Bestimmung von α^k und β

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Bestimmung von α^k und β

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Eigenschaften:
  i) H_D hermitesch $\Rightarrow$ α^k, β hermitesch

Bestimmung von α^k und β

- Eigenschaften:
  i) H_D hermitesch $\Rightarrow$ α^k, β hermitesch
  ii) ${\alpha^k}^2 = \beta^2 = 1$ $\Rightarrow$ Eigenwerte $= \pm 1$

Bestimmung von α^k und β

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Eigenschaften:
  - i) H_D hermitesch $\Rightarrow$ α^k, β hermitesch
  - ii) ${\alpha^k}^2 = \beta^2 = 1$ $\Rightarrow$ Eigenwerte $= \pm 1$
  - iii) $\mathrm{tr}\,\alpha^k = \mathrm{tr}\,\beta = 0$

Bestimmung von α^k und β

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Eigenschaften:

  i) H_D hermitesch $\Rightarrow$ α^k, β hermitesch

  ii) ${\alpha^k}^2 = \beta^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad$ Eigenwerte $= \pm 1$

  iii) $\mathrm{tr}\,\alpha^k = \mathrm{tr}\,\beta = 0$

  z.B.: $\mathrm{tr}\,\alpha^k \stackrel{\beta^2=1}{=} \mathrm{tr}[\alpha^k \beta\beta]$

Bestimmung von α^k und β

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Eigenschaften:

  i) H_D hermitesch $\Rightarrow$ α^k, β hermitesch

  ii) ${\alpha^k}^2 = \beta^2 = 1$ $\Rightarrow$ Eigenwerte $= \pm 1$

  iii) $\mathrm{tr}\,\alpha^k = \mathrm{tr}\,\beta = 0$

  z.B.: $\mathrm{tr}\,\alpha^k \overset{\beta^2=1}{=} \mathrm{tr}[\alpha^k\beta\beta] \overset{\text{zykl. Vert.}}{=} \mathrm{tr}[\beta\alpha^k\beta]$

Bestimmung von α^k und β

- Eigenschaften:

  i) H_D hermitesch $\Rightarrow$ α^k, β hermitesch

  ii) ${\alpha^k}^2 = \beta^2 = 1$ $\Rightarrow$ Eigenwerte $= \pm 1$

  iii) $\mathrm{tr}\,\alpha^k = \mathrm{tr}\,\beta = 0$

  z.B.: $\mathrm{tr}\,\alpha^k \overset{\beta^2=1}{=} \mathrm{tr}[\alpha^k\beta\beta] \overset{\text{zykl. Vert.}}{=} \mathrm{tr}[\beta\alpha^k\beta] \overset{\{\alpha^k,\beta\}=0}{=} -\mathrm{tr}[\alpha^k\beta\beta]$

Bestimmung von α^k und β

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Eigenschaften:
  - i) H_D hermitesch $\Rightarrow$ α^k, β hermitesch
  - ii) ${\alpha^k}^2 = \beta^2 = 1$ $\Rightarrow$ Eigenwerte $= \pm 1$
  - iii) $\mathrm{tr}\,\alpha^k = \mathrm{tr}\,\beta = 0$

    z.B.: $\mathrm{tr}\,\alpha^k \overset{\beta^2=1}{=} \mathrm{tr}[\alpha^k\beta\beta] \overset{\text{zykl. Vert.}}{=} \mathrm{tr}[\beta\alpha^k\beta] \overset{\{\alpha^k,\beta\}=0}{=} -\mathrm{tr}[\alpha^k\beta\beta] = -\mathrm{tr}\,\alpha^k$

Bestimmung von α^k und β

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Eigenschaften:

  i) H_D hermitesch $\Rightarrow$ α^k, β hermitesch

  ii) ${\alpha^k}^2 = \beta^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad$ Eigenwerte $= \pm 1$

  iii) $\mathrm{tr}\,\alpha^k = \mathrm{tr}\,\beta = 0$

  z.B.: $\mathrm{tr}\,\alpha^k \overset{\beta^2=1}{=} \mathrm{tr}[\alpha^k\beta\beta] \overset{\text{zykl. Vert.}}{=} \mathrm{tr}[\beta\alpha^k\beta] \overset{\{\alpha^k,\beta\}=0}{=} -\,\mathrm{tr}[\alpha^k\beta\beta] = -\mathrm{tr}\,\alpha^k$

  $\Rightarrow \quad \mathrm{tr}\,\alpha^k = 0$

Bestimmung von α^k und β

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Eigenschaften:
  - i) H_D hermitesch $\Rightarrow$ α^k, β hermitesch
  - ii) ${\alpha^k}^2 = \beta^2 = 1$ $\Rightarrow$ Eigenwerte $= \pm 1$
  - iii) $\mathrm{tr}\,\alpha^k = \mathrm{tr}\,\beta = 0$

    z.B.: $\mathrm{tr}\,\alpha^k \overset{\beta^2=1}{=} \mathrm{tr}[\alpha^k\beta\beta] \overset{\text{zykl. Vert.}}{=} \mathrm{tr}[\beta\alpha^k\beta] \overset{\{\alpha^k,\beta\}=0}{=} -\mathrm{tr}[\alpha^k\beta\beta] = -\mathrm{tr}\,\alpha^k$

    $\Rightarrow$ $\mathrm{tr}\,\alpha^k = 0$
  - iv) Da die verschiedenen α^k untereinander und mit β antikommutieren, müssen sie linear unabhängig sein.

Bestimmung von α^k und β

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Eigenschaften:
  i) H_D hermitesch $\Rightarrow$ α^k, β hermitesch

  ii) ${\alpha^k}^2 = \beta^2 = 1$ $\Rightarrow$ Eigenwerte $= \pm 1$

  iii) $\mathrm{tr}\,\alpha^k = \mathrm{tr}\,\beta = 0$

  z.B.: $\mathrm{tr}\,\alpha^k \overset{\beta^2=1}{=} \mathrm{tr}[\alpha^k\beta\beta] \overset{\text{zykl. Vert.}}{=} \mathrm{tr}[\beta\alpha^k\beta] \overset{\{\alpha^k,\beta\}=0}{=} -\mathrm{tr}[\alpha^k\beta\beta] = -\mathrm{tr}\,\alpha^k$

  $\Rightarrow$ $\mathrm{tr}\,\alpha^k = 0$

  iv) Da die verschiedenen α^k untereinander und mit β antikommutieren, müssen sie linear unabhängig sein.

$\Rightarrow$ Suche vier linear unabhängige hermitesche Matrizen mit Spur null.

Bestimmung von α^k und β

- Eigenschaften:
  i) H_D hermitesch $\Rightarrow$ α^k, β hermitesch

  ii) ${\alpha^k}^2 = \beta^2 = 1$ $\Rightarrow$ Eigenwerte $= \pm 1$

  iii) $\mathrm{tr}\,\alpha^k = \mathrm{tr}\,\beta = 0$

  z.B.: $\mathrm{tr}\,\alpha^k \overset{\beta^2=1}{=} \mathrm{tr}[\alpha^k\beta\beta] \overset{\text{zykl. Vert.}}{=} \mathrm{tr}[\beta\alpha^k\beta] \overset{\{\alpha^k,\beta\}=0}{=} -\mathrm{tr}[\alpha^k\beta\beta] = -\mathrm{tr}\,\alpha^k$

  $\Rightarrow$ $\mathrm{tr}\,\alpha^k = 0$

  iv) Da die verschiedenen α^k untereinander und mit β antikommutieren, müssen sie linear unabhängig sein.

  $\Rightarrow$ Suche vier linear unabhängige hermitesche Matrizen mit Spur null.

- Allgemein: $N^2 - 1$ lin. unabh. hermitesche $N \times N$-Matrizen mit Spur null.

Bestimmung von α^k und β

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Eigenschaften:
  - i) H_D hermitesch $\Rightarrow$ α^k, β hermitesch
  - ii) ${\alpha^k}^2 = \beta^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad$ Eigenwerte $= \pm 1$
  - iii) $\mathrm{tr}\,\alpha^k = \mathrm{tr}\,\beta = 0$

    z.B.: $\mathrm{tr}\,\alpha^k \overset{\beta^2=1}{=} \mathrm{tr}[\alpha^k\beta\beta] \overset{\text{zykl. Vert.}}{=} \mathrm{tr}[\beta\alpha^k\beta] \overset{\{\alpha^k,\beta\}=0}{=} -\mathrm{tr}[\alpha^k\beta\beta] = -\mathrm{tr}\,\alpha^k$

    $\Rightarrow \quad \mathrm{tr}\,\alpha^k = 0$
  - iv) Da die verschiedenen α^k untereinander und mit β antikommutieren, müssen sie linear unabhängig sein.

  $\Rightarrow$ Suche vier linear unabhängige hermitesche Matrizen mit Spur null.
- Allgemein: $N^2 - 1$ lin. unabh. hermitesche $N \times N$-Matrizen mit Spur null.
- Spur = Summe der Eigenwerte $\Rightarrow$ N gerade

- $N = 2 \;\Rightarrow\;$ nur $N^2 - 1 = 3$ solche Matrizen

- $N = 2 \Rightarrow$ nur $N^2 - 1 = 3$ solche Matrizen,

  z.B. Pauli-Matrizen: $\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

- $N = 2 \;\Rightarrow\;$ nur $N^2 - 1 = 3$ solche Matrizen,

  z.B. Pauli-Matrizen: $\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

- kleinst mögliche Dimension: $N = 4$

- $N = 2 \;\Rightarrow\;$ nur $N^2 - 1 = 3$ solche Matrizen,

  z.B. Pauli-Matrizen: $\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

- kleinst mögliche Dimension: $N = 4$

- spezielle Wahl („Standarddarstellung", „Dirac-Darstellung"):

$$\alpha^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \qquad \text{(in } 2 \times 2 \text{ Blockschreibweise)}$$

- $N = 2 \;\Rightarrow\;$ nur $N^2 - 1 = 3$ solche Matrizen,

  z.B. Pauli-Matrizen: $\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

- kleinst mögliche Dimension: $N = 4$

- spezielle Wahl („Standarddarstellung”, „Dirac-Darstellung”):

$$\alpha^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \qquad \text{(in } 2 \times 2 \text{ Blockschreibweise)}$$

- Es gibt unendlich viele andere mögliche Darstellungen.

- Observable sind aber von der Wahl der Darstellung unabhängig.

- $H_\mathrm{D} = \left(\frac{\hbar c}{i}\,\alpha^k \partial_k + \beta m c^2\right)$, $\quad \alpha^k, \beta$: 4 × 4-Matrizen

  → Wellenfunktion $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$ „Dirac-Spinor"

- $H_D = \left(\frac{\hbar c}{i}\,\alpha^k \partial_k + \beta m c^2\right)$, $\quad \alpha^k, \beta$: 4×4-Matrizen

  → Wellenfunktion $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$ „Dirac-Spinor"

- kein Vierervektor!

- $H_\mathrm{D} = \left(\frac{\hbar c}{i}\,\alpha^k \partial_k + \beta m c^2\right), \qquad \alpha^k, \beta$: 4×4-Matrizen

  → Wellenfunktion $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$ „Dirac-Spinor"

- kein Vierervektor!

- Zahl der Komponenten hängt zwar von der Raumzeitdimension ab, ist aber nicht unbedingt identisch:

  D Raumzeitdimensionen

  → D linear unabh. spurlose hermitesche $N \times N$-Matrizen

  → $N^2 - 1 \geq D$

- $H_\mathrm{D} = \left(\frac{\hbar c}{i}\,\alpha^k \partial_k + \beta m c^2\right), \quad \alpha^k, \beta$: 4×4-Matrizen

  $\rightarrow$ Wellenfunktion $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$ „Dirac-Spinor”

- kein Vierervektor!

- Zahl der Komponenten hängt zwar von der Raumzeitdimension ab, ist aber nicht unbedingt identisch:

  D Raumzeitdimensionen

  $\rightarrow$ D linear unabh. spurlose hermitesche $N \times N$-Matrizen

  $\rightarrow$ $N^2 - 1 \geq D$

  Beispiel: $D = 3 \rightarrow N = 2$, z.B. α^k, β: Pauli-Matrizen

Kontinuitätsgleichung

Kontinuitätsgleichung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- hermitesch adjungierter Spinor: $\psi^\dagger = \left(\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*, \psi_4^*\right)$

Kontinuitätsgleichung

- hermitesch adjungierter Spinor: $\psi^\dagger = \left(\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*, \psi_4^*\right)$
- Kurzschreibweise: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} \equiv \alpha^k \partial_k$

$\rightarrow$ Dirac-Gleichung: $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \left(\frac{\hbar c}{i} \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m c^2\right) \psi$

Kontinuitätsgleichung

- hermitesch adjungierter Spinor: $\psi^\dagger = \left(\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*, \psi_4^*\right)$
- Kurzschreibweise: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} \equiv \alpha^k \partial_k$

  ➞ Dirac-Gleichung: $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \left(\frac{\hbar c}{i} \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta mc^2\right) \psi$

- hermitesch adjungierte Gleichung:

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi^\dagger = \left(-\frac{\hbar c}{i} (\vec{\nabla}\psi^\dagger) \cdot \vec{\alpha} + mc^2 \psi^\dagger \beta\right)$$

Kontinuitätsgleichung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- hermitesch adjungierter Spinor: $\psi^\dagger = \left(\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*, \psi_4^*\right)$
- Kurzschreibweise: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} \equiv \alpha^k \partial_k$

$\rightarrow$ Dirac-Gleichung:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \left(\frac{\hbar c}{i} \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m c^2\right) \psi \qquad \Big| \; \frac{1}{i\hbar}\psi^\dagger \times$$

- hermitesch adjungierte Gleichung:

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi^\dagger = \left(-\frac{\hbar c}{i} (\vec{\nabla}\psi^\dagger) \cdot \vec{\alpha} + m c^2 \psi^\dagger \beta\right) \qquad \Big| \; \times -\frac{1}{i\hbar}\psi$$

$$\Rightarrow \quad \psi^\dagger \frac{\partial}{\partial t} \psi + \left(\frac{\partial}{\partial t} \psi^\dagger\right) \psi = -c\psi^\dagger \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}\psi - c(\vec{\nabla}\psi^\dagger) \cdot \vec{\alpha}\, \psi$$

Kontinuitätsgleichung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- hermitesch adjungierter Spinor: $\psi^\dagger \;=\; \left(\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*, \psi_4^*\right)$
- Kurzschreibweise: $\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} \equiv \alpha^k \partial_k$

→ Dirac-Gleichung: $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi \;=\; \left(\frac{\hbar c}{i}\,\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} + \beta mc^2\right)\psi \qquad \Big|\; \frac{1}{i\hbar}\psi^\dagger \times$

- hermitesch adjungierte Gleichung:

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi^\dagger \;=\; \left(-\frac{\hbar c}{i}\,(\vec{\nabla}\psi^\dagger)\cdot\vec{\alpha} + mc^2\psi^\dagger\,\beta\right) \qquad \Big|\; \times\; -\frac{1}{i\hbar}\psi$$

$$\Rightarrow \quad \psi^\dagger\,\frac{\partial}{\partial t}\psi + \left(\frac{\partial}{\partial t}\psi^\dagger\right)\psi \;=\; -c\psi^\dagger\,\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}\psi - c(\vec{\nabla}\psi^\dagger)\cdot\vec{\alpha}\,\psi$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\psi^\dagger\psi\right) \;=\; -\vec{\nabla}\cdot\left(c\psi^\dagger\,\vec{\alpha}\,\psi\right)$$

Kontinuitätsgleichung

- hermitesch adjungierter Spinor: $\psi^\dagger = \left(\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*, \psi_4^*\right)$
- Kurzschreibweise: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} \equiv \alpha^k \partial_k$

→ Dirac-Gleichung: $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \left(\frac{\hbar c}{i} \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m c^2\right) \psi \quad \Big| \; \frac{1}{i\hbar}\psi^\dagger \times$

- hermitesch adjungierte Gleichung:

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi^\dagger = \left(-\frac{\hbar c}{i} (\vec{\nabla}\psi^\dagger) \cdot \vec{\alpha} + m c^2 \psi^\dagger \beta\right) \quad \Big| \; \times -\frac{1}{i\hbar}\psi$$

$$\Rightarrow \quad \psi^\dagger \frac{\partial}{\partial t} \psi + \left(\frac{\partial}{\partial t} \psi^\dagger\right) \psi = -c\psi^\dagger \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}\psi - c(\vec{\nabla}\psi^\dagger) \cdot \vec{\alpha}\,\psi$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\psi^\dagger \psi\right) = -\vec{\nabla} \cdot \left(c\psi^\dagger \vec{\alpha}\,\psi\right)$$

→ Kontinuitätsgleichung: $\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0}$ mit

$$\rho = \psi^\dagger \psi, \qquad \vec{j} = c\,\psi^\dagger \vec{\alpha}\,\psi$$

Wahrscheinlichkeitsinterpretation

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

- Wahrscheinlichkeitsdichte:

  $$\rho = \psi^\dagger \psi = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_3|^2 + |\psi_4|^2 \geq 0 \quad \checkmark$$

Wahrscheinlichkeitsinterpretation

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

- Wahrscheinlichkeitsdichte:

  $\rho = \psi^\dagger \psi = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_3|^2 + |\psi_4|^2 \geq 0 \quad \checkmark$

- Wahrscheinlichkeitsstromdichte: $\vec{j} = c\, \psi^\dagger\, \vec{\alpha}\, \psi$

Wahrscheinlichkeitsinterpretation

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Wahrscheinlichkeitsdichte:

  $$\rho \;=\; \psi^\dagger \psi \;=\; |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_3|^2 + |\psi_4|^2 \geq 0 \qquad \checkmark$$

- Wahrscheinlichkeitsstromdichte: $\vec{j} \;=\; c\,\psi^\dagger\,\vec{\alpha}\,\psi$

  Interpretation:

  $$\vec{v} \;=\; \frac{d\vec{x}}{dt} \;=\; \frac{1}{i\hbar}\left[\vec{x}, H\right] \qquad \text{(Heisenberg-Bild)}$$

  ausgewertet für $H = H_\mathrm{D}$:

  $$v^k \;=\; \frac{1}{i\hbar}\left[x^k, \frac{\hbar c}{i}\,\alpha^l \partial_l + \beta m c^2\right] \;=\; -c\alpha^l \underbrace{\left[x^k, \partial_l\right]}_{=-\delta^k_l} \;=\; c\alpha^k$$

  $$\Rightarrow \quad \vec{v} \;=\; c\vec{\alpha}$$

  $$\Rightarrow \quad \vec{j} \;=\; \psi^\dagger\,\vec{v}\,\psi$$

Wahrscheinlichkeitsinterpretation

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$\rho = \psi^\dagger \psi = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_3|^2 + |\psi_4|^2 \geq 0 \quad \checkmark$$

- Wahrscheinlichkeitsstromdichte: $\vec{j} = c\,\psi^\dagger\,\vec{\alpha}\,\psi$

Interpretation:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\left[\vec{x}, H\right] \qquad \text{(Heisenberg-Bild)}$$

ausgewertet für $H = H_\text{D}$:

$$v^k = \frac{1}{i\hbar}\left[x^k, \frac{\hbar c}{i}\,\alpha^l \partial_l + \beta mc^2\right] = -c\alpha^l \underbrace{\left[x^k, \partial_l\right]}_{=-\delta^k_l} = c\alpha^k$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v} = c\vec{\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{j} = \psi^\dagger\,\vec{v}\,\psi \qquad \text{(vgl. klassische Punktladung: } \vec{j} = \rho\vec{v}\text{)}$$

2.6 Dirac-Gleichung in kovarianter Form

2.6 Dirac-Gleichung in kovarianter Form

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Dirac-Gleichung: $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left(\frac{\hbar c}{i}\,\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} + \beta mc^2\right)\psi$

2.6 Dirac-Gleichung in kovarianter Form

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Dirac-Gleichung: $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left(\frac{\hbar c}{i}\,\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} + \beta mc^2\right)\psi$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial t} + i\alpha^k\partial_k - \frac{mc}{\hbar}\beta\right)\psi = 0$$

2.6 Dirac-Gleichung in kovarianter Form

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Dirac-Gleichung: $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left(\frac{\hbar c}{i}\,\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} + \beta mc^2\right)\psi$

$$\Leftrightarrow \quad \left(i\partial_0 + i\alpha^k\partial_k - \frac{mc}{\hbar}\beta\right)\psi = 0$$

2.6 Dirac-Gleichung in kovarianter Form

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Dirac-Gleichung: $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left(\frac{\hbar c}{i}\,\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} + \beta mc^2\right)\psi$

$$\Leftrightarrow \quad \left(i\partial_0 + i\alpha^k\partial_k - \frac{mc}{\hbar}\beta\right)\psi = 0 \qquad \mid \beta\times$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(i\beta\partial_0 + i\beta\alpha^k\partial_k - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi = 0$$

2.6 Dirac-Gleichung in kovarianter Form

- Dirac-Gleichung: $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left(\frac{\hbar c}{i}\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} + \beta mc^2\right)\psi$

$$\Leftrightarrow \quad \left(i\partial_0 + i\alpha^k\partial_k - \frac{mc}{\hbar}\beta\right)\psi = 0 \qquad | \; \beta\times$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(i\beta\partial_0 + i\beta\alpha^k\partial_k - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi = 0$$

- Def.: $\boxed{\gamma^0 \equiv \beta\,, \qquad \gamma^k \equiv \beta\alpha^k}$ „γ-Matrizen"

$$\Rightarrow \quad \left(i\gamma^0\partial_0 + i\gamma^k\partial_k - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi = 0$$

2.6 Dirac-Gleichung in kovarianter Form

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Dirac-Gleichung: $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left(\frac{\hbar c}{i}\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} + \beta mc^2\right)\psi$

$$\Leftrightarrow \left(i\partial_0 + i\alpha^k\partial_k - \frac{mc}{\hbar}\beta\right)\psi = 0 \qquad |\ \beta\times$$

$$\Leftrightarrow \left(i\beta\partial_0 + i\beta\alpha^k\partial_k - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi = 0$$

- Def.: $\boxed{\gamma^0 \equiv \beta\,, \qquad \gamma^k \equiv \beta\alpha^k}$ „γ-Matrizen"

$$\Rightarrow \left(i\gamma^0\partial_0 + i\gamma^k\partial_k - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi = 0}$$ Dirac-Gleichung in kovarianter Form

2.6 Dirac-Gleichung in kovarianter Form

- Dirac-Gleichung: $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left(\frac{\hbar c}{i}\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} + \beta mc^2\right)\psi$

$$\Leftrightarrow \quad \left(i\partial_0 + i\alpha^k\partial_k - \frac{mc}{\hbar}\beta\right)\psi = 0 \qquad | \, \beta\times$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(i\beta\partial_0 + i\beta\alpha^k\partial_k - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi = 0$$

- Def.: $\boxed{\gamma^0 \equiv \beta, \qquad \gamma^k \equiv \beta\alpha^k}$ „γ-Matrizen”

$$\Rightarrow \quad \left(i\gamma^0\partial_0 + i\gamma^k\partial_k - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi = 0}$$ Dirac-Gleichung in kovarianter Form

(Die genauen Transformationseigenschaften werden wir noch untersuchen.)

2.6 Dirac-Gleichung in kovarianter Form

- Dirac-Gleichung: $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left(\frac{\hbar c}{i}\,\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} + \beta mc^2\right)\psi$

$$\Leftrightarrow \quad \left(i\partial_0 + i\alpha^k\partial_k - \frac{mc}{\hbar}\beta\right)\psi = 0 \qquad \mid \beta\times$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(i\beta\partial_0 + i\beta\alpha^k\partial_k - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi = 0$$

- Def.: $\boxed{\gamma^0 \equiv \beta\,, \qquad \gamma^k \equiv \beta\alpha^k}$ „γ-Matrizen”

$$\Rightarrow \quad \left(i\gamma^0\partial_0 + i\gamma^k\partial_k - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi = 0}$$ Dirac-Gleichung in kovarianter Form

(Die genauen Transformationseigenschaften werden wir noch untersuchen.)

- „Feynman-Slash”: $\not{a} \equiv \gamma^\mu a_\mu$ für beliebige Vierervektoren (a^μ)

2.6 Dirac-Gleichung in kovarianter Form

- Dirac-Gleichung: $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left(\frac{\hbar c}{i}\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} + \beta mc^2\right)\psi$

$$\Leftrightarrow \quad \left(i\partial_0 + i\alpha^k\partial_k - \frac{mc}{\hbar}\beta\right)\psi = 0 \qquad |\ \beta\times$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(i\beta\partial_0 + i\beta\alpha^k\partial_k - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi = 0$$

- Def.: $\boxed{\gamma^0 \equiv \beta, \qquad \gamma^k \equiv \beta\alpha^k}$ „γ-Matrizen"

$$\Rightarrow \quad \left(i\gamma^0\partial_0 + i\gamma^k\partial_k - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi = 0}$$ Dirac-Gleichung in kovarianter Form

(Die genauen Transformationseigenschaften werden wir noch untersuchen.)

- „Feynman-Slash": $\not{a} \equiv \gamma^\mu a_\mu$ für beliebige Vierervektoren (a^μ)

$$\Rightarrow \quad \boxed{\left(i\not{\partial} - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi = 0}$$

Eigenschaften der γ-Matrizen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Erinnerung: $\gamma^0 = \beta, \quad \gamma^k = \beta\alpha^k$

  $\alpha^{k\dagger} = \alpha^k, \quad \beta^\dagger = \beta, \quad \{\alpha^k, \alpha^l\} = 2\delta^{kl}, \; \{\alpha^k, \beta\} = 0, \; \beta^2 = 1$

Eigenschaften der γ-Matrizen

- Erinnerung: $\gamma^0 = \beta, \quad \gamma^k = \beta\alpha^k$

$$\alpha^{k\dagger} = \alpha^k, \quad \beta^\dagger = \beta, \quad \{\alpha^k, \alpha^l\} = 2\delta^{kl}, \; \{\alpha^k, \beta\} = 0, \; \beta^2 = 1$$

- Hermitezität:

$$\Rightarrow \quad \gamma^{0\dagger} = \beta^\dagger = \beta = \gamma^0 \quad \text{hermitesch}$$

$$\gamma^{k\dagger} = \left(\beta\alpha^k\right)^\dagger = \alpha^{k\dagger}\beta^\dagger = \alpha^k\beta = -\beta\alpha^k = -\gamma^k \quad \text{anti-hermitesch}$$

Eigenschaften der γ-Matrizen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Erinnerung: $\gamma^0 = \beta, \quad \gamma^k = \beta\alpha^k$

$$\alpha^{k\dagger} = \alpha^k, \quad \beta^\dagger = \beta, \quad \{\alpha^k, \alpha^l\} = 2\delta^{kl}, \; \{\alpha^k, \beta\} = 0, \; \beta^2 = 1$$

- Hermitezität:

$$\Rightarrow \quad \gamma^{0\dagger} = \beta^\dagger = \beta = \gamma^0 \quad \text{hermitesch}$$

$$\gamma^{k\dagger} = \left(\beta\alpha^k\right)^\dagger = \alpha^{k\dagger}\beta^\dagger = \alpha^k\beta = -\beta\alpha^k = -\gamma^k \quad \text{anti-hermitesch}$$

- Antivertauschungsrelationen: $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$

Eigenschaften der γ-Matrizen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Erinnerung: $\gamma^0 = \beta, \quad \gamma^k = \beta\alpha^k$

$$\alpha^{k\,\dagger} = \alpha^k, \quad \beta^\dagger = \beta, \quad \{\alpha^k, \alpha^l\} = 2\delta^{kl}, \; \{\alpha^k, \beta\} = 0, \; \beta^2 = 1$$

- Hermitezität:

$\Rightarrow \quad \gamma^{0\,\dagger} = \beta^\dagger = \beta = \gamma^0$ hermitesch

$\gamma^{k\,\dagger} = \left(\beta\alpha^k\right)^\dagger = \alpha^{k\,\dagger}\beta^\dagger = \alpha^k\beta = -\beta\alpha^k = -\gamma^k$ anti-hermitesch

- Antivertauschungsrelationen: $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$
- explizite Form in der Dirac-Darstellung:

$$\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} 1\!\!1 & 0 \\ 0 & -1\!\!1 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^k = \beta\alpha^k = \begin{pmatrix} 1\!\!1 & 0 \\ 0 & -1\!\!1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix}$$

Kontinuitätsgleichung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Kontinuitätsgleichung

Dirac-Gleichung: $\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right) \psi = 0$

Kontinuitätsgleichung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Dirac-Gleichung: $\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi = 0$

$$\Rightarrow \quad 0 = -i\partial_\mu\,\psi^\dagger\gamma^{\mu\,\dagger} - \psi^\dagger\,\frac{mc}{\hbar} \equiv \psi^\dagger\left(-i\gamma^{\mu\,\dagger}\overleftarrow{\partial}_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right)$$

Kontinuitätsgleichung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Dirac-Gleichung: $\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi = 0$

$$\Rightarrow \quad 0 = -i\partial_\mu \psi^\dagger \gamma^{\mu\dagger} - \psi^\dagger \frac{mc}{\hbar} \equiv \psi^\dagger \left(-i\gamma^{\mu\dagger}\overleftarrow{\partial}_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right) \qquad \Big| \times \gamma^0$$

$$\Rightarrow \quad \psi^\dagger \left(-i\gamma^{\mu\dagger}\gamma^0\overleftarrow{\partial}_\mu - \frac{mc}{\hbar}\gamma^0\right) = 0$$

Kontinuitätsgleichung

Dirac-Gleichung: $\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi = 0$

$$\Rightarrow \quad 0 = -i\partial_\mu\,\psi^\dagger\gamma^{\mu\,\dagger} - \psi^\dagger\,\frac{mc}{\hbar} \equiv \psi^\dagger\left(-i\gamma^{\mu\,\dagger}\overleftarrow{\partial}_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right) \qquad \Big| \times \gamma^0$$

$$\Rightarrow \quad \psi^\dagger\left(-i\gamma^{\mu\,\dagger}\gamma^0\overleftarrow{\partial}_\mu - \frac{mc}{\hbar}\gamma^0\right) = 0$$

$$\gamma^{\mu\,\dagger}\gamma^0 = \left\{\begin{array}{lll} \gamma^{0\,\dagger}\gamma^0 = & \gamma^0\gamma^0 & \\ \gamma^{k\,\dagger}\gamma^0 = & -\gamma^k\gamma^0 & = \gamma^0\gamma^k \end{array}\right\} = \gamma^0\gamma^\mu$$

Kontinuitätsgleichung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Dirac-Gleichung: $\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi = 0$

$$\Rightarrow \quad 0 = -i\partial_\mu \psi^\dagger \gamma^{\mu\dagger} - \psi^\dagger \frac{mc}{\hbar} \equiv \psi^\dagger \left(-i\gamma^{\mu\dagger}\overleftarrow{\partial}_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right) \qquad \Big| \times \gamma^0$$

$$\Rightarrow \quad \psi^\dagger \left(-i\gamma^{\mu\dagger}\gamma^0\overleftarrow{\partial}_\mu - \frac{mc}{\hbar}\gamma^0\right) = 0$$

$$\gamma^{\mu\dagger}\gamma^0 = \left\{ \begin{array}{lll} \gamma^{0\dagger}\gamma^0 = & \gamma^0\gamma^0 & \\ \gamma^{k\dagger}\gamma^0 = & -\gamma^k\gamma^0 & = \gamma^0\gamma^k \end{array} \right\} = \gamma^0\gamma^\mu$$

$$\Rightarrow \quad \psi^\dagger\gamma^0 \left(-i\gamma^\mu\overleftarrow{\partial}_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right) = 0$$

Kontinuitätsgleichung

Dirac-Gleichung: $\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi = 0$

$$\Rightarrow \quad 0 = -i\partial_\mu\,\psi^\dagger\gamma^{\mu\,\dagger} - \psi^\dagger\,\frac{mc}{\hbar} \equiv \psi^\dagger\left(-i\gamma^{\mu\,\dagger}\overleftarrow{\partial}_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right) \qquad \Big|\times\gamma^0$$

$$\Rightarrow \quad \psi^\dagger\left(-i\gamma^{\mu\,\dagger}\gamma^0\overleftarrow{\partial}_\mu - \frac{mc}{\hbar}\gamma^0\right) = 0$$

$$\gamma^{\mu\,\dagger}\gamma^0 = \left\{\begin{array}{lcl} \gamma^{0\,\dagger}\gamma^0 & = & \gamma^0\gamma^0 \\ \gamma^{k\,\dagger}\gamma^0 & = & -\gamma^k\gamma^0 = \gamma^0\gamma^k \end{array}\right\} = \gamma^0\gamma^\mu$$

$$\Rightarrow \quad \psi^\dagger\gamma^0\left(-i\gamma^\mu\overleftarrow{\partial}_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right) = 0$$

Def.: $\overline{\psi} \equiv \psi^\dagger\gamma^0$ „adjungierter Spinor”

Kontinuitätsgleichung

Dirac-Gleichung: $\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi = 0$

$$\Rightarrow \quad 0 = -i\partial_\mu \psi^\dagger \gamma^{\mu\,\dagger} - \psi^\dagger \frac{mc}{\hbar} \equiv \psi^\dagger \left(-i\gamma^{\mu\,\dagger}\overleftarrow{\partial}_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right) \qquad \Big| \times \gamma^0$$

$$\Rightarrow \quad \psi^\dagger \left(-i\gamma^{\mu\,\dagger}\gamma^0\overleftarrow{\partial}_\mu - \frac{mc}{\hbar}\gamma^0\right) = 0$$

$$\gamma^{\mu\,\dagger}\gamma^0 = \left\{ \begin{array}{lcl} \gamma^{0\,\dagger}\gamma^0 & = & \gamma^0\gamma^0 \\ \gamma^{k\,\dagger}\gamma^0 & = & -\gamma^k\gamma^0 = \gamma^0\gamma^k \end{array} \right\} = \gamma^0\gamma^\mu$$

$$\Rightarrow \quad \psi^\dagger\gamma^0 \left(-i\gamma^\mu\overleftarrow{\partial}_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right) = 0$$

Def.: $\overline{\psi} \equiv \psi^\dagger\gamma^0$ „adjungierter Spinor"

$$\Rightarrow \quad \boxed{\overline{\psi}\left(-i\gamma^\mu\overleftarrow{\partial}_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right) = 0}$$ adjungierte Dirac-Gleichung

- Dirac-Gleichung: $\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right)\, \psi \;=\; 0$
- adjungierte Gleichung: $\overline{\psi}\left(-\,i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right) \;=\; 0$

- Dirac-Gleichung: $\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right) \psi = 0$

- adjungierte Gleichung: $\overline{\psi}\left(-i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right) = 0$

$$\Rightarrow \quad 0 = \overline{\psi}\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi - \overline{\psi}\left(-i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi$$

- Dirac-Gleichung: $\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right) \psi = 0$

- adjungierte Gleichung: $\overline{\psi}\left(-i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right) = 0$

$$\Rightarrow \quad 0 = \overline{\psi}\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi - \overline{\psi}\left(-i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi = i\overline{\psi}\gamma^\mu\left(\partial_\mu + \overleftarrow{\partial}_\mu\right)\psi$$

- Dirac-Gleichung: $\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right)\,\psi \;=\; 0$

- adjungierte Gleichung: $\overline{\psi}\left(-\,i\gamma^\mu\overleftarrow{\partial}_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right) \;=\; 0$

$$\Rightarrow \quad 0 \;=\; \overline{\psi}\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi - \overline{\psi}\left(-\,i\gamma^\mu\overleftarrow{\partial}_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi \;=\; i\overline{\psi}\gamma^\mu\left(\partial_\mu + \overleftarrow{\partial}_\mu\right)\psi$$

$$= \; i\partial_\mu\left(\overline{\psi}\gamma^\mu\psi\right)$$

- Dirac-Gleichung: $\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi = 0$
- adjungierte Gleichung: $\overline{\psi}\left(-i\gamma^\mu\overleftarrow{\partial}_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right) = 0$

$$\Rightarrow \quad 0 = \overline{\psi}\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi - \overline{\psi}\left(-i\gamma^\mu\overleftarrow{\partial}_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi = i\overline{\psi}\gamma^\mu\left(\partial_\mu + \overleftarrow{\partial}_\mu\right)\psi$$
$$= i\partial_\mu\left(\overline{\psi}\gamma^\mu\psi\right)$$

→ Kontinuitätsgleichung in kovarianter Form: $\boxed{\partial_\mu j^\mu(x) = 0}$

mit dem erhaltenen Viererstrom $j^\mu(x) \propto \overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$

- Dirac-Gleichung: $\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi = 0$
- adjungierte Gleichung: $\bar\psi\left(-i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right) = 0$

$$\Rightarrow \quad 0 = \bar\psi\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi - \bar\psi\left(-i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi = i\bar\psi\gamma^\mu\left(\partial_\mu + \overleftarrow{\partial}_\mu\right)\psi$$
$$= i\partial_\mu\left(\bar\psi\gamma^\mu\psi\right)$$

➞ Kontinuitätsgleichung in kovarianter Form: $\boxed{\partial_\mu j^\mu(x) = 0}$

mit dem erhaltenen Viererstrom $\boxed{j^\mu(x) = c\,\bar\psi(x)\gamma^\mu\psi(x)}$

$$\Rightarrow \quad \rho = \frac{1}{c} j^0 = \bar\psi\gamma^0\psi = \psi^\dagger\gamma^0\gamma^0\psi = \psi^\dagger\psi \quad \checkmark$$
$$j^k = c\bar\psi\gamma^k\psi = c\psi^\dagger\gamma^0\gamma^0\alpha^k\psi = c\psi^\dagger\alpha^k\psi \quad \checkmark$$

2.7 Lösungen der freien Dirac-Gleichung

2.7 Lösungen der freien Dirac-Gleichung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

1. Lösungen mit verschwindendem Impuls („ruhende Teilchen"):

- $\vec{p}\,\psi = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}\psi = 0$

2.7 Lösungen der freien Dirac-Gleichung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

1. Lösungen mit verschwindendem Impuls („ruhende Teilchen"):

- $\vec{p}\,\psi \;=\; \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}\psi \;=\; 0$

  → Dirac-Gleichung in nicht-kovarianter Form:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\,\psi(t) \;=\; \beta mc^2\,\psi(t)$$

2.7 Lösungen der freien Dirac-Gleichung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

1. Lösungen mit verschwindendem Impuls („ruhende Teilchen"):

- $\vec{p}\,\psi \;=\; \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}\psi \;=\; 0$

  → Dirac-Gleichung in nicht-kovarianter Form:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\,\psi(t) \;=\; \beta mc^2\,\psi(t) \;=\; mc^2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\psi(t)$$

2.7 Lösungen der freien Dirac-Gleichung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

1. Lösungen mit verschwindendem Impuls („ruhende Teilchen"):

- $\vec{p}\,\psi \;=\; \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}\psi \;=\; 0$

  → Dirac-Gleichung in nicht-kovarianter Form:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\,\psi(t) \;=\; \beta mc^2\,\psi(t) \;=\; mc^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \psi(t)$$

- linear unabhängige Lösungen:

$$\psi^{(1)}(t) \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar}mc^2 t}\,, \qquad \psi^{(2)}(t) \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar}mc^2 t}\,,$$

$$\psi^{(3)}(t) \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{+\frac{i}{\hbar}mc^2 t}\,, \qquad \psi^{(4)}(t) \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{+\frac{i}{\hbar}mc^2 t}$$

$$\psi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar} mc^2 t}, \; \psi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar} mc^2 t}, \; \psi^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{+\frac{i}{\hbar} mc^2 t}, \; \psi^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{+\frac{i}{\hbar} mc^2 t}$$

$$\psi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar} mc^2 t}, \quad \psi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar} mc^2 t}, \quad \psi^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{+\frac{i}{\hbar} mc^2 t}, \quad \psi^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{+\frac{i}{\hbar} mc^2 t}$$

- Energieeigenwerte:

$$E\,\psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\,\psi$$

$$\psi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar} mc^2 t}\,, \quad \psi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar} mc^2 t}\,, \quad \psi^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{+\frac{i}{\hbar} mc^2 t}\,, \quad \psi^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{+\frac{i}{\hbar} mc^2 t}$$

- Energieeigenwerte:

$$E\,\psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\,\psi \quad \Rightarrow \quad E = \begin{cases} +mc^2 & \text{für} \quad \psi^{(1,2)} \\ -mc^2 & \text{für} \quad \psi^{(3,4)} \end{cases}$$

$$\psi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar}mc^2 t}\,,\ \psi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar}mc^2 t}\,,\ \psi^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{+\frac{i}{\hbar}mc^2 t}\,,\ \psi^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{+\frac{i}{\hbar}mc^2 t}$$

- Energieeigenwerte:

$$E\,\psi = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\,\psi \quad \Rightarrow \quad E = \begin{cases} +mc^2 & \text{für} \quad \psi^{(1,2)} \\ -mc^2 & \text{für} \quad \psi^{(3,4)} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Das Problem negativer Energien existiert auch für die Dirac-Gleichung!

$$\psi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar} mc^2 t}\,, \quad \psi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar} mc^2 t}\,, \quad \psi^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{+\frac{i}{\hbar} mc^2 t}\,, \quad \psi^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{+\frac{i}{\hbar} mc^2 t}$$

- Energieeigenwerte:

$$E\,\psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\,\psi \quad \Rightarrow \quad E = \begin{cases} +mc^2 & \text{für} \quad \psi^{(1,2)} \\ -mc^2 & \text{für} \quad \psi^{(3,4)} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Das Problem negativer Energien existiert auch für die Dirac-Gleichung!

(Aber Dirac hat einen genialen Ausweg gefunden $\rightarrow$ später ...)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

2. Allgemeiner Fall (beliebige Impulse):

2. Allgemeiner Fall (beliebige Impulse):

- freie Dirac-Gleichung: $\left(i\partial\!\!\!/ - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi = 0$

2. Allgemeiner Fall (beliebige Impulse):

- freie Dirac-Gleichung: $\left(i\partial\!\!\!/ - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi = 0$
- freie Teilchen $\Rightarrow$ Viererimpuls = Erhaltungsgröße

  $\rightarrow$ Ansatz: ebene Wellen

2. Allgemeiner Fall (beliebige Impulse):

- freie Dirac-Gleichung: $\left(i\partial\!\!\!/ - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi = 0$
- freie Teilchen $\Rightarrow$ Viererimpuls = Erhaltungsgröße

  $\longrightarrow$ Ansatz: ebene Wellen

i) positive Energien

Ansatz: $\psi(x) = \psi_p^{(+)}(x) \equiv \begin{pmatrix} \varphi(p) \\ \chi(p) \end{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar}p\cdot x}, \qquad E \equiv p^0 > 0,$

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \quad \chi = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

2. Allgemeiner Fall (beliebige Impulse):

- freie Dirac-Gleichung: $\left(i\partial\!\!\!/ - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi = 0$
- freie Teilchen $\Rightarrow$ Viererimpuls = Erhaltungsgröße

  $\longrightarrow$ Ansatz: ebene Wellen

i) positive Energien

Ansatz: $\psi(x) = \psi_p^{(+)}(x) \equiv \begin{pmatrix} \varphi(p) \\ \chi(p) \end{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar} p\cdot x}, \qquad E \equiv p^0 > 0,$

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \quad \chi = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}$$

$$i\partial\!\!\!/\, e^{-\frac{i}{\hbar} p\cdot x} = i\gamma^\mu \partial_\mu e^{-\frac{i}{\hbar} p_\nu x^\nu} = i\gamma^\mu \left(-\frac{i}{\hbar} p_\nu\, \delta^\nu_\mu\right) e^{-\frac{i}{\hbar} p\cdot x} = \frac{1}{\hbar}\, p\!\!\!/\, e^{-\frac{i}{\hbar} p\cdot x}$$

2. Allgemeiner Fall (beliebige Impulse):

- freie Dirac-Gleichung: $\left(i\partial\!\!\!/ - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi = 0$
- freie Teilchen $\Rightarrow$ Viererimpuls = Erhaltungsgröße

  $\longrightarrow$ Ansatz: ebene Wellen

i) positive Energien

Ansatz: $\psi(x) = \psi_p^{(+)}(x) \equiv \begin{pmatrix} \varphi(p) \\ \chi(p) \end{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar} p\cdot x}, \qquad E \equiv p^0 > 0,$

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \quad \chi = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}$$

$$i\partial\!\!\!/\, e^{-\frac{i}{\hbar} p\cdot x} = i\gamma^\mu \partial_\mu e^{-\frac{i}{\hbar} p_\nu x^\nu} = i\gamma^\mu \left(-\frac{i}{\hbar} p_\nu\, \delta_\mu^\nu\right) e^{-\frac{i}{\hbar} p\cdot x} = \frac{1}{\hbar}\, p\!\!\!/\, e^{-\frac{i}{\hbar} p\cdot x}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \left(i\partial\!\!\!/ - \frac{mc}{\hbar}\right) \psi_p^{(+)}(x) = \frac{1}{\hbar}\left(p\!\!\!/ - mc\right) \psi_p^{(+)}(x)$$

$$\Rightarrow \quad \big(\not{p} - mc\big)\begin{pmatrix}\varphi(p)\\ \chi(p)\end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad (\not{p} - mc)\begin{pmatrix} \varphi(p) \\ \chi(p) \end{pmatrix} = 0$$

$$\not{p} = \gamma^\mu p_\mu = \gamma^0 \frac{E}{c} - \vec{\gamma}\cdot\vec{p} = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} & -\vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{p} & -\frac{E}{c} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\not{p} - mc\right) \begin{pmatrix} \varphi(p) \\ \chi(p) \end{pmatrix} = 0$$

$$\not{p} = \gamma^\mu p_\mu = \gamma^0 \tfrac{E}{c} - \vec{\gamma} \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} & -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -\frac{E}{c} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\not{p} - mc\right) \begin{pmatrix} \varphi(\vec{p}) \\ \chi(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} - mc & -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -\frac{E}{c} - mc \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi(p) \\ \chi(p) \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad (\not{p} - mc) \begin{pmatrix} \varphi(p) \\ \chi(p) \end{pmatrix} = 0$$

$$\not{p} = \gamma^\mu p_\mu = \gamma^0 \frac{E}{c} - \vec{\gamma} \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} & -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -\frac{E}{c} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad (\not{p} - mc) \begin{pmatrix} \varphi(\vec{p}) \\ \chi(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} - mc & -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -\frac{E}{c} - mc \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi(p) \\ \chi(p) \end{pmatrix} = 0$$

→ Gleichungssystem:

$$(E - mc^2)\,\varphi(p) \; - \vec{\sigma} \cdot \vec{p}c\,\chi(p) = 0$$

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{p}c\,\varphi(p) \; - (E + mc^2)\,\chi(p) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (\not{p} - mc)\begin{pmatrix}\varphi(p)\\ \chi(p)\end{pmatrix} = 0$$

$$\not{p} = \gamma^\mu p_\mu = \gamma^0 \tfrac{E}{c} - \vec{\gamma}\cdot\vec{p} = \begin{pmatrix}\frac{E}{c} & -\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\\ \vec{\sigma}\cdot\vec{p} & -\frac{E}{c}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad (\not{p} - mc)\begin{pmatrix}\varphi(\vec{p})\\ \chi(p)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{E}{c} - mc & -\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\\ \vec{\sigma}\cdot\vec{p} & -\frac{E}{c} - mc\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi(p)\\ \chi(p)\end{pmatrix} = 0$$

→ Gleichungssystem:

$$(E - mc^2)\,\varphi(p) \;-\vec{\sigma}\cdot\vec{p}c\,\chi(p) = 0$$

$$\vec{\sigma}\cdot\vec{p}c\,\varphi(p) \;-(E + mc^2)\,\chi(p) = 0$$

Grenzfall $\vec{p} \to 0$: $\quad (E - mc^2)\,\varphi(E,\vec{0}) = (E + mc^2)\chi(E,\vec{0}) = 0$

$$\Rightarrow \quad E = mc^2, \quad \chi = 0 \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow \quad (\not{p} - mc)\begin{pmatrix} \varphi(p) \\ \chi(p) \end{pmatrix} = 0$$

$$\not{p} = \gamma^\mu p_\mu = \gamma^0 \tfrac{E}{c} - \vec{\gamma}\cdot\vec{p} = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} & -\vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{p} & -\frac{E}{c} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad (\not{p} - mc)\begin{pmatrix} \varphi(\vec{p}) \\ \chi(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} - mc & -\vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{p} & -\frac{E}{c} - mc \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi(p) \\ \chi(p) \end{pmatrix} = 0$$

→ Gleichungssystem:

$$(E - mc^2)\,\varphi(p) \; - \vec{\sigma}\cdot\vec{p}c\,\chi(p) = 0$$

$$\vec{\sigma}\cdot\vec{p}c\,\varphi(p) \; - (E + mc^2)\,\chi(p) = 0 \quad \Rightarrow \quad \chi(p) = \tfrac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}c}{E+mc^2}\,\varphi(p)$$

$$\Rightarrow \quad (\not{p} - mc) \begin{pmatrix} \varphi(p) \\ \chi(p) \end{pmatrix} = 0$$

$$\not{p} = \gamma^\mu p_\mu = \gamma^0 \tfrac{E}{c} - \vec{\gamma} \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} & -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -\frac{E}{c} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad (\not{p} - mc) \begin{pmatrix} \varphi(\vec{p}) \\ \chi(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} - mc & -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -\frac{E}{c} - mc \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi(p) \\ \chi(p) \end{pmatrix} = 0$$

→ Gleichungssystem:

$$(E - mc^2)\,\varphi(p) \; - \vec{\sigma} \cdot \vec{p}c\,\chi(p) = 0$$

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{p}c\,\varphi(p) \; - (E + mc^2)\,\chi(p) = 0 \quad \Rightarrow \quad \chi(p) = \tfrac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}c}{E + mc^2}\,\varphi(p)$$

$$\Rightarrow \quad \left(E - mc^2 - \tfrac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2 c^2}{E + mc^2} \right) \varphi(p) = 0$$

- Produkt zweier Pauli-Matrizen: $\sigma^k \sigma^l = \delta^{kl} + i\varepsilon^{klm}\sigma^m$

- Produkt zweier Pauli-Matrizen: $\sigma^k \sigma^l = \delta^{kl} + i\varepsilon^{klm}\sigma^m$

$$\Rightarrow \quad \vec{\sigma}\cdot\vec{a}\,\vec{\sigma}\cdot\vec{b} \;=\; a^k\, b^l\, \sigma^k \sigma^l \;=\; \vec{a}\cdot\vec{b} + i\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{\sigma}$$

- Produkt zweier Pauli-Matrizen: $\sigma^k \sigma^l = \delta^{kl} + i\varepsilon^{klm}\sigma^m$

$$\Rightarrow \quad \vec{\sigma} \cdot \vec{a}\, \vec{\sigma} \cdot \vec{b} \;=\; a^k\, b^l\, \sigma^k \sigma^l \;=\; \vec{a} \cdot \vec{b} + i \left(\vec{a} \times \vec{b} \right) \cdot \vec{\sigma}$$

$$\Rightarrow \quad (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2 = \vec{p}^{\,2}$$

- Produkt zweier Pauli-Matrizen: $\sigma^k \sigma^l = \delta^{kl} + i\varepsilon^{klm}\sigma^m$

$$\Rightarrow \quad \vec{\sigma}\cdot\vec{a}\,\vec{\sigma}\cdot\vec{b} \;=\; a^k\, b^l\, \sigma^k\sigma^l \;=\; \vec{a}\cdot\vec{b} + i\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{\sigma}$$

$$\Rightarrow \quad (\vec{\sigma}\cdot\vec{p})^2 = \vec{p}^{\,2}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \stackrel{!}{=} \left(E - mc^2 - \tfrac{\vec{p}^{\,2}c^2}{E+mc^2}\right)\varphi(p) \;=\; \tfrac{1}{E+mc^2}\left(E^2 - m^2c^4 - \vec{p}^{\,2}c^2\right)\varphi(p)$$

- Produkt zweier Pauli-Matrizen: $\sigma^k \sigma^l = \delta^{kl} + i\varepsilon^{klm}\sigma^m$

$$\Rightarrow \quad \vec{\sigma}\cdot\vec{a}\,\vec{\sigma}\cdot\vec{b} \;=\; a^k\, b^l\, \sigma^k\sigma^l \;=\; \vec{a}\cdot\vec{b} + i\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{\sigma}$$

$$\Rightarrow \quad (\vec{\sigma}\cdot\vec{p})^2 = \vec{p}^{\,2}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \stackrel{!}{=} \left(E - mc^2 - \tfrac{\vec{p}^{\,2}c^2}{E+mc^2}\right)\varphi(p) \;=\; \tfrac{1}{E+mc^2}\left(E^2 - m^2c^4 - \vec{p}^{\,2}c^2\right)\varphi(p)$$

automatisch erfüllt, wenn $E^2 = m^2c^4 + \vec{p}^{\,2}c^2$ gilt

- Produkt zweier Pauli-Matrizen: $\sigma^k \sigma^l = \delta^{kl} + i\varepsilon^{klm}\sigma^m$

  $\Rightarrow \quad \vec{\sigma}\cdot\vec{a}\,\vec{\sigma}\cdot\vec{b} = a^k\, b^l\, \sigma^k\sigma^l = \vec{a}\cdot\vec{b} + i\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{\sigma}$

  $\Rightarrow \quad (\vec{\sigma}\cdot\vec{p})^2 = \vec{p}^{\,2}$

$\Rightarrow$ $0 \stackrel{!}{=} \left(E - mc^2 - \frac{\vec{p}^{\,2}c^2}{E+mc^2}\right)\varphi(p) = \frac{1}{E+mc^2}\left(E^2 - m^2c^4 - \vec{p}^{\,2}c^2\right)\varphi(p)$

automatisch erfüllt, wenn $E^2 = m^2c^4 + \vec{p}^{\,2}c^2$ gilt

$\rightarrow$ zwei linear unabhängige Lösungen:

$$\varphi_\uparrow = \mathcal{N}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad \varphi_\downarrow = \mathcal{N}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \qquad \mathcal{N} = \text{Normierungsfaktor}$$

- Produkt zweier Pauli-Matrizen: $\sigma^k \sigma^l = \delta^{kl} + i\varepsilon^{klm}\sigma^m$

  $\Rightarrow \quad \vec{\sigma}\cdot\vec{a}\,\vec{\sigma}\cdot\vec{b} \;=\; a^k\, b^l\, \sigma^k\sigma^l \;=\; \vec{a}\cdot\vec{b} + i\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{\sigma}$

  $\Rightarrow \quad (\vec{\sigma}\cdot\vec{p})^2 = \vec{p}^{\,2}$

$\Rightarrow \quad 0 \stackrel{!}{=} \left(E - mc^2 - \frac{\vec{p}^{\,2}c^2}{E+mc^2}\right)\varphi(p) \;=\; \frac{1}{E+mc^2}\left(E^2 - m^2c^4 - \vec{p}^{\,2}c^2\right)\varphi(p)$

automatisch erfüllt, wenn $E^2 = m^2c^4 + \vec{p}^{\,2}c^2$ gilt

$\longrightarrow$ zwei linear unabhängige Lösungen:

$$\varphi_\uparrow = \mathcal{N}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad \varphi_\downarrow = \mathcal{N}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \qquad \mathcal{N} = \text{Normierungsfaktor}$$

- zugehörige „untere” Komponenten des Dirac-Spinors: $\chi(p) \;=\; \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}c}{E+mc^2}\,\varphi(p)$
  (nichtrelativistisch unterdrückt $\longrightarrow$ „kleine Komponenten”)