Argand-Diagramme

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Streuamplitude für elastische Streuung (in Anwesenheit inelast. Kanäle):

$$f_\ell^{\text{el}} = \frac{2\ell+1}{2ik}\left(\eta_\ell\, e^{2i\delta_\ell} - 1\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{2k}{2\ell+1} f_\ell^{\text{el}} = \mathrm{i} + \eta_\ell\, e^{i(2\delta_\ell - \frac{\pi}{2})}$$

Argand-Diagramme

- Streuamplitude für elastische Streuung (in Anwesenheit inelast. Kanäle):

$$f_\ell^{\text{el}} = \tfrac{2\ell+1}{2ik}\left(\eta_\ell\, e^{2i\delta_\ell} - 1\right) \quad \Rightarrow \quad \tfrac{2k}{2\ell+1} f_\ell^{\text{el}} = \mathrm{i} + \eta_\ell\, e^{i(2\delta_\ell - \frac{\pi}{2})}$$

- rein elastische Streuung ($\eta_\ell = 1$): $\tfrac{2k}{2\ell+1} f_\ell^{\text{el}}(E) = \mathrm{i} + e^{i(2\delta_\ell(E) - \frac{\pi}{2})}$

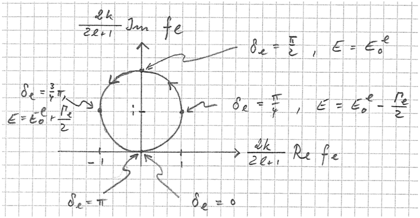
Argand-Diagramme

- Streuamplitude für elastische Streuung (in Anwesenheit inelast. Kanäle):

$$f_\ell^{el} = \frac{2\ell+1}{2ik}\left(\eta_\ell\, e^{2i\delta_\ell} - 1\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{2k}{2\ell+1} f_\ell^{el} = i + \eta_\ell\, e^{i(2\delta_\ell - \frac{\pi}{2})}$$

- rein elastische Streuung ($\eta_\ell = 1$): $\frac{2k}{2\ell+1} f_\ell^{el}(E) = i + e^{i(2\delta_\ell(E) - \frac{\pi}{2})}$

  → Punkte liegen auf Einheitskreis mit Mittelpunkt i:



Argand-Diagramme

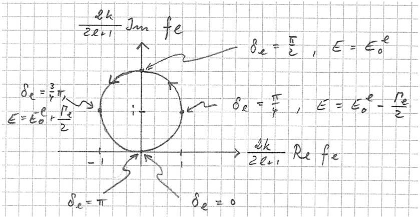
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Streuamplitude für elastische Streuung (in Anwesenheit inelast. Kanäle):

$$f_\ell^{\text{el}} = \frac{2\ell+1}{2ik}\left(\eta_\ell\, e^{2i\delta_\ell} - 1\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{2k}{2\ell+1} f_\ell^{\text{el}} = \mathrm{i} + \eta_\ell\, e^{i(2\delta_\ell - \frac{\pi}{2})}$$

- rein elastische Streuung ($\eta_\ell = 1$): $\frac{2k}{2\ell+1} f_\ell^{\text{el}}(E) = \mathrm{i} + e^{i(2\delta_\ell(E) - \frac{\pi}{2})}$

  → Punkte liegen auf Einheitskreis mit Mittelpunkt i:



- Resonanzenergie: $\delta_\ell = (2n+1)\frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; 2\delta_\ell - \frac{\pi}{2} = 2\pi n + \frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; \frac{2k}{2\ell+1} f_\ell(E_0^\ell) = 2\mathrm{i}$

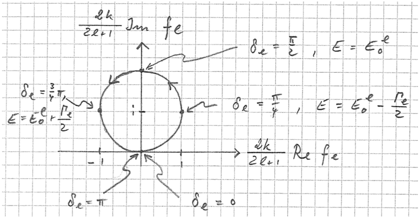
Argand-Diagramme

- Streuamplitude für elastische Streuung (in Anwesenheit inelast. Kanäle):

$$f_\ell^{\mathrm{el}} = \frac{2\ell+1}{2ik}\left(\eta_\ell\, e^{2i\delta_\ell} - 1\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{2k}{2\ell+1} f_\ell^{\mathrm{el}} = \mathrm{i} + \eta_\ell\, e^{i(2\delta_\ell - \frac{\pi}{2})}$$

- rein elastische Streuung ($\eta_\ell = 1$): $\frac{2k}{2\ell+1} f_\ell^{\mathrm{el}}(E) = \mathrm{i} + e^{i(2\delta_\ell(E) - \frac{\pi}{2})}$

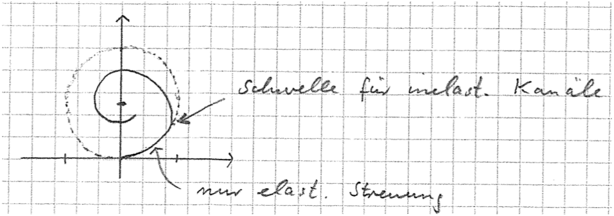
  $\rightarrow$ Punkte liegen auf Einheitskreis mit Mittelpunkt i:



- Resonanzenergie: $\delta_\ell = (2n+1)\frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; 2\delta_\ell - \frac{\pi}{2} = 2\pi n + \frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; \frac{2k}{2\ell+1} f_\ell(E_0^\ell) = 2\mathrm{i}$
- Breit-Wigner: $\frac{2k}{2\ell+1} f_\ell(E_0^\ell \pm \frac{\Gamma_\ell}{2}) = -2\,\frac{1}{\pm 1 + \mathrm{i}} = \mp 2\,\frac{1}{1 \pm \mathrm{i}} = \mp 2\,\frac{1 \mp \mathrm{i}}{1+1} = \mathrm{i} \mp 1$

Argand-Diagramme

- Streuamplitude für elastische Streuung: $\frac{2k}{2\ell+1} f_\ell^{\mathrm{el}}(E) = \mathrm{i} + \eta_\ell(E)\, e^{i(2\delta_\ell(E) - \frac{\pi}{2})}$
- Anwesenheit inelastischer Kanäle: $\eta_\ell < 1$
  - $\frac{2k}{2\ell+1} f_\ell^{\mathrm{el}}(E)$ liegt innerhalb des elastischen Einheitskreises
  - Abstand von i: $\eta_\ell(E)$, energieabhängig
  - ansonsten ähnliches Verhalten



4. Vielteilchentheorie („zweite Quantisierung”)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

4.1 Bosonen und Fermionen

4.1 Bosonen und Fermionen

- beliebiger Einteilchen-Zustand: $|\psi\rangle = \sum_i c_i\, |i\rangle$
  - $\{|i\rangle\}$: vollständige Basis des Einteilchen-Hilbert-Raums (in der Regel orthonormiert)
  - falls Basis kontinuierlich: $\sum \to \int$

4.1 Bosonen und Fermionen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- beliebiger Einteilchen-Zustand: $|\psi\rangle = \sum_i c_i \, |i\rangle$
  - $\{|i\rangle\}$: vollständige Basis des Einteilchen-Hilbert-Raums (in der Regel orthonormiert)
  - falls Basis kontinuierlich: $\sum \to \int$
- Basis des N-Teilchen-Hilbert-Raums: $|i_1, i_2, \ldots, i_N\rangle \equiv |i_1\rangle_1 \, |i_2\rangle_2 \, \ldots |i_N\rangle_N$
  - direktes Produkt von Einteilchen-Basiszuständen
  - $|i\rangle_j$: Das $j - te$ Teilchen befindet sich im Zustand $|i\rangle$.

4.1 Bosonen und Fermionen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- beliebiger Einteilchen-Zustand: $|\psi\rangle = \sum_i c_i \, |i\rangle$
  - $\{|i\rangle\}$: vollständige Basis des Einteilchen-Hilbert-Raums (in der Regel orthonormiert)
  - falls Basis kontinuierlich: $\sum \to \int$
- Basis des N-Teilchen-Hilbert-Raums: $|i_1, i_2, \ldots, i_N\rangle \equiv |i_1\rangle_1 \, |i_2\rangle_2 \, \ldots |i_N\rangle_N$
  - direktes Produkt von Einteilchen-Basiszuständen
  - $|i\rangle_j$: Das $j-te$ Teilchen befindet sich im Zustand $|i\rangle$.

→ allgemeiner N-Teilchen-Zustand: $|\psi\rangle = \sum_{i_1,\ldots i_N} c_{i_1,\ldots i_N} \, |i_1,\ldots i_N\rangle$

- z.B. Ortsraumdarstellung:

$$|\psi\rangle = \int d^3x_1 \dots \int d^3x_N \, \psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) \, |\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N\rangle$$

- z.B. Ortsraumdarstellung:

$$|\psi\rangle = \int d^3x_1 \ldots \int d^3x_N \, \psi(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_N) \, |\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_N\rangle$$

$$\Rightarrow \ \langle\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_N|\psi\rangle = \int d^3x'_1 \ldots \int d^3x'_N \, \psi(\vec{x}'_1, \ldots, \vec{x}'_N) \, \langle\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_N|\vec{x}'_1, \ldots, \vec{x}'_N\rangle$$

- z.B. Ortsraumdarstellung:

$$|\psi\rangle = \int d^3x_1 \dots \int d^3x_N \, \psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) \, |\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N\rangle$$

$$\Rightarrow \; \langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N | \psi \rangle = \int d^3x'_1 \dots \int d^3x'_N \, \psi(\vec{x}'_1, \dots, \vec{x}'_N) \, \langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N | \vec{x}'_1, \dots, \vec{x}'_N \rangle$$

$$\langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N | \vec{x}'_1, \dots, \vec{x}'_N \rangle = \langle \vec{x}_1 |_1 \dots \langle \vec{x}_N |_N \; | \vec{x}'_1 \rangle_1 \dots | \vec{x}'_N \rangle_N$$

- z.B. Ortsraumdarstellung:

$$|\psi\rangle = \int d^3x_1 \dots \int d^3x_N \, \psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) \, |\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N\rangle$$

$$\Rightarrow \; \langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N | \psi \rangle = \int d^3x_1' \dots \int d^3x_N' \, \psi(\vec{x}_1', \dots, \vec{x}_N') \, \langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N | \vec{x}_1', \dots, \vec{x}_N' \rangle$$

$$\begin{aligned} \langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N | \vec{x}_1', \dots, \vec{x}_N' \rangle &= \langle \vec{x}_1 |_1 \dots \langle \vec{x}_N |_N \; | \vec{x}_1' \rangle_1 \dots | \vec{x}_N' \rangle_N \\ &= \langle \vec{x}_1 | \vec{x}_1' \rangle \dots \langle \vec{x}_N | \vec{x}_N' \rangle \end{aligned}$$

- z.B. Ortsraumdarstellung:

$$|\psi\rangle = \int d^3x_1 \dots \int d^3x_N \, \psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) \, |\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N\rangle$$

$$\Rightarrow \; \langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N | \psi \rangle = \int d^3x_1' \dots \int d^3x_N' \, \psi(\vec{x}_1', \dots, \vec{x}_N') \, \langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N | \vec{x}_1', \dots, \vec{x}_N' \rangle$$

$$\begin{aligned}\langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N | \vec{x}_1', \dots, \vec{x}_N' \rangle &= \langle \vec{x}_1 |_1 \dots \langle \vec{x}_N |_N \; | \vec{x}_1' \rangle_1 \dots | \vec{x}_N' \rangle_N \\ &= \langle \vec{x}_1 | \vec{x}_1' \rangle \dots \langle \vec{x}_N | \vec{x}_N' \rangle \\ &= \delta^3(\vec{x}_1 - \vec{x}_1') \dots \delta^3(\vec{x}_N - \vec{x}_N')\end{aligned}$$

- z.B. Ortsraumdarstellung:

$$|\psi\rangle = \int d^3x_1 \dots \int d^3x_N \, \psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) \, |\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N\rangle$$

$$\Rightarrow \; \langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N | \psi \rangle = \int d^3x_1' \dots \int d^3x_N' \, \psi(\vec{x}_1', \dots, \vec{x}_N') \, \langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N | \vec{x}_1', \dots, \vec{x}_N' \rangle$$

$$\begin{aligned} \langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N | \vec{x}_1', \dots, \vec{x}_N' \rangle &= \langle \vec{x}_1 |_1 \dots \langle \vec{x}_N |_N \; |\vec{x}_1'\rangle_1 \dots |\vec{x}_N'\rangle_N \\ &= \langle \vec{x}_1 | \vec{x}_1' \rangle \dots \langle \vec{x}_N | \vec{x}_N' \rangle \\ &= \delta^3(\vec{x}_1 - \vec{x}_1') \dots \delta^3(\vec{x}_N - \vec{x}_N') \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \; \langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N | \psi \rangle = \psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) \qquad \checkmark$$

- Im Folgenden verwendete Kurzschreibweise:

$$|\psi\rangle = \sum_{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N} \psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) \, |\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N\rangle$$

- Transpositionsoperator P_{ij}: vertauscht das i-te mir dem j-ten Teilchen

- Transpositionsoperator P_{ij}: vertauscht das i-te mir dem j-ten Teilchen

$$P_{ij}\,|i_1,\ldots,i_i,\ldots,i_j,\ldots,i_N\rangle = P_{ij}\Big(|i_1\rangle_1\ldots|i_i\rangle_i\ldots|i_j\rangle_j\ldots|i_N\rangle_N\Big)$$
$$= |i_1\rangle_1\ldots|i_i\rangle_j\ldots|i_j\rangle_i\ldots|i_N\rangle_N$$

- Transpositionsoperator P_{ij}: vertauscht das i-te mir dem j-ten Teilchen

$$P_{ij}\,|i_1,\ldots,i_i,\ldots,i_j,\ldots,i_N\rangle = P_{ij}\big(|i_1\rangle_1\ldots|i_i\rangle_i\ldots|i_j\rangle_j\ldots|i_N\rangle_N\big)$$
$$= |i_1\rangle_1\ldots|i_i\rangle_j\ldots|i_j\rangle_i\ldots|i_N\rangle_N$$
$$= |i_1\rangle_1\ldots|i_j\rangle_i\ldots|i_i\rangle_j\ldots|i_N\rangle_N$$

- Transpositionsoperator P_{ij}: vertauscht das i-te mir dem j-ten Teilchen

$$
\begin{aligned}
P_{ij}\,|i_1,\ldots,i_i,\ldots,i_j,\ldots,i_N\rangle &= P_{ij}\big(|i_1\rangle_1\ldots|i_i\rangle_i\ldots|i_j\rangle_j\ldots|i_N\rangle_N\big)\\
&= \quad |i_1\rangle_1\ldots|i_i\rangle_j\ldots|i_j\rangle_i\ldots|i_N\rangle_N\\
&= \quad |i_1\rangle_1\ldots|i_j\rangle_i\ldots|i_i\rangle_j\ldots|i_N\rangle_N\\
&= |i_1,\ldots,i_j,\ldots,i_i,\ldots,i_N\rangle
\end{aligned}
$$

- Transpositionsoperator P_{ij}: vertauscht das i-te mir dem j-ten Teilchen

$$\begin{aligned} P_{ij}\,|i_1, \dots, i_i, \dots, i_j, \dots, i_N\rangle &= P_{ij}\big(|i_1\rangle_1 \dots |i_i\rangle_i \dots |i_j\rangle_j \dots |i_N\rangle_N\big) \\ &= \qquad |i_1\rangle_1 \dots |i_i\rangle_j \dots |i_j\rangle_i \dots |i_N\rangle_N \\ &= \qquad |i_1\rangle_1 \dots |i_j\rangle_i \dots |i_i\rangle_j \dots |i_N\rangle_N \\ &= |i_1, \dots, i_j, \dots, i_i, \dots, i_N\rangle \end{aligned}$$

- Ortsraumdarstellung:

$$P_{ij}\,|\psi\rangle = P_{ij} \sum_{\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_N} \psi(\dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_j, \dots)\,|\dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_j, \dots\rangle$$

- Transpositionsoperator P_{ij}: vertauscht das i-te mir dem j-ten Teilchen

$$
\begin{aligned}
P_{ij}\,|i_1,\dots,i_i,\dots,i_j,\dots,i_N\rangle &= P_{ij}\big(|i_1\rangle_1 \dots |i_i\rangle_i \dots |i_j\rangle_j \dots |i_N\rangle_N\big)\\
&= |i_1\rangle_1 \dots |i_i\rangle_j \dots |i_j\rangle_i \dots |i_N\rangle_N\\
&= |i_1\rangle_1 \dots |i_j\rangle_i \dots |i_i\rangle_j \dots |i_N\rangle_N\\
&= |i_1,\dots,i_j,\dots,i_i,\dots,i_N\rangle
\end{aligned}
$$

- Ortsraumdarstellung:

$$
\begin{aligned}
P_{ij}\,|\psi\rangle &= P_{ij}\sum_{\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_N} \psi(\dots,\vec{x}_i,\dots,\vec{x}_j,\dots)\,|\dots,\vec{x}_i,\dots,\vec{x}_j,\dots\rangle\\
&= \sum_{\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_N} \psi(\dots,\vec{x}_i,\dots,\vec{x}_j,\dots)\,|\dots,\vec{x}_j,\dots,\vec{x}_i,\dots\rangle
\end{aligned}
$$

- Transpositionsoperator P_{ij}: vertauscht das i-te mir dem j-ten Teilchen

$$
\begin{aligned}
P_{ij}\,|i_1,\dots,i_i,\dots,i_j,\dots,i_N\rangle &= P_{ij}\big(|i_1\rangle_1 \dots |i_i\rangle_i \dots |i_j\rangle_j \dots |i_N\rangle_N\big)\\
&= \quad |i_1\rangle_1 \dots |i_i\rangle_j \dots |i_j\rangle_i \dots |i_N\rangle_N\\
&= \quad |i_1\rangle_1 \dots |i_j\rangle_i \dots |i_i\rangle_j \dots |i_N\rangle_N\\
&= |i_1,\dots,i_j,\dots,i_i,\dots,i_N\rangle
\end{aligned}
$$

- Ortsraumdarstellung:

$$
\begin{aligned}
P_{ij}\,|\psi\rangle &= P_{ij}\sum_{\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_N}\psi(\dots,\vec{x}_i,\dots,\vec{x}_j,\dots)\,|\dots,\vec{x}_i,\dots,\vec{x}_j,\dots\rangle\\
&= \sum_{\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_N}\psi(\dots,\vec{x}_i,\dots,\vec{x}_j,\dots)\,|\dots,\vec{x}_j,\dots,\vec{x}_i,\dots\rangle\\
&\overset{\vec{x}_i\leftrightarrow\vec{x}_j}{=} \sum_{\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_N}\psi(\dots,\vec{x}_j,\dots,\vec{x}_i,\dots)\,|\dots,\vec{x}_i,\dots,\vec{x}_j,\dots\rangle
\end{aligned}
$$

$$P_{ij}\,|\psi\rangle = P_{ij} \sum_{\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_N} \psi(\ldots, \vec{x}_i, \ldots, \vec{x}_j, \ldots)\,|\ldots, \vec{x}_i, \ldots, \vec{x}_j, \ldots\rangle$$

$$= \sum_{\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_N} \psi(\ldots, \vec{x}_j, \ldots, \vec{x}_i, \ldots)\,|\ldots, \vec{x}_i, \ldots, \vec{x}_j, \ldots\rangle$$

→ Falls $\psi(\ldots, \vec{x}_i, \ldots, \vec{x}_j, \ldots)$ die Ortsraumwellenfunktion von $|\psi\rangle$ ist, ist $\psi(\ldots, \vec{x}_j, \ldots, \vec{x}_i, \ldots)$ die Ortsraumwellenfunktion von $P_{ij}\,|\psi\rangle$

$$P_{ij}\,|\psi\rangle = P_{ij} \sum_{\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_N} \psi(\dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_j, \dots)\,|\dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_j, \dots\rangle$$

$$= \sum_{\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_N} \psi(\dots, \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_i, \dots)\,|\dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_j, \dots\rangle$$

→ Falls $\psi(\dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_j, \dots)$ die Ortsraumwellenfunktion von $|\psi\rangle$ ist,
ist $\psi(\dots, \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_i, \dots)$ die Ortsraumwellenfunktion von $P_{ij}\,|\psi\rangle$

- Offensichtlich gilt: $P_{ij}^2|\psi\rangle = |\psi\rangle \;\Rightarrow\; P_{ij}^2 = \mathbb{1}$ → Eigenwerte von $P_{ij} = \pm 1$

$$P_{ij}\,|\psi\rangle = P_{ij} \sum_{\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_N} \psi(\dots,\vec{x}_i,\dots,\vec{x}_j,\dots)\,|\dots,\vec{x}_i,\dots,\vec{x}_j,\dots\rangle$$

$$= \sum_{\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_N} \psi(\dots,\vec{x}_j,\dots,\vec{x}_i,\dots)\,|\dots,\vec{x}_i,\dots,\vec{x}_j,\dots\rangle$$

→ Falls $\psi(\dots,\vec{x}_i,\dots,\vec{x}_j,\dots)$ die Ortsraumwellenfunktion von $|\psi\rangle$ ist,
ist $\psi(\dots,\vec{x}_j,\dots,\vec{x}_i,\dots)$ die Ortsraumwellenfunktion von $P_{ij}\,|\psi\rangle$

- Offensichtlich gilt: $P_{ij}^2|\psi\rangle = |\psi\rangle \quad \Rightarrow \quad P_{ij}^2 = \mathbb{1}$ → Eigenwerte von $P_{ij} = \pm 1$
- Jede beliebige Permutation $P \in S_N$ von N Teilchen kann als Produkt von Transpositionen dargestellt werden.

→ Notation:

$$(-1)^P = \left\{ \begin{array}{c} +1 \\ -1 \end{array} \right\} \text{ falls die Zahl der Transpositionen } \left\{ \begin{array}{c} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{array} \right\} \text{ ist}$$

Identische Teilchen

Betrachte:

- N identische (= ununterscheidbare) Teilchen
- Observable $\leftrightarrow$ Operator $\hat{\mathcal{O}}$
- Eigenzustand $|\psi_\lambda\rangle$ von $\hat{\mathcal{O}}$ zum Eigenwert (= Messwert) λ: $\quad \hat{\mathcal{O}}|\psi_\lambda\rangle = \lambda|\psi_\lambda\rangle$
- Permutation $P \in S_N$, $\quad P|\psi_\lambda\rangle \equiv |P\psi_\lambda\rangle$

Identische Teilchen

Betrachte:

- N identische (= ununterscheidbare) Teilchen
- Observable $\leftrightarrow$ Operator $\hat{\mathcal{O}}$
- Eigenzustand $|\psi_\lambda\rangle$ von $\hat{\mathcal{O}}$ zum Eigenwert (= Messwert) λ: $\quad \hat{\mathcal{O}}|\psi_\lambda\rangle = \lambda|\psi_\lambda\rangle$
- Permutation $P \in S_N$, $\quad P|\psi_\lambda\rangle \equiv |P\psi_\lambda\rangle$

Teilchen ununterscheidbar $\Rightarrow$ $\hat{\mathcal{O}}|P\psi_\lambda\rangle = \lambda|P\psi_\lambda\rangle$

$$\Leftrightarrow \quad \hat{\mathcal{O}}P|\psi_\lambda\rangle = \lambda P|\psi_\lambda\rangle = P\lambda|\psi_\lambda\rangle = P\hat{\mathcal{O}}|\psi_\lambda\rangle \quad \Rightarrow \quad [P, \hat{\mathcal{O}}] = 0$$

Identische Teilchen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Betrachte:

- N identische (= ununterscheidbare) Teilchen
- Observable $\leftrightarrow$ Operator $\hat{\mathcal{O}}$
- Eigenzustand $|\psi_\lambda\rangle$ von $\hat{\mathcal{O}}$ zum Eigenwert (= Messwert) λ: $\quad \hat{\mathcal{O}}|\psi_\lambda\rangle = \lambda|\psi_\lambda\rangle$
- Permutation $P \in S_N$, $\quad P|\psi_\lambda\rangle \equiv |P\psi_\lambda\rangle$

Teilchen ununterscheidbar $\Rightarrow$ $\hat{\mathcal{O}}|P\psi_\lambda\rangle = \lambda|P\psi_\lambda\rangle$

$$\Leftrightarrow \quad \hat{\mathcal{O}}P|\psi_\lambda\rangle = \lambda P|\psi_\lambda\rangle = P\lambda|\psi_\lambda\rangle = P\hat{\mathcal{O}}|\psi_\lambda\rangle \quad \Rightarrow \quad [P, \hat{\mathcal{O}}] = 0$$

- ist erfüllt, wenn $\hat{\mathcal{O}}$ symmetrisch bzgl. Vertauschung der Teilchen ist

Identische Teilchen

Betrachte:

- N identische (= ununterscheidbare) Teilchen
- Observable $\leftrightarrow$ Operator $\hat{\mathcal{O}}$
- Eigenzustand $|\psi_\lambda\rangle$ von $\hat{\mathcal{O}}$ zum Eigenwert (= Messwert) λ: $\quad \hat{\mathcal{O}}|\psi_\lambda\rangle = \lambda|\psi_\lambda\rangle$
- Permutation $P \in S_N$, $\quad P|\psi_\lambda\rangle \equiv |P\psi_\lambda\rangle$

Teilchen ununterscheidbar $\Rightarrow$ $\hat{\mathcal{O}}|P\psi_\lambda\rangle = \lambda|P\psi_\lambda\rangle$

$$\Leftrightarrow \quad \hat{\mathcal{O}}P|\psi_\lambda\rangle = \lambda P|\psi_\lambda\rangle = P\lambda|\psi_\lambda\rangle = P\hat{\mathcal{O}}|\psi_\lambda\rangle \quad \Rightarrow \quad [P, \hat{\mathcal{O}}] = 0$$

- ist erfüllt, wenn $\hat{\mathcal{O}}$ symmetrisch bzgl. Vertauschung der Teilchen ist
- gilt insbesondere für $\hat{\mathcal{O}} = H$

- Beispiel:

  N Elektronen im (statischen) Coulombfeld V eines Atomkerns
  + gegenseitige Coulomb-Abstoßung

$$H = \sum_{i=1}^{N} \frac{\vec{p}_i^{\,2}}{2m} + \sum_{i=1}^{N} V(\vec{x}_i) + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{e^2}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|},$$

$\vec{p}_i$, $\vec{x}_i$: Orts- bzw. Impulsoperatoren, die nur auf das i-te Teilchen wirken

$\rightarrow$ H ist symmetrisch bzgl. Vertauschung der Elektronen.

- Beispiel:

  N Elektronen im (statischen) Coulombfeld V eines Atomkerns
  \+ gegenseitige Coulomb-Abstoßung

  $$H = \sum_{i=1}^{N} \frac{\vec{p}_i^{\,2}}{2m} + \sum_{i=1}^{N} V(\vec{x}_i) + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{e^2}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|},$$

  $\vec{p}_i$, $\vec{x}_i$: Orts- bzw. Impulsoperatoren, die nur auf das i-te Teilchen wirken

  $\rightarrow$ H ist symmetrisch bzgl. Vertauschung der Elektronen.

- weitere Eigenschaften von Permutationen identischer Teilchen:
  - $\langle P\phi | P\psi \rangle = \langle \phi | \psi \rangle$
  - P ist unitär: $P^\dagger = P^{-1} \Rightarrow P^\dagger P = PP^\dagger = 1$

    (Erinnerung: $\langle P\phi | \psi \rangle = \langle \phi | P^\dagger | \psi \rangle = \langle \phi | P^\dagger \psi \rangle$)

Bosonen und Fermionen

Quantenstatistik: zwei Teilchenklassen, die sich durch die Symmetrie ihrer Vielteilchenzustände unterscheiden

Bosonen und Fermionen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Quantenstatistik: zwei Teilchenklassen, die sich durch die Symmetrie ihrer Vielteilchenzustände unterscheiden

- Bosonen:
  - ganzzahliger Spin (0, 1, 2, ...)
  - Zustände symmetrisch unter Vertauschung zweier Teilchen:

    $P_{ij}|\psi\rangle = |\psi\rangle \quad \forall\, i, j \quad \Rightarrow \quad P|\psi\rangle = |\psi\rangle \quad \forall\, P \in S_N$

Bosonen und Fermionen

Quantenstatistik: zwei Teilchenklassen, die sich durch die Symmetrie ihrer Vielteilchenzustände unterscheiden

- Bosonen:
  - ganzzahliger Spin (0, 1, 2, ...)
  - Zustände symmetrisch unter Vertauschung zweier Teilchen:

    $$P_{ij}|\psi\rangle = |\psi\rangle \quad \forall\, i, j \quad \Rightarrow \quad P|\psi\rangle = |\psi\rangle \quad \forall\, P \in S_N$$

- Fermionen:
  - halbzahliger Spin ($\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, ...)
  - Zustände antisymmetrisch unter Vertauschung zweier Teilchen:

    $$P_{ij}|\psi\rangle = -|\psi\rangle \quad \forall\, i, j \quad \Rightarrow \quad P|\psi\rangle = (-1)^P|\psi\rangle \quad \forall\, P \in S_N$$

$\Rightarrow$ Zustände mit zwei oder mehr Fermionen im gleichen Einteilchenzustand verschwinden (Pauli-Prinzip).

Bosonen und Fermionen

Quantenstatistik: zwei Teilchenklassen, die sich durch die Symmetrie ihrer Vielteilchenzustände unterscheiden

- Bosonen:
  - ganzzahliger Spin (0, 1, 2, ...)
  - Zustände symmetrisch unter Vertauschung zweier Teilchen:

    $P_{ij}|\psi\rangle = |\psi\rangle \quad \forall\, i, j \quad \Rightarrow \quad P|\psi\rangle = |\psi\rangle \quad \forall\, P \in S_N$
- Fermionen:
  - halbzahliger Spin ($\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$)
  - Zustände antisymmetrisch unter Vertauschung zweier Teilchen:

    $P_{ij}|\psi\rangle = -|\psi\rangle \quad \forall\, i, j \quad \Rightarrow \quad P|\psi\rangle = (-1)^P|\psi\rangle \quad \forall\, P \in S_N$

  $\Rightarrow$ Zustände mit zwei oder mehr Fermionen im gleichen Einteilchenzustand verschwinden (Pauli-Prinzip).
- Der Zusammenhang Spin $\leftrightarrow$ Statistik kann in der QFT gezeigt werden.

Zweiteilchen-Spin-Systeme

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

1. zwei unterscheidbare Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen (z.B. $e^- p$):

Zweiteilchen-Spin-Systeme

1. zwei unterscheidbare Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen (z.B. $e^- p$):
   - vier Basiszustände des Zweiteilchen-Systems:

$$|\uparrow,\uparrow\rangle \equiv |\uparrow\rangle_e\,|\uparrow\rangle_p$$
$$|\uparrow,\downarrow\rangle \equiv |\uparrow\rangle_e\,|\downarrow\rangle_p$$
$$|\downarrow,\uparrow\rangle \equiv |\downarrow\rangle_e\,|\uparrow\rangle_p$$
$$|\downarrow,\downarrow\rangle \equiv |\downarrow\rangle_e\,|\downarrow\rangle_p$$

Zweiteilchen-Spin-Systeme

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

1. zwei <u>unterscheidbare</u> Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen (z.B. $e^- p$):
   - vier Basiszustände des Zweiteilchen-Systems:

$$|\uparrow,\uparrow\rangle \equiv |\uparrow\rangle_e\,|\uparrow\rangle_p$$
$$|\uparrow,\downarrow\rangle \equiv |\uparrow\rangle_e\,|\downarrow\rangle_p$$
$$|\downarrow,\uparrow\rangle \equiv |\downarrow\rangle_e\,|\uparrow\rangle_p$$
$$|\downarrow,\downarrow\rangle \equiv |\downarrow\rangle_e\,|\downarrow\rangle_p$$

   - alternative Basis: guter Gesamtspin $|SM_s\rangle$

$$\left.\begin{array}{lcl} |1,1\rangle & = & |\uparrow,\uparrow\rangle \\ |1,0\rangle & = & \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|\uparrow,\downarrow\rangle + |\downarrow,\uparrow\rangle\big) \\ |1,-1\rangle & = & |\downarrow,\downarrow\rangle \end{array}\right\} \quad \text{Spin 1 (symmetrisch)}$$

$$|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|\uparrow,\downarrow\rangle - |\downarrow,\uparrow\rangle\big) \qquad \text{Spin 0 (antisymmetrisch)}$$

2. zwei ununterscheidbare Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen (z.B. $e^- e^-$):

Fermionen → Zweiteilchen-Systeme antisymmetrisch

→ nur Gesamtspin 0 erlaubt: $|\psi\rangle = |0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow,\downarrow\rangle - |\downarrow,\uparrow\rangle\right)$

(solange sich die Teilchen nicht durch andere Quantenzahlen unterscheiden)

2. zwei ununterscheidbare Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen (z.B. $e^- e^-$):

Fermionen ➞ Zweiteilchen-Systeme antisymmetrisch

➞ nur Gesamtspin 0 erlaubt: $|\psi\rangle = |0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow,\downarrow\rangle - |\downarrow,\uparrow\rangle\right)$

(solange sich die Teilchen nicht durch andere Quantenzahlen unterscheiden)

3. zwei unterscheidbare Spin-1-Teilchen (z.B. $\rho^+ \rho^-$):

➞ $3^2 = 9$ Basiszustände: $(m_1, m_2) = (1,1),\ (1,0),\ (1,-1),\ \ldots,\ (-1,-1)$

2. zwei ununterscheidbare Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen (z.B. $e^- e^-$):

   Fermionen ➞ Zweiteilchen-Systeme antisymmetrisch

   ➞ nur Gesamtspin 0 erlaubt: $|\psi\rangle = |0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|\uparrow,\downarrow\rangle - |\downarrow,\uparrow\rangle\big)$

   (solange sich die Teilchen nicht durch andere Quantenzahlen unterscheiden)

3. zwei unterscheidbare Spin-1-Teilchen (z.B. $\rho^+ \rho^-$):

   ➞ $3^2 = 9$ Basiszustände: $(m_1, m_2) = (1,1),\ (1,0),\ (1,-1),\ \dots,\ (-1,-1)$

   - alternative Basis: $|S=2, M_S\rangle$, $|S=1, M_S\rangle$, $|S=0, M_S=0\rangle$

2. zwei ununterscheidbare Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen (z.B. $e^- e^-$):

   Fermionen ➞ Zweiteilchen-Systeme antisymmetrisch

   ➞ nur Gesamtspin 0 erlaubt: $|\psi\rangle = |0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|\uparrow,\downarrow\rangle - |\downarrow,\uparrow\rangle\big)$

   (solange sich die Teilchen nicht durch andere Quantenzahlen unterscheiden)

3. zwei unterscheidbare Spin-1-Teilchen (z.B. $\rho^+\rho^-$):

   ➞ $3^2 = 9$ Basiszustände: $(m_1, m_2) = (1, 1),\ (1, 0),\ (1, -1),\ \dots,\ (-1, -1)$

   - alternative Basis: $|S = 2, M_S\rangle$, $|S = 1, M_S\rangle$, $|S = 0, M_S = 0\rangle$

     5 symmetrisch + 3 antisymm. + 1 symmetrisch

2. zwei ununterscheidbare Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen (z.B. $e^- e^-$):

   Fermionen ➞ Zweiteilchen-Systeme antisymmetrisch

   ➞ nur Gesamtspin 0 erlaubt: $|\psi\rangle = |0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|\uparrow,\downarrow\rangle - |\downarrow,\uparrow\rangle\big)$

   (solange sich die Teilchen nicht durch andere Quantenzahlen unterscheiden)

3. zwei unterscheidbare Spin-1-Teilchen (z.B. $\rho^+\rho^-$):

   ➞ $3^2 = 9$ Basiszustände: $(m_1, m_2) = (1,1),\ (1,0),\ (1,-1),\ \dots,\ (-1,-1)$

   - alternative Basis: $|S=2, M_S\rangle$, $|S=1, M_S\rangle$, $|S=0, M_S=0\rangle$

     5 symmetrisch + 3 antisymm. + 1 symmetrisch

4. zwei ununterscheidbare Spin-1-Teilchen (z.B. $\omega\omega$):

   Bosonen ➞ 6 symmetrische Basiszustände,

   z.B. $|S=2, M_S\rangle$ und $|S=0, M_S=0\rangle$