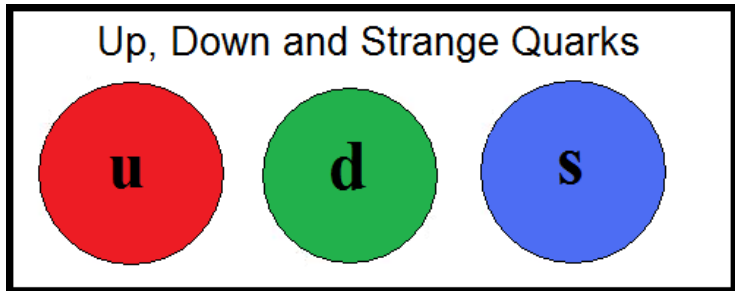


Theorie der starken Wechselwirkung

Chirale Symmetrie



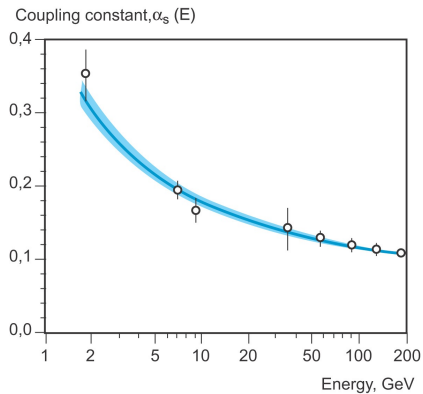
TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT



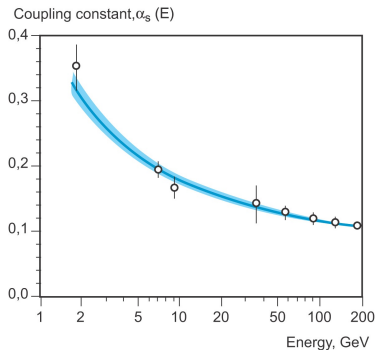
commons.wikimedia.org

Seminarvortrag von Erik Hinkelmann

Unter Anleitung von Prof. Dr. Hans-Werner Hammer und M. Sc. Jonas Braun

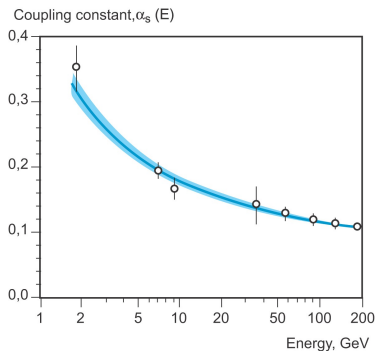


nobelprize.org (2004)



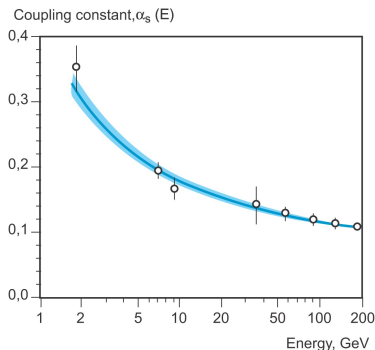
nobelprize.org (2004)

- Untersuchung der starken Wechselwirkung bei kleinen Energien



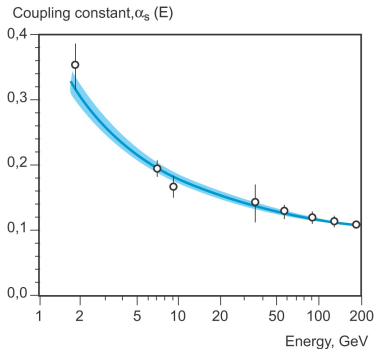
nobelprize.org (2004)

- ▶ Untersuchung der starken Wechselwirkung bei kleinen Energien
- ▶ Kopplungskonstante der QCD wird dort groß



nobelprize.org (2004)

- ▶ Untersuchung der starken Wechselwirkung bei kleinen Energien
- ▶ Kopplungskonstante der QCD wird dort groß
- ▶ Störungstheorie nicht sinnvoll



nobelprize.org (2004)

- ▶ Untersuchung der starken Wechselwirkung bei kleinen Energien
- ▶ Kopplungskonstante der QCD wird dort groß
- ▶ Störungstheorie nicht sinnvoll

—> **Chirale Störungstheorie** als effektive Feldtheorie

1. QCD Lagrangian im chiralen Limes
2. Spontane Brechung der chiralen Symmetrie
3. Explizite Brechung der chiralen Symmetrie

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \sum_{f=u,d,s,c,b,t} \bar{q}_f (i\not{D} - m_f) q_f - \frac{1}{2} \text{Tr}(\mathcal{G}_{\mu\nu} \mathcal{G}^{\mu\nu})$$

$$\bar{q}_f = q_f^\dagger \gamma_0$$

$$\not{D} q_f = \gamma^\mu D_\mu q_f = \gamma^\mu (\partial_\mu + ig_3 A_\mu) q_f$$



- ▶ Eichgruppe der QCD



- ▶ Eichgruppe der QCD
- ▶ Menge aller unitären, unimodularen, 3×3 Matrizen U , d.h. $U^\dagger U = \mathbb{1}$ und $\det(U) = 1$



- ▶ Eichgruppe der QCD
- ▶ Menge aller unitären, unimodularen, 3×3 Matrizen U , d.h. $U^\dagger U = \mathbb{1}$ und $\det(U) = 1$
- ▶ Acht Generatoren



- ▶ Eichgruppe der QCD
- ▶ Menge aller unitären, unimodularen, 3×3 Matrizen U , d.h. $U^\dagger U = \mathbb{1}$ und $\det(U) = 1$
- ▶ Acht Generatoren
- ▶ Darstellung der Elemente in Exponentialdarstellung

$$U(\Theta) = \exp \left(-i \sum_{a=1}^8 \Theta_a \frac{\lambda_a}{2} \right)$$



Projektionsoperatoren

$$P_R = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \gamma_5) = P_R^\dagger, \quad P_L = \frac{1}{2}(\mathbb{1} - \gamma_5) = P_L^\dagger$$

Chiralitätsmatrix

$$\gamma_5 = \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \gamma_5^\dagger$$

Projektionsoperatoren

$$P_R = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \gamma_5) = P_R^\dagger, \quad P_L = \frac{1}{2}(\mathbb{1} - \gamma_5) = P_L^\dagger$$

Chiralitätsmatrix

$$\gamma_5 = \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \gamma_5^\dagger$$

Aufteilung des Quarkfeldes in chirale Komponenten

$$q_R = P_R q, \quad q_L = P_L q$$

Projektionsoperatoren

$$P_R = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \gamma_5) = P_R^\dagger, \quad P_L = \frac{1}{2}(\mathbb{1} - \gamma_5) = P_L^\dagger$$

Chiralitätsmatrix

$$\gamma_5 = \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \gamma_5^\dagger$$

Aufteilung des Quarkfeldes in chirale Komponenten

$$q_R = P_R q, \quad q_L = P_L q$$

$$\longrightarrow q = q_R + q_L$$



Für die Chiralitätsmatrix gilt

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0, \quad \gamma_5^2 = \mathbb{1}$$

Für die Chiralitätsmatrix gilt

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0, \quad \gamma_5^2 = \mathbb{1}$$

Vollständigkeitsrelation

$$P_R + P_L = \mathbb{1}$$

Für die Chiralitätsmatrix gilt

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0, \quad \gamma_5^2 = \mathbb{1}$$

Vollständigkeitsrelation

$$P_R + P_L = \mathbb{1}$$

Idempotenz

$$P_R^2 = P_R, \quad P_L^2 = P_L$$

Für die Chiralitätsmatrix gilt

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0, \quad \gamma_5^2 = \mathbb{1}$$

Vollständigkeitsrelation

$$P_R + P_L = \mathbb{1}$$

Idempotenz

$$P_R^2 = P_R, \quad P_L^2 = P_L$$

Orthogonalitätsrelation

$$P_R P_L = P_L P_R = 0$$

$$\begin{bmatrix} m_U & = & 2.2^{+0.5}_{-0.4} & \text{MeV} \\ m_D & = & 4.7^{+0.5}_{-0.3} & \text{MeV} \\ m_S & = & 95^{+9}_{-3} & \text{MeV} \end{bmatrix} \ll 1\text{GeV} < \begin{bmatrix} m_C & = & 1.275^{+0.025}_{-0.035} & \text{GeV} \\ m_B & = & 4.18^{+0.04}_{-0.03} & \text{GeV} \\ m_T & = & 173.0^{+0.4}_{-0.4} & \text{GeV} \end{bmatrix}$$

Particle Data Group (2018)

$$\begin{bmatrix} m_U & = & 2.2^{+0.5}_{-0.4} & \text{MeV} \\ m_D & = & 4.7^{+0.5}_{-0.3} & \text{MeV} \\ m_S & = & 95^{+9}_{-3} & \text{MeV} \end{bmatrix} \ll 1\text{GeV} < \begin{bmatrix} m_C & = & 1.275^{+0.025}_{-0.035} & \text{GeV} \\ m_B & = & 4.18^{+0.04}_{-0.03} & \text{GeV} \\ m_T & = & 173.0^{+0.4}_{-0.4} & \text{GeV} \end{bmatrix}$$

Particle Data Group (2018)

Chiraler Limes

$$m_U, m_D, m_S \rightarrow 0$$



$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \mathcal{L}_{\text{QCD}}^0 - \mathcal{L}_{\text{QCD}}^m + \dots$$

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \mathcal{L}_{\text{QCD}}^0 - \mathcal{L}_{\text{QCD}}^m + \dots$$

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}}^0 = \sum_{l=u,d,s} (\bar{q}_{R,l} i \not{D} q_{R,l} + \bar{q}_{L,l} i \not{D} q_{L,l}) - \frac{1}{2} \text{Tr}(\mathcal{G}_{\mu\nu} \mathcal{G}^{\mu\nu})$$

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \mathcal{L}_{\text{QCD}}^0 - \mathcal{L}_{\text{QCD}}^m + \dots$$

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}}^0 = \sum_{l=u,d,s} (\bar{q}_{R,l} i \not{D} q_{R,l} + \bar{q}_{L,l} i \not{D} q_{L,l}) - \frac{1}{2} \text{Tr}(\mathcal{G}_{\mu\nu} \mathcal{G}^{\mu\nu})$$

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}}^m = \sum_{l=u,d,s} (\bar{q}_{R,l} m_l q_{L,l} + \bar{q}_{L,l} m_l q_{R,l})$$

$\mathcal{L}_{\text{QCD}}^0$ ist **invariant** unter chiralen flavour Transformationen

$$q_{R,l} \mapsto U_R q_{R,l} = \exp\left(-i \sum_{a=1}^8 \Theta_{R,a} \frac{\lambda_a}{2}\right) \exp(-i\Theta_R) q_{R,l}$$

$$q_{L,l} \mapsto U_L q_{L,l} = \exp\left(-i \sum_{a=1}^8 \Theta_{L,a} \frac{\lambda_a}{2}\right) \exp(-i\Theta_L) q_{L,l}$$

Noether Theorem für Feldtheorien liefert erhaltene Ströme

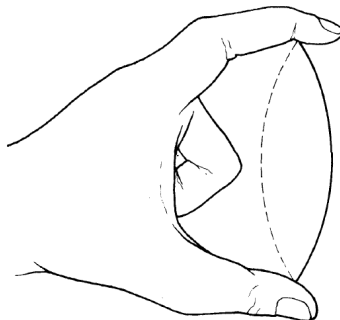
$$V_a^\mu = R_a^\mu + L_a^\mu = \bar{q} \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} q$$

$$A_a^\mu = R_a^\mu - L_a^\mu = \bar{q} \gamma^\mu \gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} q$$

für die chirale Symmetriegruppe $SU(3)_L \times SU(3)_R$

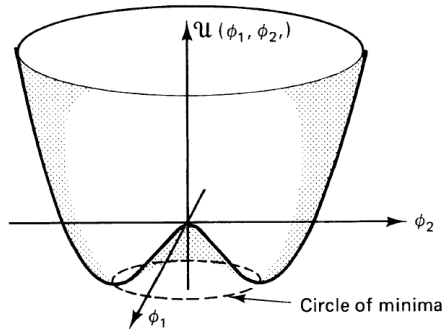
1. QCD Lagrangian im chiralen Limes
2. Spontane Brechung der chiralen Symmetrie
3. Explizite Brechung der chiralen Symmetrie

Grundzustände des zusammengedrückten Drahts



D. Griffiths (2004)

Sombrero Potential



D. Griffiths (2004)



- ▶ Chirale Symmetrie wird in der Goldstone Mode realisiert



- ▶ Chirale Symmetrie wird in der Goldstone Mode realisiert
- ▶ Muster der Symmetriebrechung

$$SU(3)_L \times SU(3)_R \xrightarrow{SSB} SU(3)_V$$

- ▶ Chirale Symmetrie wird in der Goldstone Mode realisiert
- ▶ Muster der Symmetriebrechung

$$SU(3)_L \times SU(3)_R \xrightarrow{SSB} SU(3)_V$$

- ▶ 8 masselose, pseudoscalare **Goldstone Bosonen** existieren

- ▶ Chirale Symmetrie wird in der Goldstone Mode realisiert
- ▶ Muster der Symmetriebrechung

$$SU(3)_L \times SU(3)_R \xrightarrow{SSB} SU(3)_V$$

- ▶ 8 masselose, pseudoscalare **Goldstone Bosonen** existieren
- ▶ Nicht-wechselwirkend bei verschwindender Energie

- ▶ Chirale Symmetrie wird in der Goldstone Mode realisiert
- ▶ Muster der Symmetriebrechung

$$SU(3)_L \times SU(3)_R \xrightarrow{SSB} SU(3)_V$$

- ▶ 8 masselose, pseudoscalare **Goldstone Bosonen** existieren
- ▶ Nicht-wechselwirkend bei verschwindender Energie
- ▶ Leichteste Hadronen im Hadronenspektrum

$$\pi^\pm, \pi^0, K^\pm, K^0, \bar{K}^0, \eta$$

- ▶ Chirale Symmetrie wird in der Goldstone Mode realisiert
- ▶ Muster der Symmetriebrechung

$$SU(3)_L \times SU(3)_R \xrightarrow{SSB} SU(3)_V$$

- ▶ 8 masselose, pseudoscalare **Goldstone Bosonen** existieren
- ▶ Nicht-wechselwirkend bei verschwindender Energie
- ▶ Leichteste Hadronen im Hadronenspektrum

$$\pi^\pm, \pi^0, K^\pm, K^0, \bar{K}^0, \eta$$

→ Wollen niederenergetische Theorie für diese Goldstone Bosonen.



Prinzip: entwickle den Lagrangian nach Massen und Impulsen

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^{(0)} + \mathcal{L}^{(2)} + \mathcal{L}^{(4)} + \dots$$

Prinzip: entwickle den Lagrangian nach Massen und Impulsen

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^{(0)} + \mathcal{L}^{(2)} + \mathcal{L}^{(4)} + \dots$$

Führender Term

$$\mathcal{L}^{(2)} = \frac{1}{4} F^2 \text{Tr}(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger)$$

$$U = \exp\left(\sum_{a=1}^8 \frac{i\lambda_a \phi_a}{F}\right)$$



Noether Ströme

$$V_a^\mu = i \frac{F^2}{4} \text{Tr}(\lambda_a [\partial^\mu U, U^\dagger])$$
$$A_a^\mu = i \frac{F^2}{4} \text{Tr}(\lambda_a \{ \partial^\mu U, U^\dagger \})$$

Noether Ströme

$$V_a^\mu = i \frac{F^2}{4} \text{Tr}(\lambda_a [\partial^\mu U, U^\dagger])$$

$$A_a^\mu = i \frac{F^2}{4} \text{Tr}(\lambda_a \{ \partial^\mu U, U^\dagger \})$$

Expandiere den Axialvektorstrom nach Ordnungen von ϕ

$$A_a^\mu = -F \partial^\mu \phi_a + \mathcal{O}(\phi^3)$$

Noether Ströme

$$V_a^\mu = i \frac{F^2}{4} \text{Tr}(\lambda_a [\partial^\mu U, U^\dagger])$$

$$A_a^\mu = i \frac{F^2}{4} \text{Tr}(\lambda_a \{ \partial^\mu U, U^\dagger \})$$

Expandiere den Axialvektorstrom nach Ordnungen von ϕ

$$A_a^\mu = -F \partial^\mu \phi_a + \mathcal{O}(\phi^3)$$

Berechne das Matrixelement

$$\langle 0 | A_a^\mu | \phi_b(p) \rangle = i p^\mu \delta_{ab} F$$

Noether Ströme

$$V_a^\mu = i \frac{F^2}{4} \text{Tr}(\lambda_a [\partial^\mu U, U^\dagger])$$

$$A_a^\mu = i \frac{F^2}{4} \text{Tr}(\lambda_a \{ \partial^\mu U, U^\dagger \})$$

Expandiere den Axialvektorstrom nach Ordnungen von ϕ

$$A_a^\mu = -F \partial^\mu \phi_a + \mathcal{O}(\phi^3)$$

Berechne das Matrixelement

$$\langle 0 | A_a^\mu | \phi_b(p) \rangle = i p^\mu \delta_{ab} F$$

Zerfallskonstante des Pions $F \approx F_\pi = 94.4 \text{ MeV}$

1. QCD Lagrangian im chiralen Limes
2. Spontane Brechung der chiralen Symmetrie
3. Explizite Brechung der chiralen Symmetrie



- ▶ Bislang chiralen Limes betrachtet



- ▶ Bislang chiralen Limes betrachtet
- ▶ Chirale Symmetrie durch massebehaftete Quarks explizit gebrochen



- ▶ Bislang chiralen Limes betrachtet
- ▶ Chirale Symmetrie durch massebehaftete Quarks explizit gebrochen
- ▶ Wiedereinführung der Quarkmassen als Störung



- ▶ Bislang chiralen Limes betrachtet
- ▶ Chirale Symmetrie durch massebehaftete Quarks explizit gebrochen
- ▶ Wiedereinführung der Quarkmassen als Störung
- ▶ Entwickle erneut nach Massen und Impulsen

$$\mathcal{L}^{(2)} = \frac{1}{4} F^2 \text{Tr} \left(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger + 2B(\mathcal{M}U^\dagger + \mathcal{M}^\dagger U) \right)$$

$$\mathcal{M} = \text{diag}(m_u, m_d, m_s)$$



Expandiere erneut nach Ordnungen von ϕ und erhalte

$$M_{\pi^\pm}^2 = B(m_u + m_d)$$

$$M_{K^\pm}^2 = B(m_u + m_s)$$

$$M_{K^0}^2 = B(m_d + m_s)$$

Gell-Mann-Oakes-Renner Relationen liefern

$$\frac{m_u}{m_d} = \frac{M_{K^\pm}^2 - M_{K^0}^2 + M_{\pi^\pm}^2}{M_{K^0}^2 - M_{K^\pm}^2 + M_{\pi^\pm}^2} \approx 0.66$$

$$\frac{m_s}{m_d} = \frac{M_{K^0}^2 + M_{K^\pm}^2 - M_{\pi^\pm}^2}{M_{K^0}^2 - M_{K^\pm}^2 + M_{\pi^\pm}^2} \approx 22$$



Gell-Mann-Oakes-Renner Relationen liefern

Aktuelle Werte

$$\frac{m_u}{m_d} = \frac{M_{K^\pm}^2 - M_{K^0}^2 + M_{\pi^\pm}^2}{M_{K^0}^2 - M_{K^\pm}^2 + M_{\pi^\pm}^2} \approx 0.66$$

$$\frac{m_u}{m_d} = 0.48^{+0.07}_{-0.08}$$

$$\frac{m_s}{m_d} = \frac{M_{K^0}^2 + M_{K^\pm}^2 - M_{\pi^\pm}^2}{M_{K^0}^2 - M_{K^\pm}^2 + M_{\pi^\pm}^2} \approx 22$$

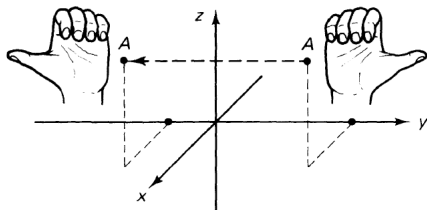
$$\frac{m_s}{m_d} = 17 - 22$$

Particle Data Group (2018)

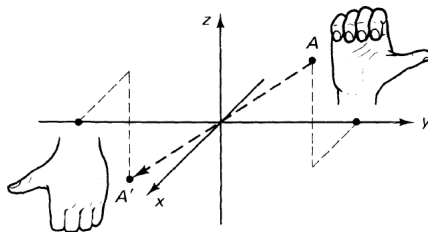
- ▶ B. Kubis, *An introduction to chiral perturbation theory* (2007)
- ▶ D. Griffiths, *Introduction to elementary particles*, (WILEY-VCH, 2004)
- ▶ S. Scherer, M. R. Schindler, *A primer for chiral perturbation theory*, (Springer, 2012)
- ▶ S. Scherer, *Introduction to chiral perturbation theory*, (2002)
- ▶ H. Sazdjian, *Introduction to chiral symmetry in QCD*, (2016)
- ▶ J. Gasser, H. Leutwyler, *Chiral perturbation theory: expansions in the mass of the strange quark*, (1984)



Anhang



(a) Reflection (in the x - z plane)
 $(x, y, z) \rightarrow (x, -y, z)$



(b) Inversion $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z)$

D. Griffiths (2004)

Quarkfeld transformiert unter Parität in sein paritäts-konjugiertes Feld

$$P : q(t, \vec{x}) \mapsto \gamma_0 q(t, -\vec{x})$$

Damit

$$q_R(t, \vec{x}) \mapsto P_R \gamma_0 q(t, -\vec{x}) = \gamma_0 P_L q(t, -\vec{x}) = \gamma_0 q_L(t, -\vec{x}) \neq \pm q_R(t, -\vec{x})$$

Analog für q_L

→ Chirale Komponenten transformieren unter Parität weder zum Original noch zu ihren Negativen