4.11)$$

Da der avancierte Propagator in der unteren Halbebene keine Pole besitzt, kann man noch einen verschwindenden Beitrag

$$0 = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{D^A(\omega)}{\omega - (k_0 + i\epsilon)} \quad (4.12)$$

zu Gl. (4.11) addieren (auch hier wurde ein Kreisbogen weggelassen) und man erhält schließlich

$$D^R(k_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{(D^R(\omega) - D^A(\omega))}{\omega - (k_0 + i\epsilon)} \stackrel{(4.7)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{2\text{Im } D^R(\omega)}{\omega - (k_0 + i\epsilon)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\rho(\omega)}{k_0 - \omega + i\epsilon} \quad (4.13)$$

Dies ist nun die Lehmann Darstellung des retardierten Propagators. In analoger Rechnung erhält man für den avancierten Propagator

$$D^A(k_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\rho(\omega)}{k_0 - \omega - i\epsilon} \quad (4.14)$$

sowie für den Matsubara Propagator

$$D^{\text{Mats}}(i\omega_m) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\rho(\omega)}{i\omega_m - \omega} \quad (4.15)$$

Allgemein kann man nun die analytische Fortsetzung des Propagators für beliebige komplexe Werte z definieren

$$D(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\rho(\omega)}{z - \omega} \quad (4.16)$$

so dass

$$D^R(k_0) = D(k_0 + i\epsilon), \quad D^A(k_0) = D(k_0 - i\epsilon), \quad D^{Mats}(i\omega_m) = D(i\omega_m) \quad (4.17)$$

Der Propagator $D(z)$ ist überall analytisch bis auf die reelle Achse. Der Realteil ist dort stetig, der Imaginärteil besitzt jedoch einen Branchcut. Es ist noch anzumerken, dass dieser Propagator in der oberen Halbebene mit dem retardierten Propagator sowie in der unteren Halbebene mit dem avancierten Propagator jeweils für komplexe Argumente übereinstimmt.

Direkt aus der Lehmann Darstellung und der Antisymmetrie der Spektralfunktion erkennt man noch folgende Eigenschaften des Propagators

$$\begin{aligned} D(z^*) &= D^*(z) \\ D(-z) &= D(z) \end{aligned} \quad (4.18)$$

und daraus insbesondere für rein imaginäre Argumente $i\omega_m$

$$D(-i\omega_m) = D(i\omega_m) = D^*(i\omega_m) \quad (4.19)$$

Ausgewertet an den rein imaginären Matsubarafrequenzen $i\omega_m$ ist der Mesonpropagator somit immer reell.

Wie schon in Kapitel 2.3 besprochen geht der NJL Mesonpropagator D_M nicht aus der Definition eines allgemeinen bosonischen Propagators Gl. (4.1) hervor, sondern besitzt eine andere Asymptotik. Dadurch erfüllt der NJL Propagator nicht die Summenregel und anstelle der Lehmann Darstellung gilt eine subtrahierte Dispersionsrelation:

$$D_M(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\rho_M(\omega)}{z - \omega} - 2g_s \quad (4.20)$$

Die Herleitung dazu geht analog, wobei noch ausgenutzt werden muss, dass der konstante Beitrag $-2g_s$ keine Pole in der komplexen Ebene besitzt. Die anderen Relationen (Symmetrie, Positivität) sind jedoch unabhängig von der Asymptotik und daher auch für den NJL Propagator gültig.

4.2 Fermionischer Sektor

Quarks sind Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen und gehorchen der Diracgleichung. Ihre Propagatoren und Spektralfunktionen besitzen daher eine Matrixstruktur im Diracraum. Die Propagatoren sind definiert durch [28]

$$\begin{aligned} iS_{ab}^R(k) &= \int d^4x e^{ikx} \theta(x^0) \langle 0 | \{ \psi_a(x), \bar{\psi}_b(0) \} | 0 \rangle_\beta \\ iS_{ab}^A(k) &= - \int d^4x e^{ikx} \theta(-x^0) \langle 0 | \{ \psi_a(x), \bar{\psi}_b(0) \} | 0 \rangle_\beta \\ S_{ab}^{Mats}(i\omega_n, \mathbf{k}) &= - \int_0^\beta d\tau \int d^3x e^{i(\omega_n\tau - \mathbf{k}\mathbf{x})} \langle 0 | T [\psi_a(i\tau, \mathbf{x}) \bar{\psi}_b(0)] | 0 \rangle_\beta \end{aligned} \quad (4.21)$$

mit der fermionischen Antikommutatorrelation

$$\{\psi_a(t, \mathbf{x}), \psi_b^\dagger(t, \mathbf{y})\} = \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})\delta_{ab} \quad (4.22)$$

Mit analogen Rechnungen zum bosonischen Fall kann man hier auch wichtige Eigenschaften und Relationen zeigen. Die Propagatoren sind verknüpft durch [29]

$$S^A(k_0, \mathbf{k}) = \gamma_0 S^R(k_0^*, \mathbf{k})^\dagger \gamma_0 \quad (4.23)$$

oder allgemein für komplexe Argumente

$$S(z, \mathbf{k}) = \gamma_0 S(z^*, \mathbf{k})^\dagger \gamma_0 \quad (4.24)$$

Mit der Definition der Spektralfunktion

$$\rho(\omega, \mathbf{k}) = i(S^R(\omega, \mathbf{k}) - S^A(\omega, \mathbf{k})) = i(S^R(\omega, \mathbf{k}) - \gamma_0 S^R(\omega, \mathbf{k})^* \gamma_0) \quad (4.25)$$

kann man den Fermionpropagator in Lehmann Darstellung ausdrücken

$$S(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\rho(\omega)}{z - \omega} \quad (4.26)$$

mit den Spezialfällen

$$S^R(k_0) = S(k_0 + i\epsilon), \quad S^A(k_0) = S(k_0 - i\epsilon), \quad S^{Mats}(i\omega_m) = S(i\omega_m) \quad (4.27)$$

Auch die fermionische Spektralfunktion erfüllt eine Summenregel

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \rho_0(\omega, \mathbf{k}) = 1, \quad \text{mit } \rho_0 = \frac{1}{4} \text{Tr}(\gamma_0 \rho) \quad (4.28)$$

was sich einfach zeigen lässt

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \rho_0(\omega, \mathbf{k}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int d^4x \rho_0(x) e^{i(\omega x_0 - \mathbf{k}\mathbf{x})} \\ &= \frac{1}{4} \gamma_{ab}^0 \int d^3x \rho_{ba}(0, \mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \\ &\stackrel{(4.25)}{=} \frac{i}{4} \gamma_{ab}^0 \int d^3x (S_{ba}^R(0, \mathbf{x}) - S_{ba}^A(0, \mathbf{x})) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \\ &\stackrel{(4.21)}{=} \frac{1}{4} \gamma_{ab}^0 \int d^3x \langle 0 | \{ \psi_b(0, \mathbf{x}), \gamma_{ca}^0 \psi_c^\dagger(0, \mathbf{0}) \} | 0 \rangle_\beta e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \\ &\stackrel{(4.22)}{=} 1 \end{aligned} \quad (4.29)$$

Diese wird auch durch die NJL Quarkpropagatoren eingehalten. Zudem ist ρ_0 positiv semidefinit

$$\rho_0(\omega) \geq 0 \quad (4.30)$$

Da der Propagator ein definiertes Verhalten unter diskreten CPT-Transformationen besitzt, kann man noch zusätzliche Eigenschaften ableiten. Der Propagator erfüllt folgende Relationen [29]

- Parität: $S(z, \mathbf{k}) = \gamma_0 S(z, -\mathbf{k}) \gamma_0$
- Zeitumkehr: $S(z, \mathbf{k}) = \gamma^1 \gamma^3 \gamma_0 S(z, -\mathbf{k})^T \gamma_0 \gamma^3 \gamma^1$
- Ladungskonjugation: $S(z, \mathbf{k}) = -\gamma^2 S(-z^*, -\mathbf{k})^* \gamma^2$

Im Medium muss man beachten, dass die angegebene Transformation des Propagators unter Ladungskonjugation nur bei verschwindendem chemischen Potential der Quarks gültig ist. Bei endlichem chemischen Potential ist die gleichzeitige Transformation $\mu \rightarrow -\mu$ erforderlich. Zusammen mit Gl. (4.23) folgt aus den CPT-Relationen sofort

$$S(-z, -\mathbf{k}) = \gamma_5 S(z, \mathbf{k}) \gamma_5 \quad (4.31)$$

$$\rho(-k_0, -\mathbf{k}) = -\gamma_5 \rho(k_0, \mathbf{k}) \gamma_5 \quad (4.32)$$

Der allgemeinst möglicher Ansatz für den Fermionpropagator ist eine Linearkombination aus allen Elementen der Clifford Algebra. Da er sich jedoch auch korrekt unter diskreten PT-Transformationen sowie Lorentztransformationen verhalten muss, reduziert sich der Ansatz auf

$$S^{-1}(z, \mathbf{k}) = \gamma_0 z C(z, |\mathbf{k}|) - \vec{\gamma} \cdot \mathbf{k} A(z, |\mathbf{k}|) - B(z, |\mathbf{k}|) \quad (4.33)$$

Die Dressingfunktionen $C(z, |\mathbf{k}|)$ und $A(z, |\mathbf{k}|)$ müssen unabhängig gewählt werden, da das Modell auch im Medium betrachtet werden soll. Im Vakuum fordert Lorentzsymmetrie jedoch $C(z, |\mathbf{k}|) = A(z, |\mathbf{k}|)$.

Bei verschwindendem chemischen Potential kann man aufgrund der C-Symmetrie noch weitere Einschränkungen an die Koeffizienten fordern.

$$\begin{aligned} C(z, |\mathbf{k}|) &= C(-z^*, |\mathbf{k}|)^* \\ A(z, |\mathbf{k}|) &= A(-z^*, |\mathbf{k}|)^* \\ B(z, |\mathbf{k}|) &= B(-z^*, |\mathbf{k}|)^* \end{aligned} \quad (4.34)$$

Insbesondere kann man nun zwei Spezialfälle unterscheiden. Ist z reell, so sind der Realteile der Koeffizienten symmetrisch in z , die Imaginärteile dagegen antisymmetrisch. Ist z jedoch rein imaginär, so sind alle drei Koeffizienten reell. Diese Eigenschaften erfüllt, wie erforderlich, auch der Spezialfall der Hartreequarks (siehe Kapitel 2.3)

$$S_H(k_0, \mathbf{k}) = \frac{\not{k} + m}{k^2 - m^2}$$

Diese Symmetrien und Eigenschaften werden nun ausgenutzt, um die Gapgleichung in NLO zu lösen.

5 Lösen der Gapgleichung in $1/N_c$ Näherung

5.1 Regularisierung

Im NJL-Modell besitzt die Kopplungskonstante eine negative Massendimension. Daher ist das Modell nicht renormierbar und die auftretenden divergenten Integrale müssen regularisiert werden. Dafür gibt es diverse Möglichkeiten, wobei bei allen neben den Modellparametern m_0 und g_s noch zusätzlich ein Cutoff-Parameter Λ eingeführt werden muss.

Eine im NJL Modell gerne verwendete Methode ist die Pauli-Villars Regularisierung. Diese Methode hat den Vorteil, dass sie Lorentz-kovariant ist. Hierbei werden bei den divergenten Integralen Regulatorterme hinzuaddiert, welche die UV-Divergenzen aufheben. Für die Integrale Gl. (2.13) benötigt man dazu 2 Regulatoren

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} f(k, m^2) \rightarrow \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \sum_{j=0}^2 c_j f(k, m^2 + j\Lambda^2) \quad (5.1)$$

Die Regulatoren entsprechen formal (unphysikalischen) Teilchen mit größerer Masse, welche das Verhalten bei kleinen Impulsen nur kaum beeinflussen, jedoch das gleiche asymptotische Verhalten aufweisen und die Divergenzen aufheben. Am naheliegendsten wäre es nun, die gesamte Gapgleichung Gl. (2.5) und den Polarisationsloop Gl. (2.10) auf diese Weise zu regularisieren, was dem Vorgehen von Pauli und Villars [30] entsprechen würde. Um gleichzeitig vernünftige Ergebnisse für die Quark- und Mesonmassen sowie Zerfallskonstanten zu erhalten ist es jedoch nötig, elementare Integrale zu definieren (in Hartree / RPA I_1 und $I(q)$) und diese separat zu regularisieren. Massen, die lediglich als Vorfaktor vor den divergenten Integralen auftauchen, werden nicht mit in die Regularisierung einbezogen [11]. Da die Zerlegung der divergenten Integrale in elementare Integrale insbesondere bei den Beiträgen höherer Ordnung in der $1/N_c$ Entwicklung, sowie bei Vektormesonen bereits in der Random-Phase Näherung nicht immer möglich ist, kann dieses Schema in dieser Arbeit nicht verwendet werden, wenn man konsistent bleiben will.

Das verwendete Regularisierungsschema ist daher ein 3er-Impuls Cutoff. Dabei wird die Integration über den 3er-Impuls nur bis zu einem Cutoff-Impuls Λ durchgeführt. Dabei gibt man jedoch die Lorentz-Kovarianz auf.

Am besten würde man hierbei die bereits konvergenten Mediumanteile unregularisiert belassen und nur die Vakuumanteile regularisieren. Die Vakuumanteile von impulsabhängigen Größen kann man im Ruhesystem berechnen und anschließend eine Lorentztransformation in das gewünschte Bezugssystem durchführen. Mit diesem Schema werden trotz Cutoff die wichtigsten Lorentz-Symmetrien dennoch erhalten.

Da die Rechnungen in dieser Arbeit jedoch im euklidischen durchgeführt werden und alle Größen bei endlicher Temperatur nur an diskreten Matsubarafrequenzen definiert sind, ist es nicht

möglich, den Vakuumanteil zu bestimmen, da für diesen die Werte für kontinuierliche Energien erforderlich sind. Daher werden in dieser Arbeit trotz des Nachteils der gebrochenen Kovarianz die divergenten Integrale komplett mit einem 3er-Impuls Cutoff regularisiert. Bei Größen, die von einem externen 3er-Impuls abhängen, wie beispielsweise der Quarkpolarisationsloop, wird der externe Impuls gleichmäßig auf die am Loop beteiligten Propagatoren verteilt.

In der $1/N_c$ Entwicklung treten in jeder Ordnung der Entwicklung neue divergente Loopintegrale auf, so z.B. der Mesonloop in der Gapgleichung Gl. (3.3). Dies kommt durch die Nichtrenormierbarkeit des Modells und es besteht kein Grund den selben Cutoff zu verwenden, wie für die Hartree / RPA Integrale. Die neuen divergenten Integrale in der nächsten Ordnung der Entwicklung werden daher ebenfalls mit 3er-Impuls Cutoff, jedoch mit einem neuen Cutoff-Parameter Λ_1 regularisiert.

5.2 Selbstenergiebeiträge

Um die Gapgleichung Abb. 3.3 zu lösen, verwenden wir den im letzten Kapitel motivierten Ansatz für den inversen Quarkpropagator

$$S^{-1}(z, \mathbf{p}) = \gamma_0 z C(z, |\mathbf{p}|) - \vec{\gamma} \cdot \mathbf{p} A(z, |\mathbf{p}|) - B(z, |\mathbf{p}|) \quad (5.2)$$

Der Propagator lautet damit

$$S(z, \mathbf{p}) = \gamma_0 z c(z, |\mathbf{p}|) - \vec{\gamma} \cdot \mathbf{p} a(z, |\mathbf{p}|) + b(z, |\mathbf{p}|) \quad (5.3)$$

wobei

$$a = \frac{A}{z^2 C^2 - \mathbf{p}^2 A^2 - B^2}, \quad b = \frac{B}{z^2 C^2 - \mathbf{p}^2 A^2 - B^2}, \quad c = \frac{C}{z^2 C^2 - \mathbf{p}^2 A^2 - B^2} \quad (5.4)$$

Die Gapgleichung lautet mit der Hartree Selbstenergie Σ_H und der Selbstenergie in nächster Ordnung $\Sigma^{(1)}$

$$S^{-1}(i\omega_n + \mu, \mathbf{p}) = S_0^{-1}(i\omega_n + \mu, \mathbf{p}) - \Sigma_H - \Sigma^{(1)}(i\omega_n + \mu, \mathbf{p}) \quad (5.5)$$

mit dem nackten Propagator $S_0^{-1}(k) = \not{k} - m_0$. Die Hartree Selbstenergie ist dabei

$$\Sigma_H = -2g_s T \sum_n \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \text{Tr}(S(i\omega_n + \mu, \mathbf{k})) = -8N_c N_f g_s T \sum_n \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} b(i\omega_n + \mu, \mathbf{k}) \quad (5.6)$$

Um den Korrekturterm $\Sigma^{(1)}$ zu berechnen, benötigt man zunächst den Mesonpropagator Gl. (2.9)

$$D_M(q) = \frac{-2g_M}{1 - 2g_M J_M(q)} \quad (5.7)$$

und dazu die Mesonpolarisationsfunktion in RPA Gl. (2.8). Im Medium lautet diese

$$J_M(i\omega_m, \mathbf{q}) = -T \sum_n \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \text{Tr} \left(\Gamma_M S \left(i\omega_n + i\omega_m + \mu, \mathbf{k} + \frac{\mathbf{q}}{2} \right) \Gamma_M S \left(i\omega_n + \mu, \mathbf{k} - \frac{\mathbf{q}}{2} \right) \right) \quad (5.8)$$

Damit kann man nun $\Sigma^{(1)}$ Gl. (3.11) berechnen

$$\Sigma^{(1)}(i\omega_n + \mu, \mathbf{p}) = -T \sum_M \sum_m \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} D_M \left(i\omega_m, \mathbf{q} - \frac{\mathbf{p}}{2} \right) \Gamma_M S \left(i\omega_m + i\omega_n + \mu, \mathbf{q} + \frac{\mathbf{p}}{2} \right) \Gamma_M \quad (5.9)$$

Dabei muss über die verschiedenen Mesonen (Sigma Meson und 3 Pionen) summiert werden. In diesem Ausdruck sieht auf den ersten Blick die Matsubarasumme noch divergent aus, da der Mesonpropagator asymptotisch nicht verschwindet und die Komponente der Selbstenergie proportional zu γ_0 nur ein $1/p$ -Verhalten für große Impulse zeigt. Hier hilft jedoch die Symmetrie des Propagators, da für große Energien ω_m für diese Komponente gilt (siehe Abschnitt 4)

$$\begin{aligned} & D_M \left(i\omega_m, \mathbf{q} - \frac{\mathbf{p}}{2} \right) \Gamma_M \cdot (i\omega_m + i\omega_n + \mu) \cdot c \left(i\omega_m + i\omega_n + \mu, \mathbf{q} + \frac{\mathbf{p}}{2} \right) \Gamma_M \\ & \approx D_M \left(i\omega_m, \mathbf{q} - \frac{\mathbf{p}}{2} \right) \Gamma_M \cdot i\omega_m \cdot c \left(i\omega_m, \mathbf{q} + \frac{\mathbf{p}}{2} \right) \Gamma_M \\ & = -D_M \left(-i\omega_m, \mathbf{q} - \frac{\mathbf{p}}{2} \right) \Gamma_M \cdot (-i\omega_m) \cdot c \left(-i\omega_m, \mathbf{q} + \frac{\mathbf{p}}{2} \right) \Gamma_M \end{aligned} \quad (5.10)$$

Die Beiträge für große positive und große negative Energien heben sich somit gegenseitig weg, was des Ausdruck konvergent macht. Die anderen beiden Komponenten der Selbstenergie sind bereits aufgrund der Asymptotik des Quarkpropagators ($\propto 1/p^2$) konvergent.

Setzt man in Gl. (5.9) den Quarkpropagator Gl. (5.3) ein, fällt auch auf, dass Terme der Form $\int d^3q f(|\mathbf{q} \pm \mathbf{p}/2|) \vec{\gamma} \cdot (\mathbf{q} \pm \mathbf{p}/2)$ auftreten. Der Ansatz des Quarkpropagators besitzt jedoch nur einen Term der Form $a(\mathbf{p}) \vec{\gamma} \cdot \mathbf{p}$, daher sollte auch $\Sigma^{(1)}$ nur Terme proportional dazu besitzen. Dass dies gewährleistet ist, sieht man, wenn man \mathbf{q} in zwei Beiträge aufspaltet $\mathbf{q} = \mathbf{q}_{\parallel} + \mathbf{q}_{\perp}$, so dass $\mathbf{q}_{\parallel} \cdot \mathbf{q}_{\perp} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}_{\perp} = 0$. Nun gilt

$$\int d^3q f \left(\left| \mathbf{q} \pm \frac{\mathbf{p}}{2} \right| \right) \vec{\gamma} \cdot \left(\mathbf{q} \pm \frac{\mathbf{p}}{2} \right) = \int dq_{\parallel} \int d^2q_{\perp} f(\mathbf{p}^2, \mathbf{q}_{\parallel}^2, \mathbf{q}_{\perp}^2, \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}_{\parallel}) \vec{\gamma} \cdot \left(\mathbf{q}_{\parallel} + \mathbf{q}_{\perp} \pm \frac{\mathbf{p}}{2} \right) \quad (5.11)$$

Der Summand proportional zu $\mathbf{e}_{\mathbf{q}_{\perp}}$ ist jedoch antisymmetrisch in \mathbf{q}_{\perp} und verschwindet daher. Der nichtverschwindende Ausdruck ist daher proportional zu $\mathbf{e}_{\mathbf{p}}$.

5.3 Thermodynamisches Potential

Das thermodynamische Potential setzt sich aus einem Beitrag für freie Fermionen sowie dem in Kapitel 3 definierten Funktional $\Phi[S]$ zusammen. Im Vakuum lautet es in NLO (Gl. (3.5))¹

$$\Omega = i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \ln(S^{-1}(k)) + i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr}(\Sigma(k)S(k)) + \Phi[S] \quad (5.12)$$

¹ Die zu diesem thermodynamischen Potential konsistente Gapgleichung würde erfordern, dass der externe 3er-Impuls \mathbf{p} der NLO Selbstenergie in der Gapgleichung Gl. (5.9) vollständig im Quarkpropagator auftritt, die symmetrische Aufteilung erleichtert jedoch die numerische Berechnung, da alle auftretenden Größen nur für 3er-Impulse $< 2\Lambda$ berechnet werden müssen.

mit der Selbstenergie $\Sigma = S_0^{-1} - S^{-1}$ und

$$\Phi[S] = - \sum_M g_M \left(- \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr}(\Gamma_M iS(k)) \right)^2 - \frac{i}{2} \sum_M \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \ln(1 - 2g_M J_M(k)) \quad (5.13)$$

Aus der Stationaritätsbedingung

$$\frac{\delta \Omega}{\delta iS} = 0 \quad (5.14)$$

folgt mit Gl. (3.7) direkt die Gapgleichung

$$S^{-1} = S_0^{-1} - \Sigma \quad (5.15)$$

Hierbei sei noch anzumerken, dass selbst die stabile Lösung der Gapgleichung im Allgemeinen nicht das absolute Minimum des thermodynamischen Potentials darstellt. Sie liegt zwar bezüglich der Variation des skalaren Anteils des Propagators auf einem Minimum, bezüglich der Variation der Vektoranteile des Propagators jedoch auf einem Maximum. Daher ist es nicht möglich, den Grundzustand durch eine reine Minimierung des thermodynamischen Potentials zu finden. Ein ähnliches Phänomen tritt auch bei NJL-Modellen mit Vektorkopplung bereits in Hartree / RPA auf.

Nun ist jedoch Gl. (5.12) trotz Anwendung der Cutoff Regularisierung noch divergent. Da das thermodynamische Potential jedoch nur bis auf einen konstanten Beitrag definiert ist, kann durch Addition von unendlichen, jedoch konstanten Beiträgen das Potential regularisiert werden. Hierbei werden die Konstanten, wie in [18] für das freie Fermionengas beschrieben, verwendet. Dazu wird das thermodynamische Potential in seiner allgemeinen Form im Medium betrachtet

$$\begin{aligned} \Omega = & -T \sum_n \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \text{Tr} \ln \left(\frac{1}{T} S^{-1}(i\omega_n + \mu, \mathbf{k}) \right) \\ & - T \sum_n \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \text{Tr}(\Sigma(i\omega_n + \mu, \mathbf{k}) S(i\omega_n + \mu, \mathbf{k})) + \Phi[S] \end{aligned} \quad (5.16)$$

Der erste Beitrag ergibt mit Hilfe des Ansatzes für den Propagator Gl. (5.2)

$$\begin{aligned} \sum_n \text{Tr}_D \ln \left(\frac{1}{T} S^{-1}(i\omega_n + \mu, \mathbf{k}) \right) &= \sum_n \ln \det_D \left(\frac{1}{T} S^{-1}(i\omega_n + \mu, \mathbf{k}) \right) \\ &= 2 \sum_n \ln \left(\frac{1}{T^2} (C^2(i\omega_n + \mu)^2 - A^2 \mathbf{k}^2 - B^2) \right) = 2 \sum_n \ln \left(\frac{C^2(\omega_n - i\mu)^2 + A^2 \mathbf{k}^2 + B^2}{\omega_n^2 + T^2} \right) + const. \\ &= 2 \sum_{\omega_n > 0} \ln \left| \frac{C^2(\omega_n - i\mu)^2 + A^2 \mathbf{k}^2 + B^2}{\omega_n^2 + T^2} \right|^2 + 2 + 4 \ln(1 + e^{-1}) + const.' \end{aligned} \quad (5.17)$$

Dieser Beitrag ist somit, wie erforderlich, endlich und reell. Die konstanten Regulatorterme wurden dabei so gewählt, dass unter Weglassen des konstanten Beitrags ($const' \rightarrow 0$) die analytische Berechnung der Matsubarasumme für Hartree Propagatoren direkt auf das bekannte

Potential Gl. (2.24) führt. Dabei ist jedoch anzumerken, dass dieser Beitrag noch mit dem Faktor $-T$ multipliziert werden muss (vgl. Gl. (5.16)). Somit ist der addierte konstante Beitrag in Wirklichkeit temperaturabhängig und das Weglassen dieses Beitrags wäre nicht zulässig. Betrachtet man jedoch direkt die Definition des thermodynamischen Potentials über die Zustandssumme Gl. (2.19) in Pfadintegraldarstellung

$$\Omega = -\frac{T}{V} \ln \mathcal{Z} = -\frac{T}{V} \ln \int \mathcal{D}q \mathcal{D}\bar{q} \exp(-S_E(q, \bar{q})) \quad (5.18)$$

und wertet das Pfadintegral mathematisch exakt aus, so erhält man dabei direkt Gl. (5.17), jedoch mit verschwindendem konstanten Beitrag ($const' = 0$) [27].

Die beiden anderen Beiträge

$$\begin{aligned} & \sum_n \text{Tr}_D(\Sigma(i\omega_n + \mu, \mathbf{k})S(i\omega_n + \mu, \mathbf{k})) \\ &= 8\text{Re} \sum_{\omega_n > 0} \left(\frac{(\omega_n - i\mu)^2(C - C^2) + \mathbf{k}^2(A - A^2) + Bm_0 - B^2}{(\omega_n - i\mu)^2C^2 + \mathbf{k}^2A^2 + B^2} \right) \end{aligned} \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned} \Phi[S] &= -\sum_M g_M \left(T \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \text{Tr}(\Gamma_M S(i\omega_n + \mu, \mathbf{k})) \right)^2 \\ &+ \frac{T}{2} \sum_M \sum_m \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \ln(1 - 2g_M J_M(i\omega_m, \mathbf{k})) \\ &= -\frac{\Sigma_H^2}{4g_s} + \frac{T}{2} \sum_M \sum_m \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \ln(-2g_M D_M^{-1}(i\omega_m, \mathbf{k})) \end{aligned} \quad (5.20)$$

sind nach Cutoff-Regularisierung bereits endlich.

5.4 Numerische Berechnung

Zur Berechnung des Quarkpropagators müssen die Koeffizienten A, B und C im Ansatz Gl. (5.2) bestimmt werden. Da diese Funktionen des Impulses sind, werden sie zur numerischen Berechnung auf ein Impulsgitter gesetzt und die Gagleichung iterativ gelöst. Als erster Ansatz für die Koeffizienten wird die Hartree Lösung verwendet ($C(z) = A(z) = 1$, $B(z) = m_H$). Das Gitter ist zweidimensional mit dem 3er-Impuls in einer Richtung und den Matsubarafrequenzen in der zweiten Richtung. Das 3er-Impulsgitter ist linear eingeteilt und besitzt einen Gitterabstand von 50 MeV für Werte von 0 bis 1500 MeV. Der Gitterabstand für die Matsubarafrequenzen wird durch die Temperatur festgelegt, wobei insgesamt der Bereich bis ca. $5 \cdot 10^4$ MeV abgedeckt wird. Für größere Werte wird eine asymptotische Fortsetzung verwendet, indem die Koeffizienten A, B und C konstant auf den letzten berechneten Wert gesetzt werden. Zwischen den 3er-Impuls Gitterpunkten benötigte Werte werden durch kubische Splineinterpolation bestimmt. Die inversen Mesonpropagatoren werden als Zwischenergebnisse ebenfalls auf einem analogen Impulsgitter gespeichert.

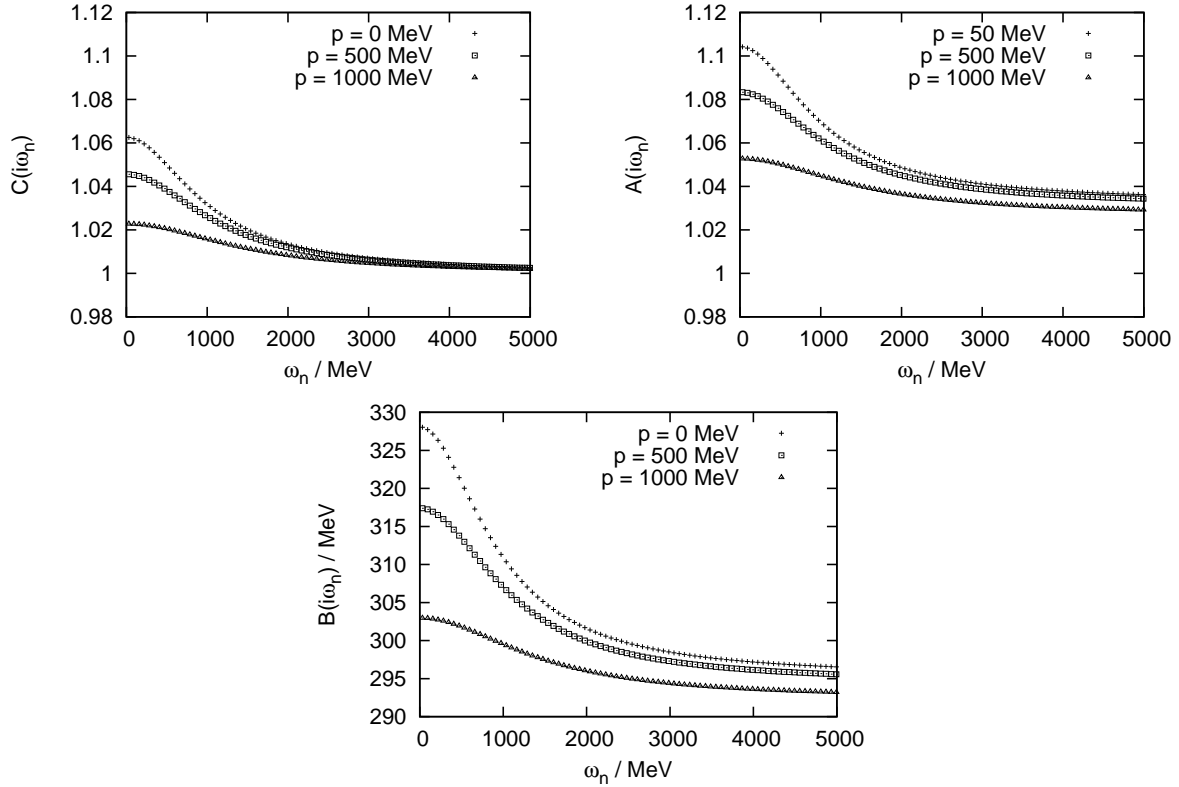


Abbildung 5.1: Koeffizienten A, B und C des Quarkpropagators in Abhängigkeit der Matsubarafrequenz ω_n für verschiedene 3er-Impulse \mathbf{p} bei $T = 10$ MeV und $\mu = 0$ MeV

Die Parameter wurden aus [31] entnommen.

$$\Lambda = 664,3 \text{ MeV}, \quad g_s \Lambda^2 = 2,06, \quad m_0 = 5,0 \text{ MeV} \quad (5.21)$$

Dabei wurden in Hartree / RPA die Pionmasse und Pionzerfallskonstante auf ihre empirischen Werte $m_\pi = 135,0$ MeV und $f_\pi = 92,4$ MeV gefittet. Die Hartree Konstituentenquarkmasse ergibt sich dabei zu $m = 300$ MeV. Der Cutoffparameter des Mesonloops wurde auf $\Lambda_M = 500,0$ MeV gesetzt, was in etwa den Werten in [11] entspricht. Für Rechnungen im chiralen Limes wurde die Stromquarkmasse $m_0 = 0$ MeV gesetzt und die restlichen Werte beibehalten.

Die Ergebnisse der Iteration im Vakuum (hierbei wurde aus numerischen Gründen eine Temperatur von 10 MeV verwendet, die Unterschiede zu $T = 0$ MeV sind jedoch gering) sind in Abb. 5.1 und Abb. 5.2 dargestellt. Die Koeffizienten des (inversen) Quarkpropagators (Abb. 5.1) sind für niedrige Matsubarafrequenzen erhöht und streben asymptotisch gegen konstante Werte. Für große Matsubarafrequenzen ist daher der Mesonloop unterdrückt und spielt nur noch eine geringe Rolle. Auch größere 3er-Impulse unterdrücken die NLO Korrekturen. Die Koeffizienten C und A sind, entgegen der Erwartung aufgrund der Lorentzsymmetrie, leicht verschieden, dies liegt jedoch daran, dass der nicht-kovariante 3er-Impuls Cutoff verwendet wurde. Die Pion- und Sigma propagatoren (Abb. 5.2) sind qualitativ ähnlich wie in Hartree / RPA (Abb. 5.3), insbesondere der Wert des Pionpropagators bei $\omega_m = 0$ MeV ist in NLO jedoch betragsmäßig deutlich niedriger, was bereits auf eine größere Pionmasse der intermediären Pionen in NLO hindeutet.

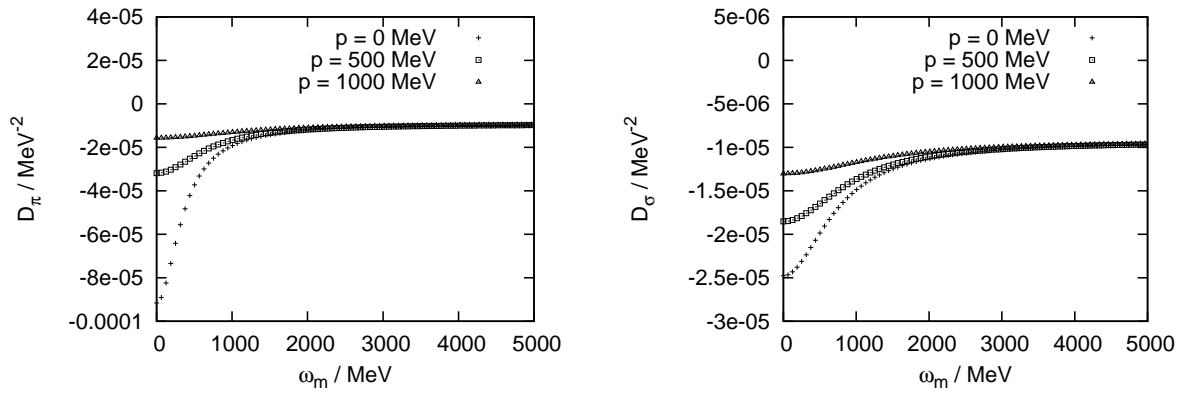


Abbildung 5.2: Pion- (links) und Sigma- (rechts) Propagatoren in Abhängigkeit der Matsubarafrequenz ω_m für verschiedene 3er-Impulse \mathbf{p} bei $T = 10 \text{ MeV}$ und $\mu = 0 \text{ MeV}$

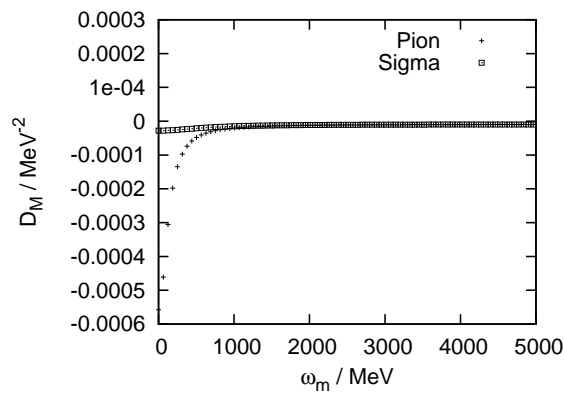


Abbildung 5.3: Hartree / RPA Pion- und Sigmapropagatoren in Abhängigkeit der Matsubarafrequenz ω_m für $\mathbf{p} = 0 \text{ MeV}$ bei $T = 10 \text{ MeV}$ und $\mu = 0 \text{ MeV}$

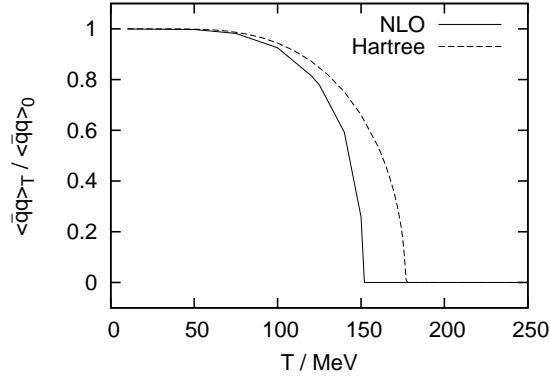


Abbildung 5.4: Temperaturabhängigkeit des skalaren Quarkkondensats im chiralen Limes in Hartree Näherung (gestrichelt) sowie NLO (durchgezogen)

5.5 Das chirale Quarkkondensats in NLO

Das chirale Quarkkondensat (vgl. Gl. (2.14))

$$\langle \bar{q}q \rangle_T = T \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \text{Tr}(S(i\omega_n, \mathbf{k})) \quad (5.22)$$

ist eine skalare Größe und kann somit im euklidischen Raum direkt berechnet werden.

Die Temperaturabhängigkeit des Quarkkondensats ist in Abb. 5.4 im chiralen Limes dargestellt. Wie auch in Hartree Näherung wird die chirale Symmetrie durch einen Phasenübergang 2. Ordnung restauriert, die kritische Temperatur ist dabei etwas geringer. Für die QCD würde man für zwei masselose Quarkflavors das kritisches Verhalten der $O(4)$ Universalitätsklasse erwarten, da der Phasenübergang durch die 4 Bosonen bestimmt wird (3 Pionen und Sigma Meson), welche an der Phasengrenze alle masselos sind. Dies erfordert einen Phasenübergang 2. Ordnung, was somit im NJL Modell in dieser Näherung realisiert ist, obwohl die intermediären Mesonen nicht von der chiralen Symmetrie eingeschränkt sind und massiv sind. Dies ist jedoch ein Indiz dafür, dass die Entwicklung die chirale Symmetrie wahrt, da dadurch auch die aus der NLO Bethe-Salpeter Gleichung resultierenden chiral konsistenten Mesonen den erforderlichen Phasenübergang 2. Ordnung durchlaufen können.

Am Phasenübergang sind die fermionischen Freiheitsgrade aufgrund der Antiperiodizität unterdrückt, wodurch das Modell dort ein zu einem skalaren Modell äquivalentes Verhalten zeigt. Solche Theorien zeigen ebenfalls einen Phasenübergang 2. Ordnung [32].

Das Quarkkondensat bei endlichen Quarkmassen ist in Abb. 5.5 dargestellt. Hierbei ist der Phasenübergang durch einen glatten Crossover charakterisiert, der Crossover findet wiederum bei leicht geringeren Temperaturen statt.

In chiraler Störungstheorie kann eine Niedrig-Temperatur Entwicklung des chiralen Quarkkondensats durchgeführt werden, welche im chiralen Limes bei verschwindendem chemischen Potential das Temperaturverhalten des Kondensats beschreibt [33]

$$\langle \bar{q}q \rangle_T = \langle \bar{q}q \rangle_0 \left(1 - \frac{T^2}{8f_\pi^2} - \frac{T^4}{384f_\pi^4} + \dots \right) \quad (5.23)$$

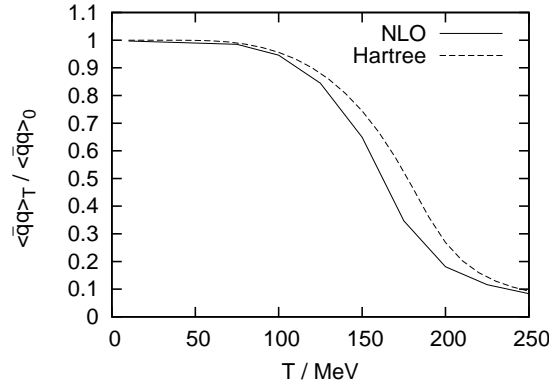


Abbildung 5.5: Temperaturabhängigkeit des skalaren Quarkkondensats bei endlichen Quarkmassen in Hartree Näherung (gestrichelt) und NLO (durchgezogen)

Dabei ist f_π die Pionzerfallskonstante.

Das Niedrigtemperaturverhalten wird hierbei von den masselosen und somit dominanten Pionen bestimmt. In Hartree Näherung gibt es jedoch noch keine Rückkopplung der Mesonen an die Quarks, wodurch der chirale Phasenübergang allein durch die Quarks getrieben wird. Die Konstituentenquarks sind jedoch in der chiral gebrochenen Phase massiv und unterdrücken eine Änderung des Quarkkondensats bei niedrigen Temperaturen exponentiell. Analytische Rechnungen in Hartree Näherung liefern [34]

$$\langle \bar{q}q \rangle_T = \langle \bar{q}q \rangle_0 \left(1 - \frac{(2mT)^{3/2}}{\pi^{3/2} \langle \bar{q}q \rangle^{(0)}} e^{-m/T} + \dots \right) \quad (5.24)$$

Daher bleibt das Quarkkondensat in Hartree Näherung auch im chiralen Limes bis zur Gegend des Phasenübergangs nahezu konstant. Eine perturbative Berücksichtigung der mesonischen Beiträge kann jedoch bereits das korrekte Verhalten bei niedrigen Temperaturen reproduzieren [11]. Bei niedrigen Temperaturen ist diese perturbative Entwicklung zulässig, in der Nähe des Phasenübergangs können damit jedoch keine sinnvollen Ergebnisse erhalten werden.

Die in dieser Arbeit verwendete nichtperturbative Berücksichtigung der Mesonloops ist auch am Phasenübergang anwendbar, jedoch kann man nicht die T^2 Abhängigkeit bei niedrigen Temperaturen reproduzieren. Dies liegt an der Tatsache, dass die intermediären Pionen, mit welchen der Quarkpropagator gedresst wird, auch im chiralen Limes nicht masselos sind. Die zusätzlichen mesonischen Beiträge verstärken zwar geringfügig das Abnehmen des Quarkkondensats mit steigender Temperatur, durch die endliche und recht große Masse der Pionen ist dieser Effekt jedoch auch exponentiell unterdrückt. Das richtige Niedrigtemperaturverhalten bekommt man nur mit masselosen intermediären Pionen.

Die Abhängigkeit des Quarkkondensats vom chemischen Potential ist im chiralen Limes in Abb. 5.6 dargestellt. Hierbei ist auch kein qualitativer Unterschied zur Hartree Näherung feststellbar. In Hartree, sowie auch in NLO wird die chirale Symmetrie durch einen 1. Ordnung Phasenübergang restauriert. In NLO liegt das kritische chemische Potential bei leicht geringeren Werten.

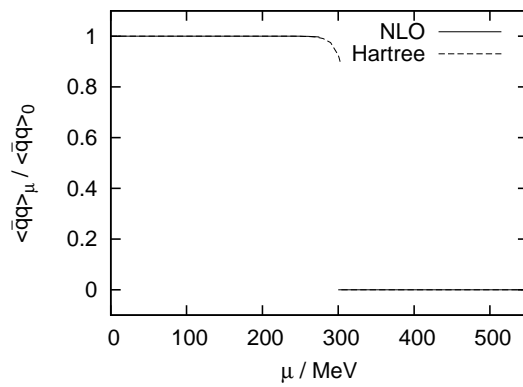


Abbildung 5.6: Abhängigkeit des skalaren Quarkkondensats vom chemischen Potential im chiralen Limes in Hartree Näherung (gestrichelt) und NLO (durchgezogen)

6 Bestimmung der Spektralfunktion mit der Maximum-Entropie-Methode

Die Suche nach der stetigen Fortsetzung eines nur an diskreten Matsubarafrequenzen gegebenen Propagators ist zunächst ein unterbestimmtes Problem, da im Allgemeinen eine unendliche Schar von Funktionen eine solche Fortsetzung bietet. Erst zusätzliche Forderungen an die Asymptotik und die analytische Struktur liefern eine eindeutige Fortsetzung [35]. Dies hilft jedoch nur bei analytisch gegebenen Funktionen, welche man auf Asymptotik und Pole untersuchen kann. Hat man den Propagator jedoch nur numerisch an wenigen Punkten gegeben, kann man daraus nichts über die analytische Struktur in der gesamten komplexen Ebene aussagen und ein reiner Fit einer allgemeinen Funktion an die Datenpunkte bleibt unterbestimmt. Ein Ausweg bietet die Maximum-Entropie-Methode (MEM), welche neben einem χ^2 -Fit auch die größtmögliche Übereinstimmung mit einer vorher festgelegten „wahrscheinlichsten Spektralfunktion“ fordert und dadurch eine eindeutige (wahrscheinlichste) Lösung des Problems bietet. Die Methode wurde bereits erfolgreich in der Gitter QCD verwendet [36]. Bei Dyson-Schwinger Rechnungen bei niedrigen Temperaturen, welche in der Regel nur mit sehr kleinen numerischen Fehlern behaftet sind und viele Datenpunkte ($\sim 10^3$) bieten, liefert MEM sogar sehr gute Ergebnisse [37]. Notwendig für die Anwendung von MEM ist eine Beziehung zwischen dem Propagator und einer Spektralfunktion, welche als Wahrscheinlichkeitsdichte interpretiert werden kann. Diese Beziehung ist durch die Lehmann Darstellung Gl. (4.26) des Propagators

$$D(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\rho(\omega)}{x - \omega} \quad (6.1)$$

gegeben.

6.1 Maximum-Entropie-Methode

Grundlage von MEM ist das Bayes'sche Theorem

$$P[X|Y]P[Y] = P[Y|X]P[X] \quad (6.2)$$

mit $P[X]$ der Wahrscheinlichkeit von X und $P[X|Y]$ der bedingten Wahrscheinlichkeit von X unter der Bedingung Y . Die Plausibilität $P[\rho|DH(m)]$ einer Spektralfunktion ρ unter einem gegebenem Datensatz D und vorher bekanntem allgemeinem Wissen über die Spektralfunktion $H(m)$ lautet daher

$$P[\rho|DH(m)] = \frac{P[D|\rho H(m)]P[\rho|H(m)]}{P[D|H(m)]} \quad (6.3)$$

Dabei ist $P[D|\rho H(m)]$ die Plausibilität des Datensatz unter einer Spektralfunktion ρ und dem Vorwissen $H(m)$ und $P[\rho|H(m)]$ die Plausibilität der Spektralfunktion allein unter dem Vorwissen $H(m)$ ohne Information über die Daten selbst. Der Normierungsfaktor $P[D|H(m)]$ kann weggelassen werden, da die Wahrscheinlichkeitsverteilung am Ende normiert wird. Das Vorwissen $H(m)$ beinhaltet allgemeine Informationen über die Spektralfunktion wie Positivität und gegebenenfalls auch Asymptotik und soll der berechneten Spektralfunktion nur möglichst wenig Abweichung von einer allgemeinen Spektralfunktion zulassen. Hauptsächlich verhindert sie aber die Verletzung der Positivität einer berechneten Spektralfunktion. Dadurch sollen mögliche Oszillationen sowie falsche Asymptotik der berechneten Spektralfunktion verhindert werden. Für die Plausibilität der Daten $P[D|\rho H(m)]$ wird eine Gaußsche Verteilung der Daten angenommen

$$P[D|\rho H(m)] = \frac{1}{Z_L} e^{-L[\rho]} \quad (6.4)$$

mit

$$L[\rho] = \frac{1}{N_D} \sum_i \frac{|D_i - D_i^\rho|^2}{2|\sigma_i|^2} \quad (6.5)$$

für einen äquidistant eingeteilten Datensatz mit Werten D_i und Fehlern σ_i . D_i^ρ ist dabei der Datenwert an der Stelle i , den man über die zu bestimmende Spektralfunktion durch die Lehmann Darstellung Gl. (6.1) des Propagators erhält.

$P[\rho|H(m)]$ ist im Allgemeinen nicht eindeutig festlegbar, sondern hängt direkt von einer Vermutung $m(\omega)$ für eine möglichst allgemeine Spektralfunktion ab. Mit Hilfe eines Skalierungsfaktors α kann man den Ausdruck schreiben als

$$P[\rho|H(m)] = \int_0^\infty d\alpha P[\rho|H(\alpha m)] P[\alpha|H(m)] \quad (6.6)$$

wobei

$$P[\rho|H(\alpha m)] = \frac{1}{Z_S} e^{\alpha S[\rho]} \quad (6.7)$$

mit der Shannon-Jaynes Entropie

$$\begin{aligned} S[\rho] &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left(\rho(\omega) - m(\omega) - \rho(\omega) \ln \frac{\rho(\omega)}{m(\omega)} \right) \\ &\approx \sum_i \Delta\omega_i \left(\rho_i - m_i - \rho_i \ln \frac{\rho_i}{m_i} \right) \end{aligned} \quad (6.8)$$

mit den Abständen $\Delta\omega_i$ zwischen den Stützstellen der Spektralfunktion. Diesen Ausdruck für die Entropie kann man axiomatisch durch Ausnutzen von allgemeinen Eigenschaften (Lokalität, Skalierung etc.) oder auch mit Hilfe des Gesetzes der großen Zahlen („monkey argument“) [36] herleiten. Durch Entwicklung des Logarithmus kann man den Term noch weiter nähern

$$S[\rho] \approx -2 \sum_i \Delta\omega_i (\sqrt{\rho_i} - \sqrt{m_i})^2 \quad (6.9)$$

Setzt man nun Gl. (6.4) und Gl. (6.7) in Gl. (6.3) ein, erhält man

$$P[\rho|DH(am)] = \frac{1}{Z} e^{Q[\rho]} \quad (6.10)$$

mit dem Funktional $Q[\rho] = \alpha S[\rho] - L[\rho]$. Durch Extremierung von $Q[\rho]$ kann man nun für gegebenes α die wahrscheinlichste Spektralfunktion bestimmen.

Anschließend muss noch der Skalierungsfaktor α eliminiert werden. Bei der Behandlung von α gibt es unterschiedliche Methoden. In dieser Arbeit wird Bryan's Methode [38] von MEM verwendet, welche sich am einfachsten realisieren lässt und üblicherweise verwendet wird. Dabei wird über α gemittelt. Die wahrscheinlichste Spektralfunktion ergibt sich daher zu

$$\begin{aligned} \rho_{MEM}(\omega) &= \int D\rho \rho(\omega) P[\rho|DH(m)] \\ &\stackrel{(6.6)}{=} \int_0^\infty d\alpha \int D\rho \rho P[\rho|DH(am)] P[\alpha|DH(m)] \\ &\approx \int_0^\infty d\alpha \rho_\alpha(\omega) P[\alpha|DH(m)] \end{aligned} \quad (6.11)$$

Dabei wurde angenommen, dass $P[\rho|DH(am)]$ stark um das Maximum $\rho_\alpha(\omega)$ gepeaked ist. Der übrigbleibende Wahrscheinlichkeitsfaktor lässt sich durch eine Sattelpunktsapproximation nähern

$$\begin{aligned} P[\alpha|DH(m)] &\stackrel{(6.2)}{=} \int D\rho P[D|\rho H(am)] P[\rho|H(am)] P[\alpha|H(m)] / P[D|H(m)] \\ &\simeq \int D\rho e^{Q[\rho]} \approx \exp \left[\frac{1}{2} \sum_k \ln \left(\frac{\alpha \Delta \omega_k}{\lambda_k} \right) + Q[\rho_\alpha] \right] \end{aligned} \quad (6.12)$$

wobei λ_k die Eigenwerte der Matrix

$$M_{ij} = \alpha \Delta \omega_i \delta_{ij} + \sqrt{\rho_i} \left. \frac{\partial^2 L}{\partial \rho_i \partial \rho_j} \sqrt{\rho_j} \right|_{\rho=\rho_\alpha} \quad (6.13)$$

sind. Da M reell und symmetrisch ist, sind die Eigenwerte, wie erforderlich, auch reell. In Gl. (6.12) wurde zudem die Laplace-Methode $P[\alpha|H(m)] = \text{const.}$ (vgl. [36]) verwendet.

6.2 Numerische Implementation

Der aufwändigste Schritt in der Bestimmung einer Spektralfunktion mit MEM ist die funktionale Extremierung des Funktionals $Q[\rho]$ (Gl. (6.10))

$$Q[\rho] = \alpha S[\rho] - L[\rho] \quad (6.14)$$

bezüglich ρ , da dies ein sehr hochdimensionales Extremierungsproblem ist. Die Extremalbedingung lässt sich schreiben als

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{\partial Q}{\partial \rho} = -2\alpha \Delta \omega_i \left(1 - \sqrt{\frac{m_i}{\rho_i}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \rho_i} \quad (6.15)$$

Dies kann man unter Verwendung der diskretisierten und linearisierten Lehmann Darstellung Gl. (6.1)

$$D_i^\rho \approx \Delta \omega_j K_{ij} \rho_j \quad (6.16)$$

umschreiben

$$0 \stackrel{!}{=} -2\alpha \left(1 - \sqrt{\frac{m_j}{\rho_j}} \right) - K_{ij} \frac{\partial L}{\partial D_i^\rho} - K_{ij}^* \frac{\partial L}{\partial D_i^{\rho*}} = -2\alpha \left(1 - \sqrt{\frac{m_j}{\rho_j}} \right) - 2\text{Re} \left(K_{ij} \frac{\partial L}{\partial D_i^\rho} \right) \quad (6.17)$$

Diese Gleichung kann nun mit dem Marquardt-Levenberg Verfahren [39] numerisch gelöst werden. Dazu wird die Änderung $\delta \rho_j$ ähnlich dem Gauß-Newton-Verfahren gemäß

$$\left[\alpha \frac{1}{\rho_i} \sqrt{\frac{m_i}{\rho_i}} \delta_{ij} + 2\text{Re} \left(K_{ki} \frac{\partial^2 L}{\partial D_k^\rho \partial D_l^\rho} K_{lj}^* \right) + \mu \right] \delta \rho_j = -2\alpha \left(1 - \sqrt{\frac{m_i}{\rho_i}} \right) - 2\text{Re} \left(K_{ij} \frac{\partial L}{\partial D_i^\rho} \right) \quad (6.18)$$

berechnet. Der Marquardt-Levenberg Parameter μ führt dabei zu einem robusteren Verfahren als das gewöhnliche Gauß-Newton-Verfahren, indem er jeweils so angepasst wird, dass er absteigende Werte von Gl. (6.14) erzwingt.

Zur anschließenden Mittelung über den Skalenparameter α muss das Integral Gl. (6.11) gelöst werden. Dazu wird das Integral diskretisiert und ein oberer Cutoff α_{max} gewählt, so dass

$$P[\alpha_{max} | DH(m)] < 10^{-1} \max_{\alpha \in [0, \alpha_{max}]} P[\alpha | DH(m)] \quad (6.19)$$

Zuletzt müssen noch die Wahrscheinlichkeiten normiert werden, so dass

$$\sum_i P[\alpha_i | DH(m)] = 1 \quad (6.20)$$

und man kann schließlich die Spektralfunktion zu

$$\rho_{MEM}(\omega) = \sum_{\alpha}^{\alpha_{max}} \rho_{\alpha}(\omega) P[\alpha | DH(m)] \quad (6.21)$$

abschätzen.

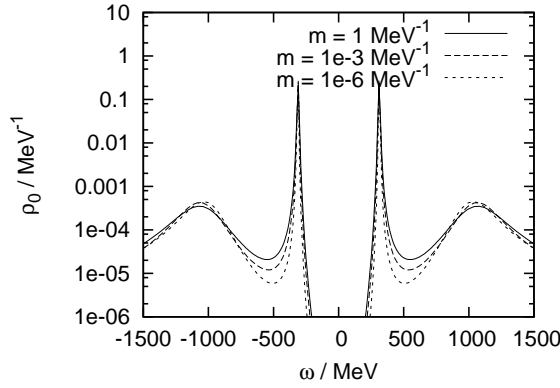


Abbildung 6.1: NLO Quarkspektralfunktion im Vakuum für verschiedene $m(\omega)$

6.3 Ergebnisse

Die iterative Berechnung des Quarkpropagators wurde ohne Fehlerabschätzung durchgeführt. Der Großteil der Fehler sind jedoch systematische Fehler und damit hochkorreliert. Beispiel dafür sind die Diskretisierung und Interpolation im 3er-Impulsbereich, die Näherung der Matsubarasummen durch ein Integral und die asymptotische Fortsetzung der Daten für hohe Energien. Die Fehler, die in die MEM Berechnung eingehen, sollten jedoch eine statistische unkorrelierte Verteilung besitzen, was die Gaußsche Verteilung der Daten Gl. (6.4) rechtfertigen würde. Daher wird für alle Daten ein relativer Fehler von 10^{-4} angenommen. Dieser unterschätzt zwar die systematischen Fehler, sollte aber in der Größenordnung der unkorrelierteren numerischen Fehler der Integrationen liegen. Ein Fehler in dieser Größenordnung hat sich als sinnvoll erwiesen, denn nimmt man größere Fehler an, werden die schwächer ausgeprägten Kontinua nicht mehr aufgelöst, nimmt man kleinere Fehler an, beginnt das MEM Ergebnis zu oszillieren. Eine weitere Annahme ist die wahrscheinlichste Spektralfunktion $m(\omega)$. Es zeigt sich jedoch, dass das Ergebnis recht unabhängig von dessen Wahl ist (Abb. 6.1). Obwohl m über 6 Größenordnungen variiert wurde, sieht man nur geringfügige Unterschiede im Ergebnis. Dies ist eine Folge der recht kleinen Fehler der Daten. Aus diesem Grund wird $m(\omega)$ konstant auf $m(\omega) = 10^{-3} \text{ MeV}^{-1}$ gesetzt.

Die Vakuumergebnisse für die Quarkspektralfunktion¹ sind in Abb. 6.2 dargestellt. Die Hartree Spektralfunktion besitzt zwei stark ausgeprägte Peaks bei den Quarkmassen von ca. $\pm 300 \text{ MeV}$. Die exakte Spektralfunktion besäße Deltapeaks (Gl. (2.37)), welche jedoch aufgrund der numerischen Berechnung eine endliche Breite bekommen. Die NLO Spektralfunktion zeigt ebenfalls die Hauptpeaks, wobei deren Position sich nur kaum verändert hat (ca. $\pm 310 \text{ MeV}$) und auch die Höhe und Breite zeigen nur geringe Änderungen. Zusätzlich gibt es nun jedoch noch Kontinuumsbeiträge, welche die mögliche Absorption und Emission eines Pions und bei höheren Energien auch eines Sigma Mesons anzeigen.

Bei der Anwendung von MEM auf die Mesonpropagatoren muss die subtrahierte Dispersionsrelation Gl. (4.20) als Zusammenhang zwischen Daten und Spektralfunktion verwendet werden. Weiterhin ist die Mesonspektralfunktion nicht positiv definit, da sie antisymmetrisch ist. Stattdessen bietet es sich an, mit dem MEM Algorithmus die positiv semidefinite Größe $\omega\rho(\omega)$

¹ In diesem Kapitel wird ausschließlich die 0-Komponente der Quarkspektralfunktion $\rho_0 = \frac{1}{4} \text{Tr} \gamma_0 \rho$ betrachtet und als Quarkspektralfunktion bezeichnet

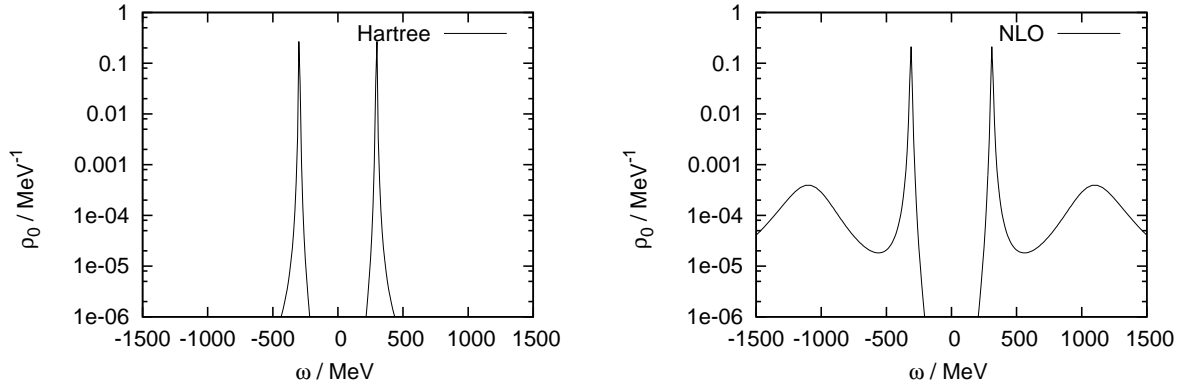


Abbildung 6.2: Quarkspektralfunktion in Hartree (links) und NLO (rechts) im Vakuum

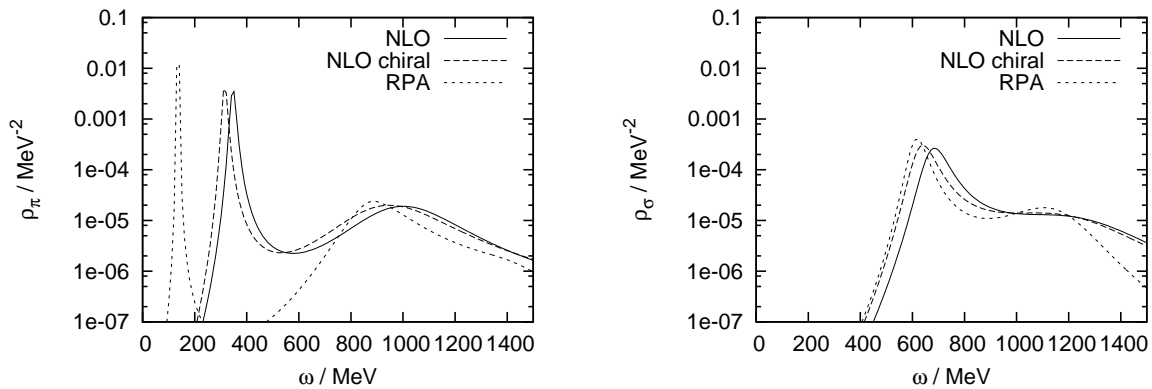


Abbildung 6.3: Pion- (links) und Sigma- (rechts) Spektralfunktion im Vakuum bei endlicher Quarkmasse, im chiralen Limes sowie in Hartree / RPA

zu bestimmen, woraus man sofort die Spektralfunktion bekommt. Die Spektralfunktionen der intermediären Mesonen sind in Abb. 6.3 dargestellt. Die Pionen sind deutlich schwerer (Pionmasse ca. 350 MeV) als in Hartree / RPA (135 MeV). Auch im chiralen Limes ist die Masse nur unwesentlich kleiner und keinesfalls 0, was chirale Symmetrie fordern würde. Dies liegt an der bereits erwähnten Tatsache, dass die Pionen erst mit Berücksichtigung der NLO Korrekturen in der Bethe-Salpeter Gleichung wieder die chirale Symmetrie wahren, jedoch nicht die intermediären RPA Pionen. Die Sigma Mesonen zeigen dagegen keine größere Änderung im Vergleich zu Hartree / RPA.

Bei höheren Temperaturen wird die Extrapolation der Spektralfunktion mit MEM zunehmend schwieriger, da aufgrund des großen Abstandes zwischen den Matsubarafrequenzen ($2\pi T$) deutlich weniger Daten bei niedrigen Energien zur Verfügung stehen. Die Daten bei höheren Energien liefern aber nur wenig Informationen, da sie hauptsächlich das asymptotische Verhalten der Propagatoren widerspiegeln.

Die Ergebnisse der Quarkspektralfunktion bei $T = 200$ MeV sind in Abb. 6.4 dargestellt. Die Spektralfunktionen werden numerisch bedingt deutlich breiter, so dass die beiden Massenpeaks sich überlappen und nicht mehr einzeln identifizierbar sind. Hauptursache dafür ist die geringere Anzahl an Datenpunkten bei niedrigen Energien. Die Hartree Spektralfunktion (links) würde in exakter Berechnung weiterhin aus zwei Deltapeaks bestehen, welche jedoch aufgrund der restaurierten chiralen Symmetrie bei niedrigen Energien liegen. Durch eine Verkleinerung des

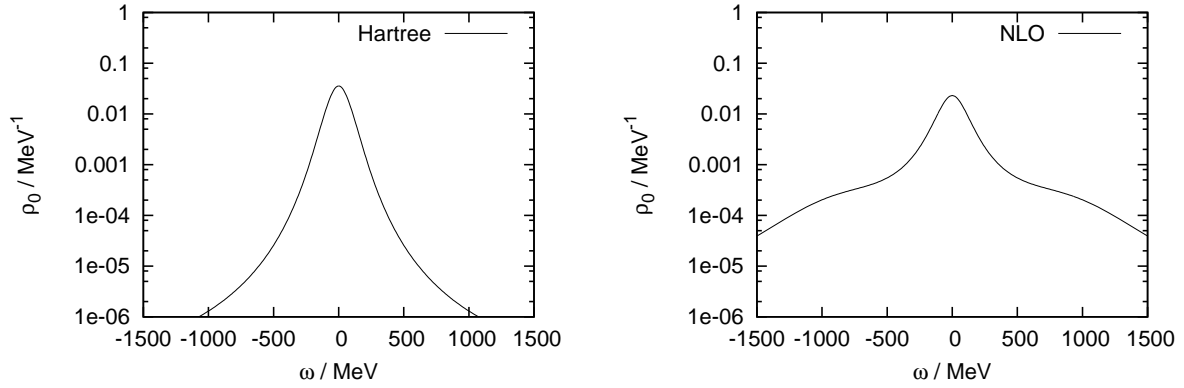


Abbildung 6.4: Quarkspektralfunktion in Hartree (links) und NLO (rechts) bei $T = 200$ MeV

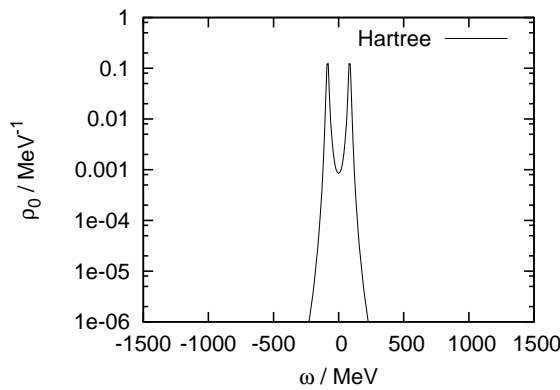


Abbildung 6.5: Hartree Quarkspektralfunktion bei $T = 200$ MeV für relative Fehler von 10^{-6}

angenommenen Fehlers der MEM Daten (relativer Fehler 10^{-6}), was bei den exakten Hartree Daten möglich ist, kann man auch mit MEM Ergebnisse erzielen, bei denen die Peaks unterscheidbar sind (Abb. 6.5). In der NLO Spektralfunktion (Abb. 6.4 rechts) können die Kontinuumsbeiträge nicht mehr aufgelöst werden, der Hauptpeak erscheint etwas breiter als in Hartree Näherung.

Pion- und Sigmaspektralfunktion Abb. 6.6 werden, wie auch in Hartree / Random-Phase Näherung, in der restaurierten Phase fast identisch. Aufgrund der geringeren Genauigkeit sind, wie auch bei der Quarkspektralfunktion, die Hauptpeaks, trotz der linearen Auftragung, sehr breit geworden und die Kontinua werden nicht mehr aufgelöst.

Bei Anwendung von MEM bei endlichem chemischen Potential macht sich die Verschiebung der Fermikante bemerkbar. In Abb. 6.7 ist die NLO Quarkspektralfunktion bei $\mu = 200$ MeV dargestellt. Da die Dispersionsrelation hier die Form

$$S(i\omega_n + \mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\rho(\omega)}{i\omega_n + \mu - \omega} \quad (6.22)$$

annimmt, tragen die Beiträge der Spektralfunktion um die Fermikante $\omega = \mu$ am stärksten bei. Dementsprechend ist der Massenpeak nahe der Fermikante deutlich besser aufgelöst als der entfernte. Zudem ist die Spektralfunktion nun auch deutlich asymmetrisch. Bei endlichem chemischen Potential muss die Spektralfunktion zwar im Allgemeinen nicht mehr symmetrisch sein, Hauptursache der Asymmetrie hier ist jedoch numerischer Natur, da MEM die Beiträge nahe der nicht mehr symmetrisch liegenden Fermikante genauer auflöst.

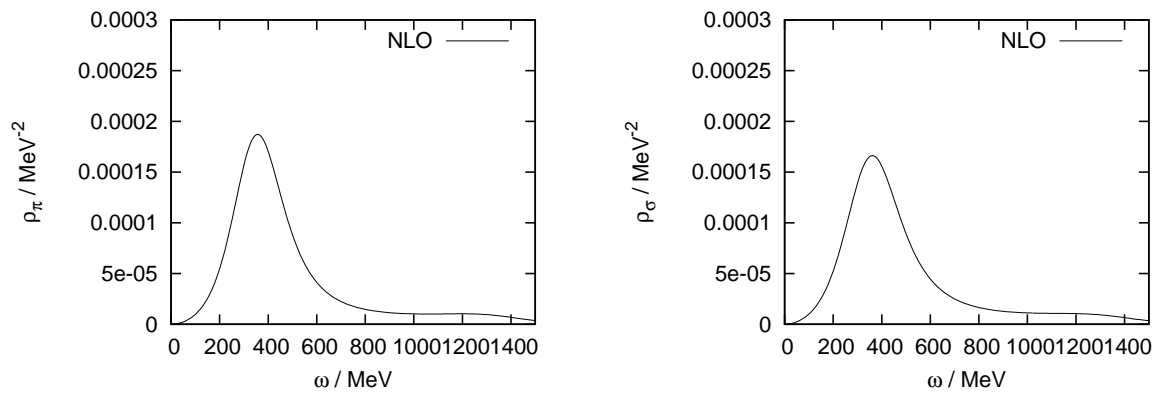


Abbildung 6.6: Pion- (links) und Sigmaspektralfunktion (rechts) bei $T = 200 \text{ MeV}$

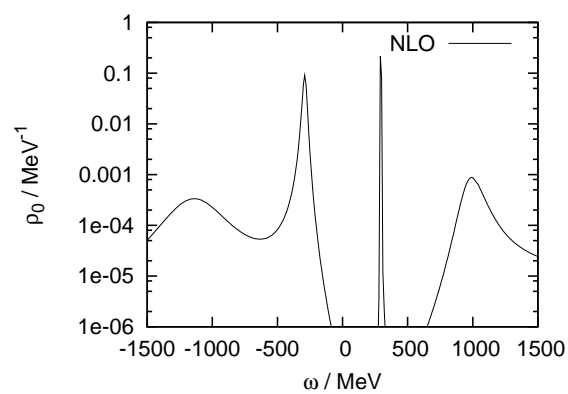


Abbildung 6.7: NLO Quarkspektralfunktion bei $\mu = 200 \text{ MeV}$

6.4 Vergleich der MEM Ergebnisse mit (perturbativen) Berechnungen im Minkowskiraum

Die mit MEM extrapolierten Spektralfunktionen haben speziell bei den Kontinuumsbeiträgen recht große Ungenauigkeiten. Daher werden in diesem Abschnitt die MEM Ergebnisse mit direkten Rechnungen im Minkowskiraum verglichen, um Informationen über die Qualität der MEM Ergebnisse zu bekommen.

Zum Vergleich der MEM Ergebnisse der Quarkspektralfunktion wird ein perturbatives Dressing des Quarkpropagators mit dem Mesonloop berechnet. Dazu wird der Hartree Quarkpropagator mit dem RPA Mesonpropagator aus reinen Hartree Quarks gedresst, das in NLO zusätzlich auftretende Diagramm (siehe Abb. 3.3) wird somit perturbativ behandelt. Dies wird zur Vereinfachung nur im Vakuum betrachtet, da bei höheren Temperaturen, im Speziellen am Phasenübergang, diese perturbative Behandlung keinesfalls mehr gültig ist. Der perturbative Propagator sieht wie folgt aus

$$S_{pert}^{-1} = S_H^{-1} - \Sigma_{pert}^{(1)} \quad (6.23)$$

wobei die in $\Sigma_{pert}^{(1)}$ auftretenden Quarkpropagatoren sämtlich Hartree Propagatoren sind. Die Berechnung der RPA Mesonen im Minkowski-Raum wurde bereits im Abschnitt zur Einführung des NJL Modells beschrieben (Gl. (2.9), Gl. (2.10)). Nun muss noch das Mesonloop-Integral im Minkowski-Raum formuliert werden. Ausgangspunkt ist die Matsubara-Darstellung Gl. (5.9), welche anschließend im Grenzwert $T \rightarrow 0$ betrachtet wird.

$$\Sigma_{pert}^{(1)}(i\omega_n) = -T \sum_M \sum_m \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} D_M(i\omega_m, \mathbf{q}) \Gamma_M S(i\omega_m + i\omega_n, \mathbf{q}) \Gamma_M \quad (6.24)$$

Zunächst wird die Lehmann Darstellung des Quarkpropagators, sowie die subtrahierte Dispersionsrelation Gl. (4.20) des Mesonpropagators eingesetzt

$$\Sigma_{pert}^{(1)}(i\omega_n) = -T \sum_M \sum_m \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\rho_M(\omega, \mathbf{q})}{i\omega_m - \omega} - 2g_s \right) \Gamma_M \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tilde{\omega}}{2\pi} \frac{\rho(\tilde{\omega}, \mathbf{q})}{i\omega_m + i\omega_n - \tilde{\omega}} \Gamma_M \quad (6.25)$$

Die Matsubarasumme wird nun als Integral in der komplexen Ebene um die Pole der Bose-Verteilungsfunktion $n_B(z) = (e^{z/T} - 1)^{-1}$ ausgedrückt

$$\begin{aligned} \Sigma_{pert}^{(1)}(i\omega_n) = & - \sum_M \oint_C \frac{dz}{2\pi i} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} n_B(z) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tilde{\omega}}{2\pi} \frac{\rho_M(\omega, \mathbf{q})}{z - \omega} \Gamma_M \frac{\rho(\tilde{\omega}, \mathbf{q})}{z + i\omega_n - \tilde{\omega}} \Gamma_M \\ & + 2g_s T \sum_M \sum_m \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \Gamma_M S(i\omega_m + i\omega_n, \mathbf{q}) \Gamma_M \end{aligned} \quad (6.26)$$

Im ersten Summand wird der Integrationsweg gemäß Abb. 6.8 umgeformt und das z -Integral mit dem Residuensatz gelöst. Im zweiten Ausdruck verschwinden die Vektorbeiträge bei der

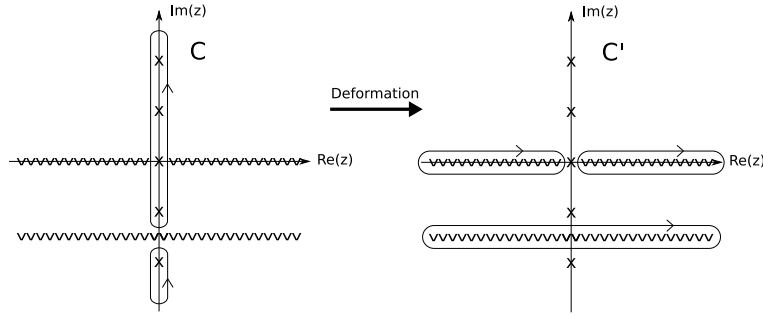


Abbildung 6.8: Verformung des Integrationswegs in der komplexen Ebene

Integration aufgrund der Symmetrien des Propagators, der skalare Beitrag ist proportional zur Hartree Selbstenergie.

$$\begin{aligned}
\Sigma_{pert}^{(1)}(i\omega_n) &= \sum_M \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tilde{\omega}}{2\pi} \\
&\left\{ n_B(\omega) \frac{1}{\omega - \tilde{\omega} + i\omega_n} \Big|_{\omega \neq 0} + n_B(\tilde{\omega} - i\omega_n) \frac{1}{\tilde{\omega} - \omega - i\omega_n} \right\} \rho_M(\omega, \mathbf{q}) \Gamma_M \rho(\tilde{\omega}, \mathbf{q}) \Gamma_M \\
&+ \sum_M \epsilon_M \frac{\Sigma_H}{4N_c N_f}
\end{aligned} \tag{6.27}$$

mit

$$\epsilon_M = \begin{cases} 1 & M = \sigma \\ -1 & M = \pi \end{cases} \tag{6.28}$$

Beim ersten Summanden muss man noch beachten, dass $\omega = 0$ ausgeschlossen werden muss, da in diesem Fall die Polstelle des Propagators hebbar gewesen wäre und somit das Residuum 0 besäße. Dadurch wurde auch, wie erforderlich, der 0-te Summand der Matsubarasumme vom umgeformten Integrationsweg ausgeschlossen. Nun kann man wieder die Propagatoren einsetzen sowie die zweite Bosefunktion umformen

$$\begin{aligned}
\Sigma_{pert}^{(1)}(i\omega_n) &= \sum_M \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \left\{ n_B(\omega) \rho_M(\omega, \mathbf{q}) \Gamma_M S(\omega + i\omega_n, \mathbf{q}) \Gamma_M \Big|_{\omega \neq 0} \right. \\
&\quad \left. - n_F(\omega) \tilde{D}_M(\omega - i\omega_n, \mathbf{q}) \Gamma_M \rho(\omega, \mathbf{q}) \Gamma_M \right\} \\
&\quad + \sum_M \epsilon_M \frac{\Sigma_H}{4N_c N_f}
\end{aligned} \tag{6.29}$$

Dabei ist $\tilde{D}_M = D_M + 2g_s$. Die Stelle $\omega = 0$ im ersten Summanden ist endlich, da zwar die Bosefunktion dort eine Polstelle 1. Ordnung besitzt, die Mesonspektralfunktion jedoch eine Nullstelle von mindestens 1. Ordnung besitzt. Daher kann man diesen einzelnen Punkt bei der Integration

mitnehmen. Formt man das Integral noch etwas um, erhält man mit der stetigen Fortsetzung $i\omega_n \rightarrow p_0 + i\epsilon$ als Ergebnis

$$\begin{aligned} \Sigma_{pert}^{(1)}(p_0 + i\epsilon) = & \sum_M \epsilon_M \frac{\Sigma_H}{4N_c N_f} + \sum_M \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \\ & \left\{ n_B(\omega) \rho_M(\omega, \mathbf{q}) \Gamma_M S(\omega + p_0 + i\epsilon, \mathbf{q}) \Gamma_M \right. \\ & + (1 + n_B(\omega)) \rho_M(\omega, \mathbf{q}) \Gamma_M S(p_0 - \omega + i\epsilon, -\mathbf{q}) \Gamma_M \\ & - n_F(\omega) \tilde{D}_M(\omega - p_0 - i\epsilon, \mathbf{q}) \Gamma_M \rho(\omega, \mathbf{q}) \Gamma_M \\ & \left. - (1 - n_F(\omega)) \tilde{D}_M(\omega + p_0 + i\epsilon, \mathbf{q}) \Gamma_M \rho(-\omega, -\mathbf{q}) \Gamma_M \right\} \end{aligned} \quad (6.30)$$

Zur Berechnung dieses Ausdrucks wird nun eine weitere Näherung eingeführt, indem bei den mesonischen Beiträgen die Mesonen durch ihren Pol genähert werden. Dabei werden die Kontinuumsbeiträge in den mesonischen Spektren sowie die endliche Breite des Sigma Mesons vernachlässigt. Da die Massepeaks jedoch die Spektren dominieren und das Sigma Meson im Vakuum einen sehr scharfen Massepeak besitzt, sind diese Näherungen recht gut. Für die Spektralfunktion Gl. (2.35) bedeutet dies

$$\rho_M(q) \approx 4\pi g \delta(1 - 2g \text{Re } J_M(q)) \text{sgn}(q_0) \quad (6.31)$$

Der dazugehörige Propagator lautet

$$D_M(q) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\rho_M(\omega)}{q - \omega} = \frac{1}{\left| \frac{d}{dq^2} J_p(q^2) \right|_{q^2=m_M^2}} \frac{1}{q^2 - \mathbf{q}^2 - m_M^2} \quad (6.32)$$

Setzt man dies zusammen mit dem Quarkpropagator $S^{-1}(p) = \not{p} - m$ und der Quarkspektralfunktion $\rho(p) = 2\pi(\not{p} + m)\delta(p^2 - \mathbf{p}^2 - m^2)\text{sgn}(p_0)$ in den Vakuumlimites ($T \rightarrow 0$) von Gl. (6.30) ein, kann man die ω Integrationen mit Hilfe der Deltafunktionen ausführen und erhält nach kurzer Rechnung

$$\begin{aligned} \Sigma_{pert}^{(1)}(p_0 + i\epsilon) = & \sum_M \epsilon_M \frac{\Sigma_H}{4N_c N_f} \\ & + \sum_M \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\left| \frac{d}{dq_0} J_p(q^2) \right|_{q^2=m_M^2}} \frac{1}{2E_q} \left(\frac{E_q \gamma_0 + m}{p_0 - E_{M,q} - E_q} + \frac{E_q \gamma_0 - m}{p_0 + E_{M,q} + E_q} \right) \end{aligned} \quad (6.33)$$

wobei $E_{M,q} = \sqrt{m_M^2 + \mathbf{q}^2}$.

Die perturbativ berechnete Spektralfunktion ist in Abb. 6.9 zusammen mit der MEM Extrapolation eines perturbativ gedressten Propagators dargestellt. Zur numerischen Berechnung im Minkowskiraum wurden die inversen Propagatoren mit einem kleinen Imaginärteil versehen, dadurch bekommt der eigentlich scharfe Quark-Massepeak eine endliche Breite. Man sieht, dass die Massepeaks der Quarks recht gut übereinstimmen, geringe Unterschiede treten durch das

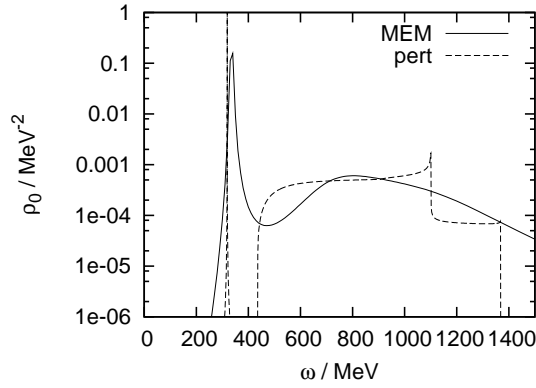


Abbildung 6.9: Vergleich der MEM Quarkspektralfunktion und der perturbativ berechneten

Nichtberücksichtigen der Kontinuumteile der Mesonspektralfunktion bei der Rechnung im Minkowskiraum auf. Die Kontinua stimmen dagegen nur sehr grob in Position und Höhe überein. Die genaue Struktur wird durch MEM nicht reproduziert. Dies liegt hauptsächlich daran, dass das Spektrum sehr stark durch die Massenpeaks dominiert wird und die Kontinua nur eine kleine Korrektur dazu liefern. Daher würde man Daten mit einen sehr viel kleinerem Fehler benötigen, damit die genaue Form der Kontinua im Spektrum überhaupt relevant wird. Zum anderen ist die Struktur des Kontinuums, teilweise auch aufgrund der Regularisierung, sehr kompliziert. Dies erkennt man, wenn man das Zustandekommen der Kontinuumbeiträge untersucht. Diese treten auf, wenn der Ausdruck in Klammern in Gl. (6.33) bei der Impulsintegration eine Unendlichkeitsstelle durchläuft. Hierbei muss im Realteil ein Cauchyscher Hauptwert berechnet werden, während aufgrund von Gl. (2.32) ein Imaginärteil auftritt. Ohne Regularisierung würde dies für alle Energien $|p_0| > m_p + m_q$ auftreten, was eine scharfe Schwelle eben bei diesen Impulswerten erzeugt. Die Regularisierung gibt nun noch zusätzlich eine obere Grenze der Energien $|p_0| < E_{M,\Lambda} + E_\Lambda$ vor. Dies erzeugt zum einen eine weitere Schwelle, zum anderen auch die scharfen Peaks im Kontinuumsteil des Spektrums, da die Integration die Polstelle nicht mehr „vollständig“ durchläuft. All diese Nichtanalytizitäten sind nur sehr schwer mit MEM numerisch zu reproduzieren.

Ähnliche Ergebnisse bekommt man im Vergleich des mesonischen Sektors. Die RPA Mesonspektralfunktionen können für Hartree Quarkpropagatoren recht einfach direkt im Minkowskiraum berechnet werden (siehe Abschnitt 2). Das Ergebnis im Vakuum ist in Abb. 6.10 dargestellt. Der Hauptpeak der MEM Spektralfunktion stimmt wiederum recht gut mit dem exakten Ergebnis überein, während die Schwellen des Kontinuums im MEM Ergebnis geglättet sind.

Deutlich ungenauer ist das Ergebnis bei $T = 100$ MeV, welches für die 3er-Impulse $\mathbf{q} = 0$ und 100 MeV in Abb. 6.11 links dargestellt ist. Bei endlichem 3er-Impuls kann man hier noch zusätzlich den Teilchen-Loch-Branch bei raumartigen Impulsen identifizieren. Das Ergebnis für die gleiche Spektralfunktionen mit MEM ist in rechts dargestellt. Der Massenpeak ist deutlich breiter, die Position stimmt aber noch recht gut überein. Das Paarzeugungskontinuum kann dagegen nur sehr qualitativ identifiziert werden, während der Teilchen-Loch-Branch gar nicht aufgelöst wird.

In Abb. 6.12 sind zum Vergleich die Pionpropagatoren für euklidische Impulse dargestellt, welche als Inputdaten für die MEM-Extrapolation dienen. Für niedrige Energien sind die Punkte leicht verschoben, wodurch auch die Spektralfunktionen leicht verschoben werden, da der

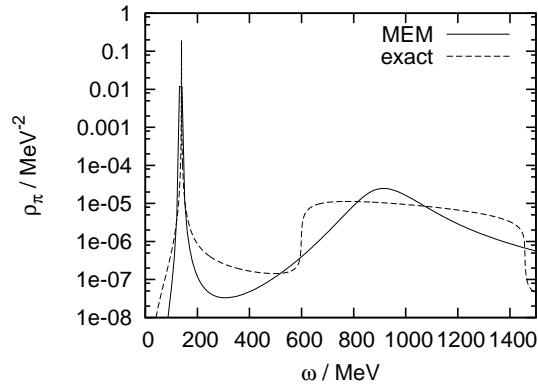


Abbildung 6.10: Pionspektralfunktion im Vakuum

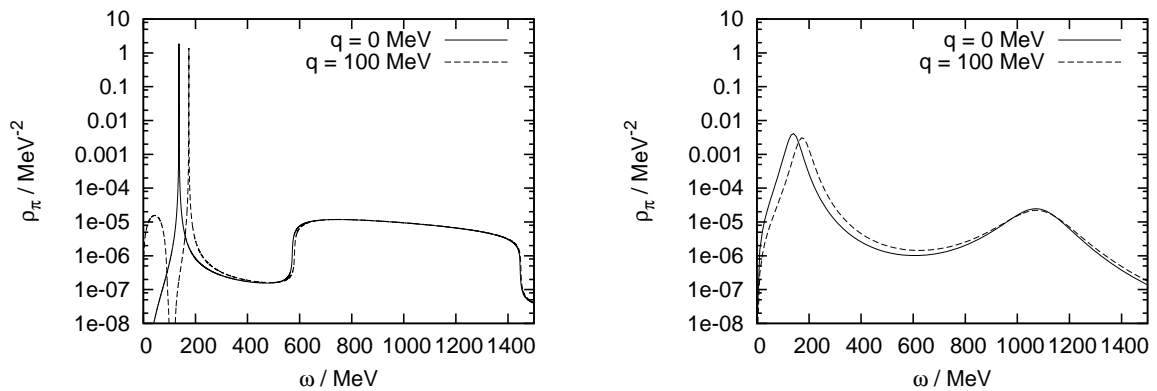


Abbildung 6.11: Pionspektralfunktion bei $T = 100 \text{ MeV}$ in direkter Berechnung (links) und Extrapolation mit MEM (rechts)

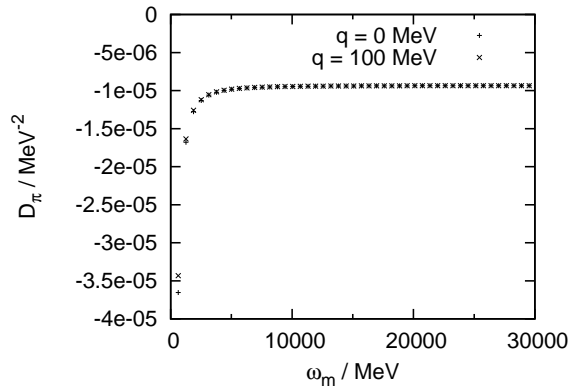


Abbildung 6.12: Pionpropagator im Euklidischen bei $T = 100 \text{ MeV}$

Massepeak im Spektrum bei $\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$ liegt. Es sind jedoch keine qualitativen Unterschiede feststellbar, welche zum Auftreten des Teilchen-Loch-Branch bei $|\mathbf{q}| = 100 \text{ MeV}$ führen könnten. Allgemein erkennt man daran recht gut, dass die doch recht komplizierte Struktur der Spektralfunktionen durch die Faltung der Lehmann Darstellung Gl. (6.1) bei den euklidischen Propagatoren nicht mehr sichtbar ist, wodurch die Umkehrung dieser Faltung, was das Ziel des MEM Algorithmuses ist, äußerst schwierig ist.

7 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde das NJL Modell über die Hartree / Random-Phase Näherung hinaus untersucht und der Quarkpropagator in NLO berechnet. Dafür wurde eine selbstkonsistente Entwicklung in der Anzahl der Farben $1/N_c$ verwendet. Die Berechnungen wurden dabei iterativ im Euklidischen durchgeführt. Das Quarkkondensat konnte direkt berechnet werden und sein Verhalten in Abhängigkeit von Temperatur und chemischen Potential untersucht werden. Gemäß der Erwartungen aus Universalitätsgründen ergab sich im chiralen Limes ein 2. Ordnung Phasenübergang zwischen spontan gebrochener und restaurierter chiraler Symmetrie bei verschwindendem chemischen Potential und endlicher Temperatur.

Aufgrund der massiven intermediären Pionen, welche nicht von der chiralen Symmetrie eingeschränkt sind, zeigt das Quarkkondensat jedoch nicht das aus chiraler Störungstheorie abgeleitete Niedrigenergieverhalten, dennoch wird der Phasenübergang durch die Mesonen etwas beschleunigt und findet bei niedrigeren Temperaturen statt.

Das Quarkkondensat wurde auch in Abhängigkeit vom chemischen Potential berechnet. Hierbei konnten auch nur geringe Änderungen im Vergleich zur Hartree Näherung festgestellt werden, in beiden Fällen wurde die chirale Symmetrie durch einen 1. Ordnung Phasenübergang bei verschwindender Temperatur und endlichem chemischen Potential wieder hergestellt. Das kritische chemische Potential ist in NLO wiederum etwas geringer.

Um dynamische Größen bei reellen Energien zu untersuchen wurden die im euklidischen berechneten Quarkpropagatoren mit Hilfe der Maximum-Entropie-Methode (MEM) analytisch fortgesetzt und die Spektralfunktionen berechnet. Dies war möglich, da eine Spektralfunktion als positiv semidefinite Wahrscheinlichkeit interpretiert und daher mit MEM bestimmt werden kann. Die Massenpeaks der Quarkspektralfunktion wurden im Vergleich zur Hartree Näherung kaum beeinflusst, es gab jedoch noch zusätzliche Kontinuumsbeiträge, die durch Absorption oder Emission von Mesonen interpretiert werden können. Im mesonischen Sektor wurden die NLO Pionen deutlich schwerer und hatten selbst im chiralen Limes Massen in der Größenordnung 300 MeV. Die Sigmaspektralfunktion änderte sich dagegen nur geringfügig. Insgesamt wurden die Kontinuumsbeiträge der Spektralfunktionen jedoch nur sehr schlecht aufgelöst. Durch Vergleich mit direkten perturbativen Rechnungen im Minkowskiraum konnte man sehen, dass die Position der Massenpeaks der Spektralfunktionen recht gut übereinstimmten, die Kontinuumsbeiträge jedoch nur qualitativ gewertet werden dürfen. Da die Spektralfunktionen durch die Massenpeaks dominiert werden, haben die Kontinuumsanteile nur sehr geringen Einfluss und werden daher größtenteils nur sehr grob in Position und Höhe aufgelöst. Die raumartigen Kontinuumsbeiträge, die bei RPA Mesonen berechnet werden können, sind in den MEM Spektralfunktionen gar nicht erkennbar.

Diese Berechnungen können als Grundlage dienen, um auch die Bethe-Salpeter Gleichung in nächster Ordnung der $1/N_c$ Entwicklung konsistent lösen zu können. Die damit beschriebenen Mesonen gehorchen wieder der chiralen Symmetrie und das zugehörige Pion ist im chiralen Limes masselos. Implementiert man noch die Vektorwechselwirkung in das Modell, können damit

schließlich realistische Vektormesonen beschrieben werden, bei denen im Vergleich zu den RPA Vektormesonen der physikalische Zerfall in Pionen möglich ist. Letzteres ist jedoch, wie auch die Kopplung an ein Polyakovloopfeld oder Übergang zu 2+1 Flavours mit großem numerischen Mehraufwand verbunden.

Literaturverzeichnis

- [1] M. Gell-Mann, *A schematic model of baryons and mesons*, Phys. Lett. **8**, 214 (1964).
- [2] D. J. Gross and F. Wilczek, *Ultraviolet behavior of non-abelian gauge theories*, Phys. Rev. Lett. **30**, 1343 (1973).
- [3] H. D. Politzer, *Reliable perturbative results for strong interactions?*, Phys. Rev. Lett. **30**, 1346 (1973).
- [4] S. Bethke, *Experimental tests of asymptotic freedom*, Prog. Part. Nucl. Phys. **58**, 351 (2007).
- [5] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, *Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity I*, Phys. Rev. **122**, 345 (1961).
- [6] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, *Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity II*, Phys. Rev. **124**, 246 (1961).
- [7] A. M. Polyakov, *Thermal properties of gauge fields and quark liberation*, Phys. Lett. **B72**, 477 (1978).
- [8] L. Susskind, *Lattice models of quark confinement at high temperature*, Phys. Rev. **D20**, 2610 (1979).
- [9] K. Fukushima, *Chiral effective model with the Polyakov loop*, Phys. Lett. **B591**, 277 (2004).
- [10] C. Ratti, M. A. Thaler and W. Weise, *Phases of QCD: Lattice thermodynamics and a field theoretical model*, Phys. Rev. **D73**, 014019 (2006).
- [11] M. Oertel, *Investigation of meson loop effects in the Nambu-Jona-Lasinio model*, PhD thesis, TU Darmstadt (2000).
- [12] H. Kleinert, *On the hadronization of quark theories*, In A. Zichichi (ed), *Understanding the fundamental constituents of matter*, page 289, Plenum Press, New York (1978).
- [13] M. K. Volkov, *Meson Lagrangians in a superconductor quark model*, Ann. Phys. **157**, 282 (1984).
- [14] T. Hatsuda and T. Kunihiro, *Possible critical phenomena associated with the chiral symmetry breaking*, Phys. Lett. **B145**, 7 (1984).
- [15] U. Vogl and W. Weise, *The Nambu and Jona-Lasinio Model: Its implications for hadrons and nuclei*, Prog. Part. and Nucl. Phys. **27**, 195 (1991).
- [16] S. P. Klevansky, *The Nambu-Jona-Lasinio model of quantum chromodynamics*, Rev. Mod. Phys. **64**, 649 (1992).
- [17] T. Hatsuda and T. Kunihiro, *QCD phenomenology based on a chiral effective Lagrangian*, Phys. Rep. **247**, 221 (1994).

-
- [18] J. I. Kapusta, *Finite temperature field theory*, Cambridge University Press (1989).
- [19] D. Müller, *Untersuchung des Sigma Mesons im NJL Modell am kritischen Punkt des QCD Phasendiagramms*, Bachelor thesis, TU Darmstadt (2007).
- [20] H. Fujii and M. Ohtani, *Mode softening near the critical point within effective approaches to QCD*, arXiv:hep-ph/0403039.
- [21] P. Rehberg, S. P. Klevansky and J. Hüfner, *Hadronization in the SU(3) Nambu-Jona-Lasinio model*, Phys. Rev. **C53**, 410 (1996).
- [22] V. Dmitrašinović, H. J. Schulze, R. Tegen and R. H. Lemmer, *Chirally symmetric $O(1/N(c))$ corrections to the Nambu-Jona-Lasinio Model*, Ann. Phys. **238**, 332 (1995).
- [23] E. N. Nikolov, W. Broniowski, C. V. Christov, G. Ripka and K. Goeke, *Meson loops in the Nambu-Jona-Lasinio Model*, Nucl. Phys. **A608**, 411 (1996).
- [24] J. Cornwall, R. Jackiw and E. Tomboulis, *Effective action for composite operators*, Phys. Rev. **D10**, 2428 (1974).
- [25] J. Berges, *Introduction to Nonequilibrium Quantum Field Theory*, arXiv:hep-ph/0409233.
- [26] M. Oertel, M. Buballa and J. Wambach, *Meson loop effects in the NJL model at zero and non-zero temperature*, Phys. Atom. Nucl. **64**, 698 (2001).
- [27] M. Le Bellac, *Thermal field theory*, Cambridge University Press (2000).
- [28] A. L. Fetter and J. D. Walecka, *Quantum theory of many-particle systems*, McGraw-Hill (1971).
- [29] H. A. Weldon, *Structure of the quark propagator at high temperature*, Phys. Rev. **D61**, 036003 (2000).
- [30] W. Pauli and F. Villars, *On the invariant regularization in relativistic quantum theory*, Rev. Mod. Phys. **21**, 434 (1949).
- [31] M. Buballa, *NJL-model analysis of dense quark matter*, Phys. Rep. **407**, 205 (2005).
- [32] J. M. Cheyne M. Alford, J. Berges, *Critical phenomena from the two-particle irreducible $1/N$ expansion*, Phys. Rev. **D70**, 125002 (2004).
- [33] J. Gasser and H. Leutwyler, *Light Quarks at low Temperatures*, Phys. Lett. **B184**, 83 (1987).
- [34] M. Lutz, S. Klimt and W. Weise, *Meson properties at finite temperature and baryon density*, Nucl. Phys. **A542**, 521 (1992).
- [35] G. Baym and N. D. Mermin, *Determination of thermodynamic Green's functions*, J. Math. Phys. **2**, 232 (1961).
- [36] M. Asakawa, T. Hatsuda and Y. Nakahara, *Maximum Entropy Analysis of the Spectral Functions in Lattice QCD*, Prog. Part. Nucl. Phys. **46**, 459 (2001).
- [37] D. Nickel, *Extraction of Spectral Functions from Dyson-Schwinger Studies via the Maximum Entropy Method*, Ann. Phys. **322**, 1949 (2007).

-
- [38] R. K. Bryan, *Maximum entropy analysis of oversampled data problems*, Eur. Biophys. J. **18**, 165 (1990).
- [39] W. H. Press et al., *Numerical Recipes Third Edition*, Cambridge University Press (2007).