Elementarteilchenphysik

Priv.-Doz. Dr. M. Buballa
M. Schramm

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2015/16
5. Übungsblatt 22.1.2016

Aufgabe 14

Wir wollen den nichtrelativistischen Grenzfall der Dirac-Gleichung betrachten. Dazu nehmen wir an, dass die Dreierimpulse endlich ($\vec{p} \neq 0$) aber klein im Vergleich zur Masse sind ($|\vec{p}| \ll m$). Wir machen den Ansatz

$$\psi(\vec{r},t) = \begin{pmatrix} \varphi(\vec{r},t) \\ \chi(\vec{r},t) \end{pmatrix} e^{-imt},$$

wobei φ und χ zweikomponentige Felder sind, die sich im Vergleich zu e^{-imt} nur langsam mit der Zeit ändern

$$|i\frac{\partial \varphi}{\partial t}| \ll |m\varphi|, \qquad |i\frac{\partial \chi}{\partial t}| \ll |m\chi|.$$

a) Setzen Sie diesen Ansatz in die freie Dirac-Gleichung ein und lösen Sie nach den Zeitableitungen der Felder φ und χ auf.

b) Zeigen Sie, dass

$$\chi \approx \frac{1}{2im}\vec{\sigma}\vec{\nabla}\varphi$$

ist und sich damit für φ eine Gleichung ergibt, die der Schrödinger-Gleichung ähnelt.
Verwenden Sie $\sigma^i\sigma^j = \delta^{ij} + i\epsilon^{ijk}\sigma^k$.

Aufgabe 15

Die Dirac-Gleichung im elektromagnetischen Feld kann durch die minimale Substitution $p^\mu \to p^\mu - qA^\mu$ aus der freien Dirac-Gleichung gewonnen werden. Mit $A^\mu = \begin{pmatrix} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix}$ ergibt sich

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} - q\phi(\vec{r},t)\right)\psi(\vec{r},t) = \left[\vec{\alpha}\left(\frac{1}{i}\vec{\nabla} - q\vec{A}(\vec{r},t)\right) + \beta m\right]\psi(\vec{r},t),$$

wobei wir die Dirac-Gleichung hier wieder mit $\vec{\alpha}$ und β ausgedrückt haben.

a) Untersuchen Sie mit Hilfe des Ansatzes aus Aufgabe 14 den nichtrelativistischen Grenzfall der Gleichung für schwache Felder, d.h. $|\vec{p}| \ll m$, $q\phi \ll m$. Zeigen Sie, dass gilt

$$i\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left[\frac{1}{2m}\vec{\sigma}\left(\frac{1}{i}\vec{\nabla} - q\vec{A}\right)\vec{\sigma}\left(\frac{1}{i}\vec{\nabla} - q\vec{A}\right) + q\phi\right]\varphi.$$

b) Leiten Sie daraus die Pauli-Gleichung her

$$i\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left[\frac{\left(\frac{1}{i}\vec{\nabla} - q\vec{A}\right)^2}{2m} - \frac{q}{2m}\vec{\sigma}\vec{B} + q\phi\right]\varphi$$

Hinweis: Verwenden Sie $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ und $\sigma^i\sigma^j = \delta^{ij} + i\epsilon^{ijk}\sigma^k$.

c) Für den Fall eines homogenen Magnetfeldes kann man $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r}$ setzen (Beweis?). Ferner sei das Magnetfeld schwach, so dass Terme der Ordnung $\vec{B}^2$ vernachlässigt werden können. Zeigen Sie, dass die Pauli-Gleichung dann in die Form

$$i\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left[-\frac{\vec{\nabla}^2}{2m} - \frac{q}{2m}\left(\vec{L} + 2\vec{S}\right)\vec{B} + q\phi\right]\varphi$$

übergeht, wobei $\vec{L} = \vec{r} \times \frac{\vec{\nabla}}{i}$ und $\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}$ die nichtrelativistischen Bahndrehimpuls und Spinoperatoren sind.