Elementarteilchenphysik

Priv.-Doz. Dr. M. Buballa
M. Schramm

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

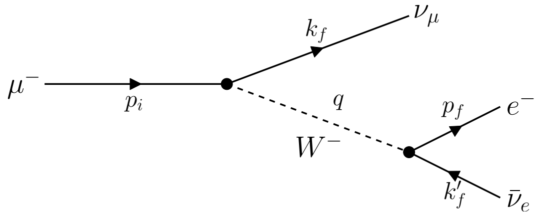
Wintersemester 2015/16
6. Übungsblatt 5.2.2016

Aufgabe 16

Wir betrachten den Zerfall des Myons. Dies ist ein schwacher Zerfall mit dem Hauptzerfallskanal

$$\mu^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$$

der 99% aller Zerfälle ausmacht.



a) Stellen Sie das invariante Übergangsmatrixelement auf. Die Vertices sind gegeben als

$$ig\gamma^\mu(1-\gamma_5)$$

und der W-Boson Propagator

$$D_{\mu\nu}(q) = \frac{g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu/m_W^2}{q^2 - m_W^2},$$

mit Kopplungskonstante g und W-Boson Masse m_W.

b) Da das W-Boson im Vergleich zum Myon sehr schwer ist $m_\mu/m_W \approx 0.1\text{GeV}/80\text{GeV} = 0.00125$ kann die schwache Wechselwirkung hier als Punktwechselwirkung angesehen werden. Machen Sie die Näherung $m_W^2 \gg q^2 \approx 0$ und ersetzen Sie Masse und Kopplung durch die Fermi-Kopplungskonstante $G_F/\sqrt{2} := g^2/m_W^2$.

c) Stellen Sie $|\mathscr{M}_{fi}|^2$ unter obiger Näherung auf. Zeigen Sie, dass

$$\overline{|\mathscr{M}_{fi}|^2} = \frac{1}{2}\sum_{s_1,s_2,s_3,s_4} |\mathscr{M}_{fi}|^2 = \frac{G_F^2}{4} M^{\mu\nu} E_{\mu\nu},$$
$$M^{\mu\nu} = \mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu(1-\gamma_5)(\not{p}_i + m_\mu)\gamma^\nu(1-\gamma_5)\not{k}_f\right],$$
$$E_{\mu\nu} = \mathrm{Tr}\left[\gamma_\mu(1-\gamma_5)\not{k}'_f\gamma_\nu(1-\gamma_5)(\not{p}_f + m_e)\right]$$

gilt, wenn man über die Polarisation des Myons mittelt und über die Polarisation der auslaufenden Teilchen summiert.
Da wir hier mit Neutrinos, also masselosen Fermionen, arbeiten, verwenden wir eine andere Normierung, so dass

$$\sum_s u(p)\bar{u}(p) = \not{p} + m \qquad \text{Für massebehaftete Teilchen}$$
$$\sum_s u(k)\bar{u}(k) = \not{k} \qquad \text{Für masselose Teilchen.}$$

d) Werten Sie die Spuren aus. Sie sollten

$$\overline{|\mathcal{M}_{fi}|^2} = 64 G_F^2 (k_f \cdot p_f)(k'_f \cdot p_i)$$

erhalten. Vereinfachen Sie diesen Ausdruck weiter indem Sie im Ruhesystem des Myons arbeiten ($p_i = (m_\mu, \vec{0})^T$) und die Elektronmasse vernachlässigen.
Hinweis: $\epsilon^{\mu\rho\nu\sigma}\epsilon_{\mu\rho'\nu\sigma'} = -2\delta^\rho_{\rho'}\delta^\sigma_{\sigma'} + 2\delta^\rho_{\sigma'}\delta^\sigma_{\rho'}$

Mit obigen Näherungen kann man die Zerfallsrate mit

$$\Gamma = \frac{1}{2m_\mu}\int \frac{d^3p_f}{(2\pi)^3 2E_f}\frac{d^3k_f}{(2\pi)^3 2\omega}\frac{d^3k'_f}{(2\pi)^3 2\omega'}(2\pi)^4\delta^4\left(p_i - p_f - k_f - k'_f\right)\left(32 G_F^2 (m_\mu - 2\omega') m_\mu^2 \omega'\right)$$

berechnen, wobei ω die Energie von ν_μ, ω' die Energie von $\bar{\nu}_e$ und E_f die Energie des Elektrons ist.

e) Beweisen Sie die Identität

$$\int \frac{d^3k_f}{2\omega} = \int d^4k_f\,\theta(k_f^0)\delta(k_f^2),$$

setzen Sie dies in die Zerfallsrate ein und führen Sie die Integration über k_f aus.

Das Argument der daraus resultierenden δ-Funktion kann man umschreiben zu

$$(p_i - p_f - k'_f)^2 = m_\mu^2 - 2m_\mu E_f - 2m_\mu\omega' + 2E_f\omega'(1 - \cos\theta),$$

mit dem Winkel θ zwischen den Teilchen e^- und $\bar{\nu}_e$. Die Integrationen $d^3p_f\,d^3k'_f$ kann man in Kugelkoordinaten ausdrücken

$$d^3p_f\,d^3k'_f = 4\pi E_f^2 dE_f\,2\pi\omega'^2 d\omega' d\cos\theta.$$

Durch Auswerten der Integration über θ vereinfacht sich die Zerfallsrate zu

$$\Gamma = \frac{G_F^2}{2\pi^3}\int_0^{m_\mu/2} dE_f \int_{m_\mu/2-E_f}^{m_\mu/2} d\omega' m_\mu \omega'(m_\mu - 2\omega').$$

f) Führen Sie die Integration über E_f und ω' aus.

g) Berechnen Sie die Lebensdauer des Myons mit der Fermi-Kopplungskonstante $G_F = 1,166 \times 10^{-5}\text{GeV}^{-2}$ und der Myonmasse $m_\mu = 0,1057$ GeV. Vergleichen Sie ihr Ergebnis mit dem experimentellen Wert $\tau = 2,20 \times 10^{-6}$ s