3.7 Partialwellenzerlegung und Streuphasen

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

3.7 Partialwellenzerlegung und Streuphasen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Partialwellenzerlegung
  - basiert auf der Entwicklung der Wellenfunktion nach Drehimpulseigenzuständen
  - besonders gut geeignet bei kleinen Energien

3.7 Partialwellenzerlegung und Streuphasen

- Partialwellenzerlegung
  - basiert auf der Entwicklung der Wellenfunktion nach Drehimpulseigenzuständen
  - besonders gut geeignet bei kleinen Energien
- klassisches Bild:

Potenzial mit Reichweite R

Stoßparameter b

- Nur Teilchen mit $b \leq R$ werden gestreut.

$\Rightarrow$ Nur Drehimpulse $|\vec{\ell}| \leq R|\vec{p}|$ tragen zum Wirkungsquerschnitt bei.

- Schrödinger-Gl.mit radialsymmetrischem Potenzial $V(\vec{r}) = V(r)$:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\vec{\nabla}^2 + V(r)\right)\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r})$$

- Schrödinger-Gl.mit radialsymmetrischem Potenzial $V(\vec{r}) = V(r)$:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\vec{\nabla}^2 + V(r)\right)\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r})$$

- Erinnerung: $\quad \vec{\nabla}^2 = \Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r - \frac{\vec{L}^2}{\hbar^2 r^2}$
  - Bahndrehimpuls: $\quad \vec{L}^2 = -\hbar^2\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)$
  - Eigenfunktionen: $\quad \vec{L}^2\, Y_\ell^m(\theta,\varphi) = \ell(\ell+1)\,\hbar^2\, Y_\ell^m(\theta,\varphi)$

- Schrödinger-Gl.mit radialsymmetrischem Potenzial $V(\vec{r}) = V(r)$:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\vec{\nabla}^2 + V(r)\right)\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r})$$

- Erinnerung: $\vec{\nabla}^2 = \Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2} r - \frac{\vec{L}^2}{\hbar^2 r^2}$
  - Bahndrehimpuls: $\vec{L}^2 = -\hbar^2\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)$
  - Eigenfunktionen: $\vec{L}^2\, Y_\ell^m(\theta,\varphi) = \ell(\ell+1)\,\hbar^2\, Y_\ell^m(\theta,\varphi)$

→ Lösungen der Schrödinger-Gl.mit definiertem Bahndrehimpuls:

$$\psi_{\ell m}(\vec{r}) = R_\ell(r) Y_\ell^m(\theta,\varphi) \equiv \frac{u_\ell(r)}{r} Y_\ell^m(\theta,\varphi)$$

- Schrödinger-Gl.mit radialsymmetrischem Potenzial $V(\vec{r}) = V(r)$:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\vec{\nabla}^2 + V(r)\right)\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r})$$

- Erinnerung: $\vec{\nabla}^2 = \Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r - \frac{\vec{L}^2}{\hbar^2 r^2}$
  - Bahndrehimpuls: $\vec{L}^2 = -\hbar^2\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)$
  - Eigenfunktionen: $\vec{L}^2\, Y_\ell^m(\theta,\varphi) = \ell(\ell+1)\,\hbar^2\, Y_\ell^m(\theta,\varphi)$

→ Lösungen der Schrödinger-Gl.mit definiertem Bahndrehimpuls:

$$\psi_{\ell m}(\vec{r}) = R_\ell(r) Y_\ell^m(\theta,\varphi) \equiv \frac{u_\ell(r)}{r} Y_\ell^m(\theta,\varphi)$$

- Radialgleichung: $\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dr^2} + \underbrace{V(r) + \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2\mu r^2}}_{V_{\text{eff}}(r)}\right) u_\ell(r) = E u_\ell(r)$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Definiere: $U(r) = \frac{2\mu}{\hbar^2} V(r), \quad k^2 = \frac{2\mu}{\hbar^2} E$ (wie gehabt)

$$\Rightarrow \boxed{\left(\frac{d^2}{dr^2} - U(r) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + k^2 \right) u_\ell(r) = 0}$$

- Definiere: $U(r) = \frac{2\mu}{\hbar^2} V(r), \quad k^2 = \frac{2\mu}{\hbar^2} E$ (wie gehabt)

$$\Rightarrow \quad \boxed{\left(\frac{d^2}{dr^2} - U(r) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + k^2\right) u_\ell(r) = 0}$$

1. Nicht-wechselwirkender Fall: $V \equiv 0$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + k^2\right) u_\ell^{(0)}(r) = 0$$

- Definiere: $U(r) = \frac{2\mu}{\hbar^2} V(r), \quad k^2 = \frac{2\mu}{\hbar^2} E$ (wie gehabt)

$$\Rightarrow \boxed{\left(\frac{d^2}{dr^2} - U(r) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + k^2\right) u_\ell(r) = 0}$$

1. Nicht-wechselwirkender Fall: $V \equiv 0$

$$\Rightarrow \left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + k^2\right) u_\ell^{(0)}(r) = 0$$

linear unabhängige Lösungen:

- $F_\ell(kr) = kr\, j_\ell(kr)$, $\quad j_\ell(x)$ = sphärische Besselfunktionen
- $G_\ell(kr) = kr\, n_\ell(kr)$, $\quad n_\ell(x)$ = sphärische Neumannfunktionen

- Definiere: $U(r) = \frac{2\mu}{\hbar^2} V(r), \quad k^2 = \frac{2\mu}{\hbar^2} E$ (wie gehabt)

$$\Rightarrow \boxed{\left(\frac{d^2}{dr^2} - U(r) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + k^2\right) u_\ell(r) = 0}$$

1. Nicht-wechselwirkender Fall: $V \equiv 0$

$$\Rightarrow \left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + k^2\right) u_\ell^{(0)}(r) = 0$$

linear unabhängige Lösungen:

- $F_\ell(kr) = kr\, j_\ell(kr)$, $\quad j_\ell(x)$ = sphärische Besselfunktionen
- $G_\ell(kr) = kr\, n_\ell(kr)$, $\quad n_\ell(x)$ = sphärische Neumannfunktionen

z.B. $j_0(x) = \frac{\sin x}{x}, \qquad n_0(x) = -\frac{\cos x}{x},$

$j_1(x) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}, \qquad n_1(x) = -\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x}$

- Asymptotisches Verhalten:
  - Bessel: $j_\ell(x \to 0) \propto x^\ell, \qquad j_\ell(x \to \infty) \to \frac{\sin(x - \ell\frac{\pi}{2})}{x}$
  - Neumann: $n_\ell(x \to 0) \propto \frac{1}{x^{\ell+1}}, \qquad n_\ell(x \to \infty) \to -\frac{\cos(x - \ell\frac{\pi}{2})}{x}$

- Asymptotisches Verhalten:
  - Bessel: $j_\ell(x \to 0) \propto x^\ell, \qquad j_\ell(x \to \infty) \to \frac{\sin(x - \ell\frac{\pi}{2})}{x}$
  - Neumann: $n_\ell(x \to 0) \propto \frac{1}{x^{\ell+1}}, \qquad n_\ell(x \to \infty) \to -\frac{\cos(x - \ell\frac{\pi}{2})}{x}$

→ Die Neumannfunktionen divergieren am Ursprung
und sind nicht als Lösungen des freien Problems ($V \equiv 0$) zulässig.

- Asymptotisches Verhalten:
  - Bessel: $j_\ell(x \to 0) \propto x^\ell$, $\quad j_\ell(x \to \infty) \to \frac{\sin(x - \ell\frac{\pi}{2})}{x}$
  - Neumann: $n_\ell(x \to 0) \propto \frac{1}{x^{\ell+1}}$, $\quad n_\ell(x \to \infty) \to -\frac{\cos(x - \ell\frac{\pi}{2})}{x}$

→ Die Neumannfunktionen divergieren am Ursprung
und sind nicht als Lösungen des freien Problems ($V \equiv 0$) zulässig:

- Normierbarkeit:

$$\int d^3r\, |\psi_{\ell m}|^2 \propto \int_0^\infty r^2\, dr\, |R_\ell|^2 = \int_0^\infty dr\, |u_\ell|^2 \propto \begin{cases} \int dr\, r^2\, j_\ell^2(kr) \\ \int dr\, r^2\, n_\ell^2(kr)^2 \end{cases}$$

- Asymptotisches Verhalten:
  - Bessel: $j_\ell(x \to 0) \propto x^\ell, \qquad j_\ell(x \to \infty) \to \frac{\sin(x - \ell\frac{\pi}{2})}{x}$
  - Neumann: $n_\ell(x \to 0) \propto \frac{1}{x^{\ell+1}}, \qquad n_\ell(x \to \infty) \to -\frac{\cos(x - \ell\frac{\pi}{2})}{x}$

→ Die Neumannfunktionen divergieren am Ursprung
und sind nicht als Lösungen des freien Problems ($V \equiv 0$) zulässig:

- Normierbarkeit:

$$\int d^3r\,|\psi_{\ell m}|^2 \propto \int_0^\infty r^2\,dr\,|R_\ell|^2 = \int_0^\infty dr\,|u_\ell|^2 \propto \begin{cases} \int dr\, r^2\, j_\ell^2(kr) \\ \int dr\, r^2\, n_\ell^2(kr)^2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Für $\ell \geq 1$ sind die n_ℓ am Ursprung nicht normierbar.

- Sonderfall $\ell = 0$:

  Sei $u_0(r) = G_0(kr) = kr\, n_0(kr) = -\cos(kr)$

  löst die freie Radialgleichung $\left(\frac{d^2}{dr^2} + k^2\right) u_0(r) = 0$ ✓

- Sonderfall $\ell = 0$:

  Sei $\quad u_0(r) = G_0(kr) = kr\, n_0(kr) = -\cos(kr)$

  löst die freie Radialgleichung $\quad \left(\frac{d^2}{dr^2} + k^2\right) u_0(r) = 0 \quad \checkmark$

  Gesamtwellenfunktion:

  $$\psi_{00}(\vec{r}) = \frac{u_0}{r} Y_0^0(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \frac{u_0}{r} = -\frac{1}{\sqrt{4\pi}} \frac{\cos(kr)}{r}$$

- Sonderfall $\ell = 0$:

Sei $u_0(r) = G_0(kr) = kr\, n_0(kr) = -\cos(kr)$

löst die freie Radialgleichung $\left(\frac{d^2}{dr^2} + k^2\right) u_0(r) = 0 \quad \checkmark$

Gesamtwellenfunktion:

$$\psi_{00}(\vec{r}) = \frac{u_0}{r} Y_0^0(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \frac{u_0}{r} = -\frac{1}{\sqrt{4\pi}} \frac{\cos(kr)}{r}$$

Verhalten am Ursprung: $\psi_{00}(\vec{r} \to \vec{0}) = -\frac{1}{\sqrt{4\pi}} \frac{1}{r}$

- Sonderfall $\ell = 0$:

  Sei $\quad u_0(r) = G_0(kr) = kr\, n_0(kr) = -\cos(kr)$

  löst die freie Radialgleichung $\quad \left(\frac{d^2}{dr^2} + k^2\right) u_0(r) = 0 \quad \checkmark$

  Gesamtwellenfunktion:

  $$\psi_{00}(\vec{r}) = \frac{u_0}{r} Y_0^0(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \frac{u_0}{r} = -\frac{1}{\sqrt{4\pi}} \frac{\cos(kr)}{r}$$

  Verhalten am Ursprung: $\quad \psi_{00}(\vec{r} \to \vec{0}) = -\frac{1}{\sqrt{4\pi}} \frac{1}{r}$

  Erinnerung Elektrostatik: $\quad \Delta \frac{1}{r} = -4\pi\, \delta^3(\vec{r})$

- Sonderfall $\ell = 0$:

  Sei $\quad u_0(r) = G_0(kr) = kr\, n_0(kr) = -\cos(kr)$

  löst die freie Radialgleichung $\quad \left(\frac{d^2}{dr^2} + k^2\right) u_0(r) = 0 \quad \checkmark$

  Gesamtwellenfunktion:

  $$\psi_{00}(\vec{r}) = \frac{u_0}{r} Y_0^0(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \frac{u_0}{r} = -\frac{1}{\sqrt{4\pi}} \frac{\cos(kr)}{r}$$

  Verhalten am Ursprung: $\quad \psi_{00}(\vec{r} \to \vec{0}) = -\frac{1}{\sqrt{4\pi}} \frac{1}{r}$

  Erinnerung Elektrostatik: $\quad \Delta \frac{1}{r} = -4\pi\, \delta^3(\vec{r})$

$\rightarrow$ $\psi_{00}(\vec{r})$ löst die freie Schrödinger-Gleichung überall außer am Ursprung!

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Sonderfall $\ell = 0$:

  Sei $\quad u_0(r) = G_0(kr) = kr\, n_0(kr) = -\cos(kr)$

  löst die freie Radialgleichung $\quad \left(\frac{d^2}{dr^2} + k^2\right) u_0(r) = 0 \quad \checkmark$

  Gesamtwellenfunktion:

  $$\psi_{00}(\vec{r}) = \frac{u_0}{r}\, Y_0^0(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\, \frac{u_0}{r} = -\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\, \frac{\cos(kr)}{r}$$

  Verhalten am Ursprung: $\quad \psi_{00}(\vec{r} \to \vec{0}) = -\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\, \frac{1}{r}$

  Erinnerung Elektrostatik: $\quad \Delta \frac{1}{r} = -4\pi\, \delta^3(\vec{r})$

  → $\psi_{00}(\vec{r})$ löst die freie Schrödinger-Gleichung überall außer am Ursprung!

→ Lösungen der freien Schrödinger-Gleichung ($V \equiv 0$):

$$\boxed{u_\ell^{(0)}(r) = \mathcal{N} F_\ell(kr) = \mathcal{N}\, kr\, j_\ell(kr) \stackrel{r\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{N}\, \sin(kr - \ell\frac{\pi}{2})}$$

2. räumlich lokalisiertes Potenzial:

$$V(r) \begin{cases} = 0 & \text{(oder vernachlässigbar) für } r > R \\ \neq 0 & \text{für kleine } r \end{cases}$$

2. räumlich lokalisiertes Potenzial:

$$V(r) \begin{cases} = 0 & \text{(oder vernachlässigbar) für } r > R \\ \neq 0 & \text{für kleine } r \end{cases}$$

→ Lösungen außerhalb des Potenzialbereichs:

$$u_\ell(r > R) = A_\ell F_\ell(kr) - B_\ell G_\ell(kr)$$

2. räumlich lokalisiertes Potenzial:

$$V(r) \begin{cases} = 0 & \text{(oder vernachlässigbar) für } r > R \\ \neq 0 & \text{für kleine } r \end{cases}$$

→ Lösungen außerhalb des Potenzialbereichs:

$$u_\ell(r > R) = A_\ell F_\ell(kr) - B_\ell G_\ell(kr)$$

- Neumannfunktionen jetzt erlaubt, da Ursprung nicht enthalten

2. räumlich lokalisiertes Potenzial:

$$V(r) \begin{cases} = 0 & \text{(oder vernachlässigbar) für } r > R \\ \neq 0 & \text{für kleine } r \end{cases}$$

→ Lösungen außerhalb des Potenzialbereichs:

$$u_\ell(r > R) = A_\ell F_\ell(kr) - B_\ell G_\ell(kr)$$

- Neumannfunktionen jetzt erlaubt, da Ursprung nicht enthalten
- Lösung sieht im Potenzialbereich (und speziell am Ursprung) anders aus

2. räumlich lokalisiertes Potenzial:

$$V(r) \begin{cases} = 0 & \text{(oder vernachlässigbar) für } r > R \\ \neq 0 & \text{für kleine } r \end{cases}$$

→ Lösungen außerhalb des Potenzialbereichs:

$$u_\ell(r > R) = A_\ell F_\ell(kr) - B_\ell G_\ell(kr)$$

- Neumannfunktionen jetzt erlaubt, da Ursprung nicht enthalten
- Lösung sieht im Potenzialbereich (und speziell am Ursprung) anders aus
- Koeffizienten A_ℓ und B_ℓ ergeben sich aus Anschlussbedingungen (Stetigkeit von u_ℓ und u'_ℓ am Potenzialrand)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- andere Notation: $u_\ell(r > R) = C_\ell\big(\cos\delta_\ell\, F_\ell(kr) - \sin\delta_\ell G_\ell(kr)\big)$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} A_\ell &= C_\ell \cos\delta_\ell \\ B_\ell &= C_\ell \sin\delta_\ell \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad C_\ell^2 = A_\ell^2 + B_\ell^2\,, \quad \tan\delta_\ell = \frac{B_\ell}{A_\ell}$$

- andere Notation: $u_\ell(r > R) = C_\ell\big(\cos\delta_\ell\, F_\ell(kr) \;-\; \sin\delta_\ell G_\ell(kr)\big)$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} A_\ell &= C_\ell \cos\delta_\ell \\ B_\ell &= C_\ell \sin\delta_\ell \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad C_\ell^2 = A_\ell^2 + B_\ell^2\,, \quad \tan\delta_\ell = \tfrac{B_\ell}{A_\ell}$$

  - C_ℓ: (eher uninteressanter) Normierungsfaktor
  - δ_ℓ: enthält Informationen über das Potenzial

- andere Notation: $u_\ell(r > R) = C_\ell\Big(\cos\delta_\ell\, F_\ell(kr) \;-\; \sin\delta_\ell G_\ell(kr)\Big)$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} A_\ell &= C_\ell \cos\delta_\ell \\ B_\ell &= C_\ell \sin\delta_\ell \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad C_\ell^2 = A_\ell^2 + B_\ell^2\,, \qquad \tan\delta_\ell = \tfrac{B_\ell}{A_\ell}$$

  - C_ℓ: (eher uninteressanter) Normierungsfaktor
  - δ_ℓ: enthält Informationen über das Potenzial

    $(V \equiv 0 \;\;\Rightarrow\;\; B_\ell = 0 \;\;\Rightarrow\;\; \delta_\ell = 0)$

- andere Notation: $u_\ell(r > R) = C_\ell\big(\cos\delta_\ell\, F_\ell(kr) - \sin\delta_\ell G_\ell(kr)\big)$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} A_\ell &= C_\ell \cos\delta_\ell \\ B_\ell &= C_\ell \sin\delta_\ell \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad C_\ell^2 = A_\ell^2 + B_\ell^2\,, \qquad \tan\delta_\ell = \tfrac{B_\ell}{A_\ell}$$

  - C_ℓ: (eher uninteressanter) Normierungsfaktor
  - δ_ℓ: enthält Informationen über das Potenzial

    $(V \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad B_\ell = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta_\ell = 0)$

- asymptotisches Verhalten:

$$u_\ell(r \to \infty) = C_\ell\big(\cos\delta_\ell\, \sin(kr - \ell\tfrac{\pi}{2}) + \sin\delta_\ell \cos(kr - \ell\tfrac{\pi}{2})\big)$$

- andere Notation: $u_\ell(r > R) = C_\ell\big(\cos\delta_\ell\, F_\ell(kr) - \sin\delta_\ell G_\ell(kr)\big)$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} A_\ell &= C_\ell \cos\delta_\ell \\ B_\ell &= C_\ell \sin\delta_\ell \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad C_\ell^2 = A_\ell^2 + B_\ell^2\,, \qquad \tan\delta_\ell = \tfrac{B_\ell}{A_\ell}$$

  - C_ℓ: (eher uninteressanter) Normierungsfaktor
  - δ_ℓ: enthält Informationen über das Potenzial

    $(V \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad B_\ell = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta_\ell = 0)$

- asymptotisches Verhalten:

$$u_\ell(r \to \infty) = C_\ell\Big(\cos\delta_\ell\, \sin(kr - \ell\tfrac{\pi}{2}) + \sin\delta_\ell \cos(kr - \ell\tfrac{\pi}{2})\Big)$$

$$= C_\ell\, \sin(kr - \ell\tfrac{\pi}{2} + \delta_\ell)$$

- andere Notation: $u_\ell(r > R) = C_\ell\big(\cos\delta_\ell\, F_\ell(kr) - \sin\delta_\ell G_\ell(kr)\big)$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} A_\ell &= C_\ell \cos\delta_\ell \\ B_\ell &= C_\ell \sin\delta_\ell \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad C_\ell^2 = A_\ell^2 + B_\ell^2\,, \qquad \tan\delta_\ell = \tfrac{B_\ell}{A_\ell}$$

  - C_ℓ: (eher uninteressanter) Normierungsfaktor
  - δ_ℓ: enthält Informationen über das Potenzial

    $(V \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad B_\ell = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta_\ell = 0)$

- asymptotisches Verhalten:

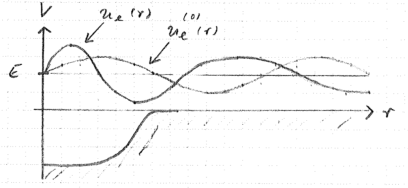
$$\begin{aligned} u_\ell(r \to \infty) &= C_\ell\big(\cos\delta_\ell\, \sin(kr - \ell\tfrac{\pi}{2}) + \sin\delta_\ell \cos(kr - \ell\tfrac{\pi}{2})\big) \\ &= C_\ell\, \sin(kr - \ell\tfrac{\pi}{2} + \delta_\ell) \end{aligned}$$

$\longrightarrow$ δ_ℓ: „Phasenverschiebung“, „Streuphase“

- attraktives Potenzial:

  Welle oszilliert für $V < 0$ schneller als freie Welle gleicher Energie

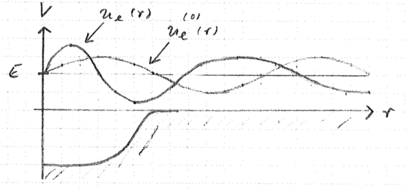
  → Phasenvorsprung bei $r > R$



- attraktives Potenzial:

  Welle oszilliert für $V < 0$ schneller als freie Welle gleicher Energie

  → Phasenvorsprung bei $r > R$



- repulsives Potenzial:

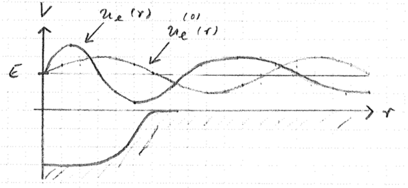
  Welle oszilliert für $V > 0$ langsamer ($E > V$) als freie Welle gleicher Energie oder gar nicht ($E < V$)

  → Phasenrückstand bei $r > R$

- attraktives Potenzial:

  Welle oszilliert für $V < 0$ schneller als freie Welle gleicher Energie

  → Phasenvorsprung bei $r > R$



- repulsives Potenzial:

  Welle oszilliert für $V > 0$ langsamer ($E > V$) als freie Welle gleicher Energie oder gar nicht ($E < V$)

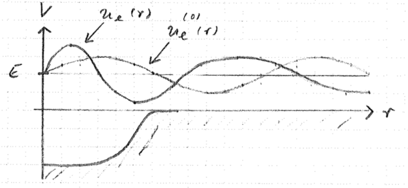
  → Phasenrückstand bei $r > R$

- also: $V < 0 \rightarrow \delta_\ell > 0, \quad V > 0 \rightarrow \delta_\ell < 0$

- attraktives Potenzial:

  Welle oszilliert für $V < 0$ schneller als freie Welle gleicher Energie

  → Phasenvorsprung bei $r > R$



- repulsives Potenzial:

  Welle oszilliert für $V > 0$ langsamer ($E > V$) als freie Welle gleicher Energie oder gar nicht ($E < V$)

  → Phasenrückstand bei $r > R$

- also: $V < 0 \;\rightarrow\; \delta_\ell > 0, \quad V > 0 \;\rightarrow\; \delta_\ell < 0$

- beachte: $\delta_\ell = \delta_\ell(E)$

Zusammenhang mit der Streuamplitude

Zusammenhang mit der Streuamplitude

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Lösung des Streuproblems:

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = e^{ikz} + \psi_{\text{streu}}(\vec{r}) \xrightarrow{r\to\infty} e^{ikz} + f_k(\theta)\,\frac{e^{ikr}}{r}$$

Zusammenhang mit der Streuamplitude

- Lösung des Streuproblems:

  $$\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = e^{ikz} + \psi_{\text{streu}}(\vec{r}) \xrightarrow{r\to\infty} e^{ikz} + f_k(\theta)\,\frac{e^{ikr}}{r}$$

  kein Drehimpulseigenzustand

Zusammenhang mit der Streuamplitude

- Lösung des Streuproblems:

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = e^{ikz} + \psi_{\text{streu}}(\vec{r}) \xrightarrow{r\to\infty} e^{ikz} + f_k(\theta)\,\frac{e^{ikr}}{r}$$

kein Drehimpulseigenzustand, aber kann danach entwickelt werden:

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \sum_{\ell,m} c_{\ell m}\,\frac{u_\ell(r)}{r}\,Y_\ell^m(\theta,\varphi)$$

Zusammenhang mit der Streuamplitude

- Lösung des Streuproblems:

  $$\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = e^{ikz} + \psi_{\text{streu}}(\vec{r}) \xrightarrow{r\to\infty} e^{ikz} + f_k(\theta)\,\frac{e^{ikr}}{r}$$

  kein Drehimpulseigenzustand, aber kann danach entwickelt werden:

  $$\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \sum_{\ell,m} c_{\ell m}\,\frac{u_\ell(r)}{r}\,Y_\ell^m(\theta,\varphi)$$

- radialsymmetrisches Potenzial $V(r)$ $\Rightarrow$ $\psi_{\vec{k}}$ hängt nicht von φ ab.

Zusammenhang mit der Streuamplitude

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Lösung des Streuproblems:

  $$\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = e^{ikz} + \psi_{\text{streu}}(\vec{r}) \xrightarrow{r\to\infty} e^{ikz} + f_k(\theta)\,\frac{e^{ikr}}{r}$$

  kein Drehimpulseigenzustand, aber kann danach entwickelt werden:

  $$\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \sum_{\ell,m} c_{\ell m}\,\frac{u_\ell(r)}{r}\,Y_\ell^m(\theta,\varphi)$$

- radialsymmetrisches Potenzial $V(r)$ $\Rightarrow$ $\psi_{\vec{k}}$ hängt nicht von φ ab.

  $\rightarrow$ nur $Y_\ell^0 \propto P_\ell(\cos\theta)$

Zusammenhang mit der Streuamplitude

- Lösung des Streuproblems:

  $$\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = e^{ikz} + \psi_{\text{streu}}(\vec{r}) \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} e^{ikz} + f_k(\theta)\,\frac{e^{ikr}}{r}$$

  kein Drehimpulseigenzustand, aber kann danach entwickelt werden:

  $$\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \sum_{\ell,m} c_{\ell m}\,\frac{u_\ell(r)}{r}\,Y_\ell^m(\theta,\varphi)$$

- radialsymmetrisches Potenzial $V(r)$ $\Rightarrow$ $\psi_{\vec{k}}$ hängt nicht von φ ab.

  ➞ nur $Y_\ell^0 \propto P_\ell(\cos\theta)$

  ➞ $\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \sum_{\ell} c_\ell\,\frac{u_\ell(r)}{r}\,P_\ell(\cos\theta)$

Zusammenhang mit der Streuamplitude

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Lösung des Streuproblems:

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = e^{ikz} + \psi_{\text{streu}}(\vec{r}) \stackrel{r\to\infty}{\longrightarrow} e^{ikz} + f_k(\theta)\,\frac{e^{ikr}}{r}$$

  kein Drehimpulseigenzustand, aber kann danach entwickelt werden:

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \sum_{\ell,m} c_{\ell m}\,\frac{u_\ell(r)}{r}\,Y_\ell^m(\theta,\varphi)$$

- radialsymmetrisches Potenzial $V(r)$ $\Rightarrow$ $\psi_{\vec{k}}$ hängt nicht von φ ab.

  ➞ nur $Y_\ell^0 \propto P_\ell(\cos\theta)$

  ➞ $\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \sum_{\ell} c_\ell\,\frac{u_\ell(r)}{r}\,P_\ell(\cos\theta) \equiv \sum_\ell \psi_\ell$, $\quad \psi_\ell$: „Partialwellen"

- einlaufende ebene Welle: $e^{ikz} = \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{\ell}\,(2\ell+1)\,j_{\ell}(kr)\,P_{\ell}(\cos\theta)$

- einlaufende ebene Welle: $e^{ikz} = \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{\ell}\,(2\ell+1)\, j_{\ell}(kr)\, P_{\ell}(\cos\theta)$

$$\Rightarrow \quad e^{ikz} \xrightarrow{r\to\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{\ell}\,(2\ell+1)\,\frac{\sin(kr-\ell\frac{\pi}{2})}{kr}\, P_{\ell}(\cos\theta)$$

- einlaufende ebene Welle: $e^{ikz} = \sum_{\ell=0}^{\infty} i^\ell \, (2\ell + 1) \, j_\ell(kr) \, P_\ell(\cos\theta)$

$$\Rightarrow \quad e^{ikz} \stackrel{r\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{\ell=0}^{\infty} i^\ell \, (2\ell+1) \, \frac{\sin(kr - \ell\frac{\pi}{2})}{kr} \, P_\ell(\cos\theta)$$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} i^\ell \, \frac{2\ell+1}{2ik} \left(\frac{e^{i(kr-\ell\frac{\pi}{2})}}{r} - \frac{e^{-i(kr-\ell\frac{\pi}{2})}}{r} \right) P_\ell(\cos\theta)$$

(auslaufende − einlaufende) Kugelwellen

- einlaufende ebene Welle: $e^{ikz} = \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{\ell}\,(2\ell+1)\,j_\ell(kr)\,P_\ell(\cos\theta)$

$$\Rightarrow \quad e^{ikz} \xrightarrow{r\to\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{\ell}\,(2\ell+1)\,\frac{\sin(kr-\ell\frac{\pi}{2})}{kr}\,P_\ell(\cos\theta)$$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{\ell}\,\frac{2\ell+1}{2ik}\left(\frac{e^{i(kr-\ell\frac{\pi}{2})}}{r} - \frac{e^{-i(kr-\ell\frac{\pi}{2})}}{r}\right) P_\ell(\cos\theta)$$

(auslaufende – einlaufende) Kugelwellen

- Entwicklung der Streuamplitude: $f_k(\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} f_\ell\,P_\ell(\cos\theta), \qquad f_\ell = f_\ell(E)$

- einlaufende ebene Welle: $e^{ikz} = \sum_{\ell=0}^{\infty} i^\ell \, (2\ell+1) \, j_\ell(kr) \, P_\ell(\cos\theta)$

$$\Rightarrow \quad e^{ikz} \xrightarrow{r\to\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} i^\ell \, (2\ell+1) \, \frac{\sin(kr - \ell\frac{\pi}{2})}{kr} \, P_\ell(\cos\theta)$$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} i^\ell \, \frac{2\ell+1}{2ik} \left(\frac{e^{i(kr-\ell\frac{\pi}{2})}}{r} - \frac{e^{-i(kr-\ell\frac{\pi}{2})}}{r} \right) P_\ell(\cos\theta)$$

(auslaufende – einlaufende) Kugelwellen

- Entwicklung der Streuamplitude: $f_k(\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} f_\ell \, P_\ell(\cos\theta), \qquad f_\ell = f_\ell(E)$

$$\Rightarrow \quad \psi_{\vec{k}}(\vec{r}) \xrightarrow{r\to\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{r} \left\{ i^\ell \, \frac{2\ell+1}{2ik} \left[e^{i(kr-\ell\frac{\pi}{2})} - e^{-i(kr-\ell\frac{\pi}{2})} \right] + f_\ell \, e^{ikr} \right\} P_\ell(\cos\theta)$$

- einlaufende ebene Welle: $e^{ikz} = \sum_{\ell=0}^{\infty} i^\ell\,(2\ell+1)\,j_\ell(kr)\,P_\ell(\cos\theta)$

$$\Rightarrow \quad e^{ikz} \xrightarrow{r\to\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} i^\ell\,(2\ell+1)\,\frac{\sin(kr-\ell\frac{\pi}{2})}{kr}\,P_\ell(\cos\theta)$$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} i^\ell\,\frac{2\ell+1}{2ik}\left(\frac{e^{i(kr-\ell\frac{\pi}{2})}}{r} - \frac{e^{-i(kr-\ell\frac{\pi}{2})}}{r}\right) P_\ell(\cos\theta)$$

(auslaufende – einlaufende) Kugelwellen

- Entwicklung der Streuamplitude: $f_k(\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} f_\ell\,P_\ell(\cos\theta), \qquad f_\ell = f_\ell(E)$

$$\Rightarrow \quad \psi_{\vec{k}}(\vec{r}) \xrightarrow{r\to\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{r}\left\{i^\ell\,\frac{2\ell+1}{2ik}\left[e^{i(kr-\ell\frac{\pi}{2})} - e^{-i(kr-\ell\frac{\pi}{2})}\right] + f_\ell\,e^{ikr}\right\} P_\ell(\cos\theta)$$

$$f_\ell\,e^{ikr} = f_\ell\,e^{i\ell\frac{\pi}{2}}\,e^{i(kr-\ell\frac{\pi}{2})} = f_\ell\,i^\ell\,e^{i(kr-\ell\frac{\pi}{2})}$$

- einlaufende ebene Welle: $e^{ikz} = \sum_{\ell=0}^{\infty} i^\ell \, (2\ell+1) \, j_\ell(kr) \, P_\ell(\cos\theta)$

$$\Rightarrow \quad e^{ikz} \xrightarrow{r\to\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} i^\ell \, (2\ell+1) \, \frac{\sin(kr - \ell\frac{\pi}{2})}{kr} \, P_\ell(\cos\theta)$$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} i^\ell \, \frac{2\ell+1}{2ik} \left(\frac{e^{i(kr-\ell\frac{\pi}{2})}}{r} - \frac{e^{-i(kr-\ell\frac{\pi}{2})}}{r} \right) P_\ell(\cos\theta)$$

(auslaufende − einlaufende) Kugelwellen

- Entwicklung der Streuamplitude: $f_k(\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} f_\ell \, P_\ell(\cos\theta), \qquad f_\ell = f_\ell(E)$

$$\Rightarrow \quad \psi_{\vec{k}}(\vec{r}) \xrightarrow{r\to\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{r} \left\{ i^\ell \, \frac{2\ell+1}{2ik} \left[\left(1 + \frac{2ik}{2\ell+1} f_\ell\right) e^{i(kr-\ell\frac{\pi}{2})} - e^{-i(kr-\ell\frac{\pi}{2})} \right] \right\} P_\ell(\cos\theta)$$

$$f_\ell \, e^{ikr} = f_\ell \, e^{i\ell\frac{\pi}{2}} \, e^{i(kr-\ell\frac{\pi}{2})} = f_\ell \, i^\ell \, e^{i(kr-\ell\frac{\pi}{2})}$$

- $\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \sum_{\ell} c_\ell \frac{u_\ell(r)}{r} P_\ell(\cos\theta)$

$$\xrightarrow{r\to\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{r} \left\{ i^\ell \frac{2\ell+1}{2ik} \left[\left(1 + \frac{2ik}{2\ell+1} f_\ell\right) e^{i(kr-\ell\frac{\pi}{2})} - e^{-i(kr-\ell\frac{\pi}{2})} \right] \right\} P_\ell(\cos\theta)$$

$$\Rightarrow \quad u_\ell(r\to\infty) \propto i^\ell \frac{2\ell+1}{2ik} \left[\left(1 + \frac{2ik}{2\ell+1} f_\ell\right) e^{i(kr-\ell\frac{\pi}{2})} - e^{-i(kr-\ell\frac{\pi}{2})} \right]$$

- $\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \sum_\ell c_\ell \frac{u_\ell(r)}{r} P_\ell(\cos\theta)$

$$\xrightarrow{r\to\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{r} \left\{ i^\ell \, \frac{2\ell+1}{2ik} \left[\left(1 + \frac{2ik}{2\ell+1} f_\ell\right) e^{i(kr-\ell\frac{\pi}{2})} - e^{-i(kr-\ell\frac{\pi}{2})} \right] \right\} P_\ell(\cos\theta)$$

$$\Rightarrow \quad u_\ell(r\to\infty) \propto i^\ell \, \frac{2\ell+1}{2ik} \left[\left(1 + \frac{2ik}{2\ell+1} f_\ell\right) e^{i(kr-\ell\frac{\pi}{2})} - e^{-i(kr-\ell\frac{\pi}{2})} \right]$$

$$\overset{!}{\propto} \sin(kr - \ell\tfrac{\pi}{2} + \delta_\ell)$$

- $$\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \sum_\ell c_\ell \frac{u_\ell(r)}{r} P_\ell(\cos\theta)$$
$$\xrightarrow{r\to\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{r} \left\{ i^\ell \frac{2\ell+1}{2ik} \left[\left(1 + \frac{2ik}{2\ell+1} f_\ell\right) e^{i(kr-\ell\frac{\pi}{2})} - e^{-i(kr-\ell\frac{\pi}{2})} \right] \right\} P_\ell(\cos\theta)$$
$$\Rightarrow \quad u_\ell(r\to\infty) \propto i^\ell \frac{2\ell+1}{2ik} \left[\left(1 + \frac{2ik}{2\ell+1} f_\ell\right) e^{i(kr-\ell\frac{\pi}{2})} - e^{-i(kr-\ell\frac{\pi}{2})} \right]$$
$$\overset{!}{\propto} \sin(kr - \ell\tfrac{\pi}{2} + \delta_\ell)$$
$$= \frac{1}{2i} \left[e^{i\delta_\ell} e^{i(kr-\ell\frac{\pi}{2})} - e^{-i\delta_\ell} e^{-i(kr-\ell\frac{\pi}{2})} \right]$$

- $$\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \sum_\ell c_\ell \frac{u_\ell(r)}{r} P_\ell(\cos\theta)$$
$$\xrightarrow{r\to\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{r} \left\{ i^\ell \frac{2\ell+1}{2ik} \left[\left(1 + \frac{2ik}{2\ell+1} f_\ell\right) e^{i(kr-\ell\frac{\pi}{2})} - e^{-i(kr-\ell\frac{\pi}{2})} \right] \right\} P_\ell(\cos\theta)$$
$$\Rightarrow \quad u_\ell(r\to\infty) \propto i^\ell \frac{2\ell+1}{2ik} \left[\left(1 + \frac{2ik}{2\ell+1} f_\ell\right) e^{i(kr-\ell\frac{\pi}{2})} - e^{-i(kr-\ell\frac{\pi}{2})} \right]$$
$$\overset{!}{\propto} \sin(kr - \ell\tfrac{\pi}{2} + \delta_\ell)$$
$$= \frac{1}{2i} \left[e^{i\delta_\ell} e^{i(kr-\ell\frac{\pi}{2})} - e^{-i\delta_\ell} e^{-i(kr-\ell\frac{\pi}{2})} \right]$$
$$= \frac{1}{2i} e^{-i\delta_\ell} \left[e^{2i\delta_\ell} e^{i(kr-\ell\frac{\pi}{2})} - e^{-i(kr-\ell\frac{\pi}{2})} \right]$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- $\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \sum_\ell c_\ell \, \frac{u_\ell(r)}{r} \, P_\ell(\cos\theta)$

$$\xrightarrow{r\to\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{r} \left\{ i^\ell \, \frac{2\ell+1}{2ik} \left[\left(1 + \frac{2ik}{2\ell+1} f_\ell\right) e^{i(kr-\ell\frac{\pi}{2})} - e^{-i(kr-\ell\frac{\pi}{2})} \right] \right\} P_\ell(\cos\theta)$$

$$\Rightarrow \quad u_\ell(r\to\infty) \propto i^\ell \, \frac{2\ell+1}{2ik} \left[\left(1 + \frac{2ik}{2\ell+1} f_\ell\right) e^{i(kr-\ell\frac{\pi}{2})} - e^{-i(kr-\ell\frac{\pi}{2})} \right]$$

$$\overset{!}{\propto} \sin(kr - \ell\tfrac{\pi}{2} + \delta_\ell)$$

$$= \frac{1}{2i} \left[e^{i\delta_\ell} e^{i(kr-\ell\frac{\pi}{2})} - e^{-i\delta_\ell} e^{-i(kr-\ell\frac{\pi}{2})} \right]$$

$$= \frac{1}{2i} e^{-i\delta_\ell} \left[e^{2i\delta_\ell} e^{i(kr-\ell\frac{\pi}{2})} - e^{-i(kr-\ell\frac{\pi}{2})} \right]$$

$$\Rightarrow \quad e^{2i\delta_\ell} = 1 + \frac{2ik}{2\ell+1} f_\ell$$

- $\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \sum_{\ell} c_\ell \frac{u_\ell(r)}{r} P_\ell(\cos\theta)$

$$\xrightarrow{r\to\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{r} \left\{ i^\ell \frac{2\ell+1}{2ik} \left[\left(1 + \frac{2ik}{2\ell+1} f_\ell\right) e^{i(kr-\ell\frac{\pi}{2})} - e^{-i(kr-\ell\frac{\pi}{2})} \right] \right\} P_\ell(\cos\theta)$$

$$\Rightarrow \quad u_\ell(r\to\infty) \propto i^\ell \frac{2\ell+1}{2ik} \left[\left(1 + \frac{2ik}{2\ell+1} f_\ell\right) e^{i(kr-\ell\frac{\pi}{2})} - e^{-i(kr-\ell\frac{\pi}{2})} \right]$$

$$\stackrel{!}{\propto} \sin(kr - \ell\tfrac{\pi}{2} + \delta_\ell)$$

$$= \frac{1}{2i} \left[e^{i\delta_\ell} e^{i(kr-\ell\frac{\pi}{2})} - e^{-i\delta_\ell} e^{-i(kr-\ell\frac{\pi}{2})} \right]$$

$$= \frac{1}{2i} e^{-i\delta_\ell} \left[e^{2i\delta_\ell} e^{i(kr-\ell\frac{\pi}{2})} - e^{-i(kr-\ell\frac{\pi}{2})} \right]$$

$$\Rightarrow \quad e^{2i\delta_\ell} = 1 + \frac{2ik}{2\ell+1} f_\ell$$

$$\Rightarrow \quad f_\ell = \frac{2\ell+1}{2ik} \left(e^{2i\delta_\ell} - 1 \right) = \frac{2\ell+1}{2ik} \left(e^{i\delta_\ell} - e^{-i\delta_\ell} \right) e^{i\delta_\ell} = \frac{2\ell+1}{k} \sin\delta_\ell e^{i\delta_\ell}$$

$$\boxed{f_\ell = \frac{2\ell + 1}{k} \sin \delta_\ell e^{i\delta_\ell}}$$

$$\boxed{f_\ell = \frac{2\ell+1}{k}\sin\delta_\ell e^{i\delta_\ell}}$$

$$\Rightarrow \quad f_k(\theta) = \frac{1}{k}\sum_\ell (2\ell+1)\;\sin\delta_\ell\; e^{i\delta_\ell}\; P_\ell(\cos\theta)$$

$$\boxed{f_\ell = \frac{2\ell+1}{k} \sin\delta_\ell e^{i\delta_\ell}}$$

$$\Rightarrow \quad f_k(\theta) = \frac{1}{k}\sum_\ell (2\ell+1)\ \sin\delta_\ell\ e^{i\delta_\ell}\ P_\ell(\cos\theta)$$

- differenzieller Wirkungsquerschnitt:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left|f_k(\theta)\right|^2 = \frac{1}{k^2}\sum_{\ell,\ell'}(2\ell+1)(2\ell'+1)\ \sin\delta_\ell \sin\delta'_\ell\ e^{i(\delta_\ell - \delta_{\ell'})}\ P_\ell(\cos\theta)P_{\ell'}(\cos\theta)$$

$$\boxed{f_\ell = \frac{2\ell+1}{k} \sin\delta_\ell e^{i\delta_\ell}}$$

$$\Rightarrow \quad f_k(\theta) = \frac{1}{k}\sum_\ell (2\ell+1)\, \sin\delta_\ell\, e^{i\delta_\ell}\, P_\ell(\cos\theta)$$

- differenzieller Wirkungsquerschnitt:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left|f_k(\theta)\right|^2 = \frac{1}{k^2}\sum_{\ell,\ell'} (2\ell+1)(2\ell'+1)\, \sin\delta_\ell \sin\delta'_\ell\, e^{i(\delta_\ell - \delta_{\ell'})}\, P_\ell(\cos\theta) P_{\ell'}(\cos\theta)$$

Die verschiedenen Partialwellen interferieren mit einander:

Die im Detektor gemessenen Teilchen haben einen definierten Impuls $\hbar\vec{k}\,'$

$\Rightarrow$ keinen definierten Drehimpuls

- totaler Wirkungsquerschnitt:

$$\sigma_{\text{tot}} = \int d\Omega \, \frac{d\sigma}{d\Omega} = 2\pi \int_{-1}^{1} d\cos\theta \, \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta)$$

- totaler Wirkungsquerschnitt:

$$\sigma_{\text{tot}} = \int d\Omega \, \frac{d\sigma}{d\Omega} = 2\pi \int_{-1}^{1} d\cos\theta \, \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta)$$

Es gilt: $\int_{-1}^{1} dx \, P_\ell(x) P_{\ell'}(x) = \frac{2}{2\ell+1} \delta_{\ell\ell'}$

- totaler Wirkungsquerschnitt:

$$\sigma_{\mathrm{tot}} = \int d\Omega \, \tfrac{d\sigma}{d\Omega} = 2\pi \int_{-1}^{1} d\cos\theta \, \tfrac{d\sigma}{d\Omega}(\theta)$$

Es gilt: $\int_{-1}^{1} dx \, P_\ell(x) P_{\ell'}(x) = \tfrac{2}{2\ell+1} \delta_{\ell\ell'}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\sigma_{\mathrm{tot}} = \sum_\ell \sigma_\ell, \qquad \sigma_\ell = \frac{4\pi}{k^2}(2\ell+1)\,\sin^2\delta_\ell \quad \text{„partieller WQ"}}$$

- totaler Wirkungsquerschnitt:

$$\sigma_{\text{tot}} = \int d\Omega \, \frac{d\sigma}{d\Omega} = 2\pi \int_{-1}^{1} d\cos\theta \, \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta)$$

Es gilt: $\int_{-1}^{1} dx\, P_\ell(x) P_{\ell'}(x) = \frac{2}{2\ell+1}\delta_{\ell\ell'}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\sigma_{\text{tot}} = \sum_\ell \sigma_\ell, \qquad \sigma_\ell = \frac{4\pi}{k^2}(2\ell+1)\,\sin^2\delta_\ell \quad \text{„partieller WQ"}}$$

keine Interferenzen beim totalen Wirkungsquerschnitt:

Grund: Nach Integration über $d\Omega$ ist die Impulsrichtung unbestimmt.
$\Rightarrow$ Drehimpuls ℓ im Prinzip scharf messbar

- Optisches Theorem:

  Für die Legendre-Polynome gilt: $P_\ell(1) = 1$

  $$\Rightarrow \; f_k(\theta = 0) = \frac{1}{k} \sum_\ell (2\ell + 1) \sin \delta_\ell \, e^{i\delta_\ell}$$

- Optisches Theorem:

  Für die Legendre-Polynome gilt: $P_\ell(1) = 1$

  $$\Rightarrow \quad f_k(\theta = 0) = \frac{1}{k} \sum_\ell (2\ell + 1) \, \sin\delta_\ell \, e^{i\delta_\ell}$$

  $$\Rightarrow \quad \frac{4\pi}{k} \, \mathrm{Im}\, f_k(\theta = 0) = \frac{4\pi}{k^2} \sum_\ell (2\ell + 1) \, \sin^2\delta_\ell = \sigma_{\mathrm{tot}} \qquad \checkmark$$

- Optisches Theorem:

  Für die Legendre-Polynome gilt: $P_\ell(1) = 1$

  $$\Rightarrow \quad f_k(\theta = 0) = \frac{1}{k} \sum_\ell (2\ell + 1) \, \sin \delta_\ell \, e^{i\delta_\ell}$$

  $$\Rightarrow \quad \frac{4\pi}{k} \operatorname{Im} f_k(\theta = 0) = \frac{4\pi}{k^2} \sum_\ell (2\ell + 1) \, \sin^2 \delta_\ell = \sigma_{\text{tot}} \qquad \checkmark$$

- Jede Partialwelle erfüllt das optische Theorem separat:

  $$\frac{4\pi}{k} \operatorname{Im} f_\ell \, P_\ell(\cos(0)) = \frac{4\pi}{k} \operatorname{Im} f_\ell = \frac{4\pi}{k^2} \, (2\ell + 1) \, \sin^2 \delta_\ell = \sigma_\ell$$