3. Energieerhaltung

- **3. Energieerhaltung**
  - entlang eines infinitesimalen Wegstücks $d\vec{r}$ geleistete Arbeit:

    $$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}, \qquad \vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$$

- **3. Energieerhaltung**
  - entlang eines infinitesimalen Wegstücks $d\vec{r}$ geleistete Arbeit:

    $$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}, \qquad \vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$$

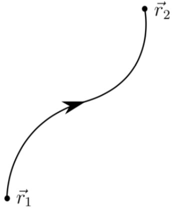
  - endlicher Weg $\mathcal{C}$: $\quad W_{\mathcal{C}} = \int_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot \vec{F}$

3. Energieerhaltung

- entlang eines infinitesimalen Wegstücks $d\vec{r}$ geleistete Arbeit:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}, \qquad \vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$$

- endlicher Weg $\mathcal{C}$: $\quad W_{\mathcal{C}} = \int_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot \vec{F}$



Parametrisierung:

$$\mathcal{C}: \quad t \in [t_1, t_2] \mapsto \vec{r}(t), \quad \vec{r}(t_1) = \vec{r}_1, \quad \vec{r}(t_2) = \vec{r}_2$$

3. Energieerhaltung

- entlang eines infinitesimalen Wegstücks $d\vec{r}$ geleistete Arbeit:

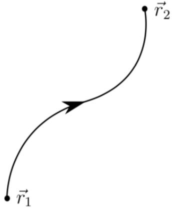
$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}, \qquad \vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$$

- endlicher Weg $\mathcal{C}$: $\quad W_{\mathcal{C}} = \int\limits_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot \vec{F}$

Parametrisierung:

$$\mathcal{C}: \quad t \in [t_1, t_2] \mapsto \vec{r}(t), \quad \vec{r}(t_1) = \vec{r}_1, \quad \vec{r}(t_2) = \vec{r}_2$$

$$d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \vec{v}\, dt$$

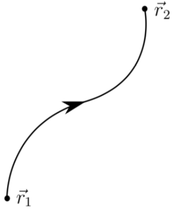


3. Energieerhaltung

- entlang eines infinitesimalen Wegstücks $d\vec{r}$ geleistete Arbeit:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}, \qquad \vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$$

- endlicher Weg $\mathcal{C}$: $\quad W_{\mathcal{C}} = \int\limits_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot \vec{F}$



Parametrisierung:

$$\mathcal{C}: \quad t \in [t_1, t_2] \mapsto \vec{r}(t), \qquad \vec{r}(t_1) = \vec{r}_1, \quad \vec{r}(t_2) = \vec{r}_2$$

$$d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \vec{v}\, dt$$

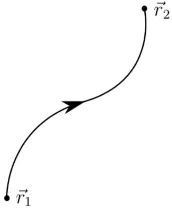
$$\Rightarrow \quad W_{\mathcal{C}} = \int\limits_{t_1}^{t_2} dt\, \vec{v}(t) \cdot \vec{F}\left(\vec{r}(t), \vec{v}(t), t\right)$$

3. Energieerhaltung

- entlang eines infinitesimalen Wegstücks $d\vec{r}$ geleistete Arbeit:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}, \qquad \vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$$

- endlicher Weg $\mathcal{C}$: $\quad W_{\mathcal{C}} = \int\limits_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot \vec{F}$



Parametrisierung:

$$\mathcal{C}: \quad t \in [t_1, t_2] \mapsto \vec{r}(t), \quad \vec{r}(t_1) = \vec{r}_1, \quad \vec{r}(t_2) = \vec{r}_2$$

$$d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \vec{v}\, dt$$

$$\Rightarrow \quad W_{\mathcal{C}} = \int\limits_{t_1}^{t_2} dt\, \vec{v}(t) \cdot \vec{F}\left(\vec{r}(t), \vec{v}(t), t\right) \overset{\textbf{N2}}{=} \int\limits_{t_1}^{t_2} dt\, \vec{v}(t) \cdot m\dot{\vec{v}}(t)$$

3. Energieerhaltung

- entlang eines infinitesimalen Wegstücks $d\vec{r}$ geleistete Arbeit:

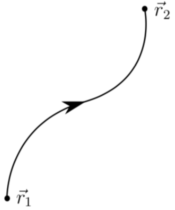
$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}, \qquad \vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$$

- endlicher Weg $\mathcal{C}$: $\quad W_{\mathcal{C}} = \int\limits_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot \vec{F}$

Parametrisierung:

$$\mathcal{C}: \quad t \in [t_1, t_2] \mapsto \vec{r}(t), \quad \vec{r}(t_1) = \vec{r}_1, \quad \vec{r}(t_2) = \vec{r}_2$$

$$d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \vec{v}\, dt$$



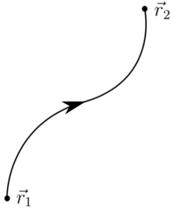
$$\Rightarrow \; W_{\mathcal{C}} = \int\limits_{t_1}^{t_2} dt\, \vec{v}(t) \cdot \vec{F}\left(\vec{r}(t), \vec{v}(t), t\right) \stackrel{\textbf{N2}}{=} \int\limits_{t_1}^{t_2} dt\, \vec{v}(t) \cdot m\dot{\vec{v}}(t) = \int\limits_{t_1}^{t_2} dt\, \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\vec{v}^{\,2}(t)\right)$$

3. Energieerhaltung

- entlang eines infinitesimalen Wegstücks $d\vec{r}$ geleistete Arbeit:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}, \qquad \vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$$

- endlicher Weg $\mathcal{C}$: $\quad W_{\mathcal{C}} = \int\limits_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot \vec{F}$



Parametrisierung:

$$\mathcal{C}: \quad t \in [t_1, t_2] \mapsto \vec{r}(t), \quad \vec{r}(t_1) = \vec{r}_1, \quad \vec{r}(t_2) = \vec{r}_2$$

$$d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \vec{v}\, dt$$

$$\Rightarrow \quad W_{\mathcal{C}} = \int\limits_{t_1}^{t_2} dt\, \vec{v}(t) \cdot \vec{F}\left(\vec{r}(t), \vec{v}(t), t\right) \overset{\textbf{N2}}{=} \int\limits_{t_1}^{t_2} dt\, \vec{v}(t) \cdot m\dot{\vec{v}}(t) = \int\limits_{t_1}^{t_2} dt\, \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} \vec{v}^{\,2}(t)\right)$$

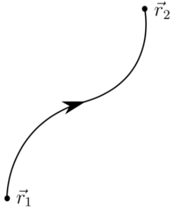
$$= \frac{m}{2}\, \vec{v}^{\,2}(t)\Big|_{t_1}^{t_2} = \frac{m}{2} \left(\vec{v}^{\,2}(t_2) - \vec{v}^{\,2}(t_1)\right)$$

3. Energieerhaltung

- entlang eines infinitesimalen Wegstücks $d\vec{r}$ geleistete Arbeit:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}, \qquad \vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$$

- endlicher Weg $\mathcal{C}$: $\quad W_{\mathcal{C}} = \int_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot \vec{F}$



Parametrisierung:

$$\mathcal{C}: \quad t \in [t_1, t_2] \mapsto \vec{r}(t), \quad \vec{r}(t_1) = \vec{r}_1, \quad \vec{r}(t_2) = \vec{r}_2$$

$$d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \vec{v}\, dt$$

$$\Rightarrow W_{\mathcal{C}} = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \vec{v}(t) \cdot \vec{F}\left(\vec{r}(t), \vec{v}(t), t\right) \overset{\textbf{N2}}{=} \int_{t_1}^{t_2} dt\, \vec{v}(t) \cdot m\dot{\vec{v}}(t) = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\vec{v}^{\,2}(t)\right)$$

$$= \frac{m}{2}\, \vec{v}^{\,2}(t)\Big|_{t_1}^{t_2} = \frac{m}{2}\left(\vec{v}^{\,2}(t_2) - \vec{v}^{\,2}(t_1)\right) \quad \longrightarrow \text{kinetische Energie!}$$

kinetische Energie: $T = \frac{m}{2}\vec{v}^{\,2}$

$$\Rightarrow \quad W_{\mathcal{C}} = \int\limits_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot \vec{F} = T_2 - T_1$$

$\uparrow$ durch die Kraft $\vec{F}$ entlang des Wegs $\mathcal{C}$ am Teilchen geleistete Arbeit

$\uparrow$ Differenz der kinetischen Energie des Teilchens am End- und Anfangspunkt von $\mathcal{C}$

Konservative Kräfte

von jetzt ab: $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \cancel{\dot{\vec{r}}}, \cancel{t})$

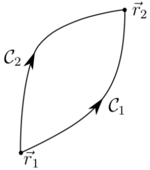
Konservative Kräfte

von jetzt ab: $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \cancel{\dot{\vec{r}}}, \cancel{t})$

- konservatives Kraftfeld:

$$\int_{\mathcal{C}_1} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = \int_{\mathcal{C}_2} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) \equiv W_{12},$$

falls $\mathcal{C}_1$ und $\mathcal{C}_2$ dieselben Anfangs- und Endpunkte besitzen



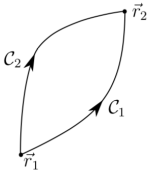
Konservative Kräfte

von jetzt ab: $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \cancel{\dot{\vec{r}}}, \cancel{t})$

- konservatives Kraftfeld:

  $\int_{\mathcal{C}_1} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = \int_{\mathcal{C}_2} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) \equiv W_{12}$,

  falls $\mathcal{C}_1$ und $\mathcal{C}_2$ dieselben Anfangs- und Endpunkte besitzen



- Potenzial (bzgl. eines Referenzpunkts $\vec{R}$): $V_{\vec{R}}(\vec{r}) \equiv -\int_{\vec{R}}^{\vec{r}} d\vec{r}\,' \cdot \vec{F}(\vec{r}\,')$

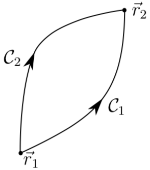
Konservative Kräfte

von jetzt ab: $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \cancel{\dot{\vec{r}}}, \cancel{t})$

- konservatives Kraftfeld:

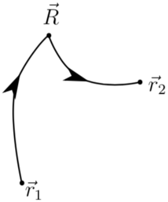
  $\int_{\mathcal{C}_1} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = \int_{\mathcal{C}_2} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) \equiv W_{12}$,

  falls $\mathcal{C}_1$ und $\mathcal{C}_2$ dieselben Anfangs- und Endpunkte besitzen



- Potenzial (bzgl. eines Referenzpunkts $\vec{R}$): $V_{\vec{R}}(\vec{r}) \equiv -\int_{\vec{R}}^{\vec{r}} d\vec{r}\,' \cdot \vec{F}(\vec{r}\,')$

$$\Rightarrow \quad W_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{R}} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) + \int_{\vec{R}}^{\vec{r}_2} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r})$$



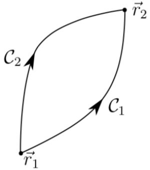
Konservative Kräfte

von jetzt ab: $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \cancel{\dot{\vec{r}}}, \cancel{t})$

- konservatives Kraftfeld:

  $\int_{\mathcal{C}_1} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = \int_{\mathcal{C}_2} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) \equiv W_{12},$

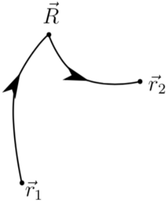
  falls $\mathcal{C}_1$ und $\mathcal{C}_2$ dieselben Anfangs- und Endpunkte besitzen



- Potenzial (bzgl. eines Referenzpunkts $\vec{R}$): $V_{\vec{R}}(\vec{r}) \equiv -\int_{\vec{R}}^{\vec{r}} d\vec{r}\,' \cdot \vec{F}(\vec{r}\,')$

$$\Rightarrow \quad W_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{R}} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) + \int_{\vec{R}}^{\vec{r}_2} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r})$$

$$= -\int_{\vec{R}}^{\vec{r}_1} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) + \int_{\vec{R}}^{\vec{r}_2} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = V_{\vec{R}}(\vec{r}_1) - V_{\vec{R}}(\vec{r}_2)$$



- anderer Referenzpunkt $\vec{R}'$:

$$V_{\vec{R}\,'}(\vec{r}) = -\int_{\vec{R}\,'}^{\vec{r}} d\vec{r}\,' \cdot \vec{F}(\vec{r}\,') = \underbrace{-\int_{\vec{R}\,'}^{\vec{R}} d\vec{r}\,' \cdot \vec{F}(\vec{r}\,')}_{\text{hängt nicht von } \vec{r} \text{ ab.}} - \int_{\vec{R}}^{\vec{r}} d\vec{r}\,' \cdot \vec{F}(\vec{r}\,') = V_{\vec{R}}(\vec{r}) + const.$$

- anderer Referenzpunkt $\vec{R}'$:

$$V_{\vec{R}\,'}(\vec{r}) = -\int_{\vec{R}\,'}^{\vec{r}} d\vec{r}\,' \cdot \vec{F}(\vec{r}\,') = \underbrace{-\int_{\vec{R}\,'}^{\vec{R}} d\vec{r}\,' \cdot \vec{F}(\vec{r}\,')}_{\text{hängt nicht von } \vec{r} \text{ ab.}} - \int_{\vec{R}}^{\vec{r}} d\vec{r}\,' \cdot \vec{F}(\vec{r}\,') = V_{\vec{R}}(\vec{r}) + const.$$

$$\Rightarrow \quad W_{12} = V_{\vec{R}}(\vec{r}_1) - V_{\vec{R}}(\vec{r}_2) = V_{\vec{R}'}(\vec{r}_1) - V_{\vec{R}'}(\vec{r}_2)$$

- anderer Referenzpunkt $\vec{R}'$:

$$V_{\vec{R}\,'}(\vec{r}) = -\int_{\vec{R}\,'}^{\vec{r}} d\vec{r}\,' \cdot \vec{F}(\vec{r}\,') = \underbrace{-\int_{\vec{R}\,'}^{\vec{R}} d\vec{r}\,' \cdot \vec{F}(\vec{r}\,')}_{\text{hängt nicht von } \vec{r} \text{ ab.}} - \int_{\vec{R}}^{\vec{r}} d\vec{r}\,' \cdot \vec{F}(\vec{r}\,') = V_{\vec{R}}(\vec{r}) + const.$$

$$\Rightarrow \quad W_{12} = V_{\vec{R}}(\vec{r}_1) - V_{\vec{R}}(\vec{r}_2) = V_{\vec{R}'}(\vec{r}_1) - V_{\vec{R}'}(\vec{r}_2) \equiv V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2)$$

($V(\vec{r})$ eindeutig bis auf eine physikalisch irrelevante Konstante)

- anderer Referenzpunkt $\vec{R}'$:

$$V_{\vec{R}\,'}(\vec{r}) = -\int_{\vec{R}\,'}^{\vec{r}} d\vec{r}\,' \cdot \vec{F}(\vec{r}\,') = \underbrace{-\int_{\vec{R}\,'}^{\vec{R}} d\vec{r}\,' \cdot \vec{F}(\vec{r}\,')}_{\text{hängt nicht von } \vec{r} \text{ ab.}} - \int_{\vec{R}}^{\vec{r}} d\vec{r}\,' \cdot \vec{F}(\vec{r}\,') = V_{\vec{R}}(\vec{r}) + const.$$

$$\Rightarrow \quad W_{12} = V_{\vec{R}}(\vec{r}_1) - V_{\vec{R}}(\vec{r}_2) = V_{\vec{R}'}(\vec{r}_1) - V_{\vec{R}'}(\vec{r}_2) \equiv V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2) \equiv V_1 - V_2$$

($V(\vec{r})$ eindeutig bis auf eine physikalisch irrelevante Konstante)

- anderer Referenzpunkt $\vec{R}'$:

$$V_{\vec{R}\,'}(\vec{r}) = -\int_{\vec{R}\,'}^{\vec{r}} d\vec{r}\,' \cdot \vec{F}(\vec{r}\,') = \underbrace{-\int_{\vec{R}\,'}^{\vec{R}} d\vec{r}\,' \cdot \vec{F}(\vec{r}\,')}_{\text{hängt nicht von } \vec{r} \text{ ab.}} - \int_{\vec{R}}^{\vec{r}} d\vec{r}\,' \cdot \vec{F}(\vec{r}\,') = V_{\vec{R}}(\vec{r}) + const.$$

$$\Rightarrow \quad W_{12} = V_{\vec{R}}(\vec{r}_1) - V_{\vec{R}}(\vec{r}_2) = V_{\vec{R}'}(\vec{r}_1) - V_{\vec{R}'}(\vec{r}_2) \equiv V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2) \equiv V_1 - V_2$$

($V(\vec{r})$ eindeutig bis auf eine physikalisch irrelevante Konstante)

- Wir hatten: $W_{12} = T_2 - T_1$ (für beliebige Kräfte)

$$\Rightarrow \quad T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \quad \text{(für konservative Kräfte)}$$

- anderer Referenzpunkt $\vec{R}'$:

$$V_{\vec{R}\,'}(\vec{r}) = -\int_{\vec{R}\,'}^{\vec{r}} d\vec{r}\,' \cdot \vec{F}(\vec{r}\,') = \underbrace{-\int_{\vec{R}\,'}^{\vec{R}} d\vec{r}\,' \cdot \vec{F}(\vec{r}\,')}_{\text{hängt nicht von } \vec{r} \text{ ab.}} - \int_{\vec{R}}^{\vec{r}} d\vec{r}\,' \cdot \vec{F}(\vec{r}\,') = V_{\vec{R}}(\vec{r}) + const.$$

$$\Rightarrow \quad W_{12} = V_{\vec{R}}(\vec{r}_1) - V_{\vec{R}}(\vec{r}_2) = V_{\vec{R}'}(\vec{r}_1) - V_{\vec{R}'}(\vec{r}_2) \equiv V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2) \equiv V_1 - V_2$$

($V(\vec{r})$ eindeutig bis auf eine physikalisch irrelevante Konstante)

- Wir hatten: $W_{12} = T_2 - T_1$ (für beliebige Kräfte)

$\Rightarrow \quad T_1 + V_1 = T_2 + V_2$ (für konservative Kräfte)

$\Rightarrow$ Die Gesamtenergie $\boxed{E = T + V}$ ist für konservative Kräfte erhalten.

Weitere Eigenschaften konservativer Kraftfelder

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

- $V = V(\vec{r}) = V(x, y, z)$

  $$\Rightarrow \quad dV = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial V}{\partial r_i} dr_i = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

Weitere Eigenschaften konservativer Kraftfelder

- $V = V(\vec{r}) = V(x, y, z)$

  $$\Rightarrow \quad dV = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial V}{\partial r_i} dr_i = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \; = \vec{\nabla} V \cdot d\vec{r}$$

  $$\vec{\nabla} V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix}, \quad d\vec{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

Weitere Eigenschaften konservativer Kraftfelder

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- $V = V(\vec{r}) = V(x, y, z)$

$$\Rightarrow \quad dV = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial V}{\partial r_i} dr_i = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \; = \vec{\nabla} V \cdot d\vec{r}$$

$$\vec{\nabla} V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix}, \qquad d\vec{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = W_{12} = V_1 - V_2 = -\int_{V_1}^{V_2} dV = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} V(\vec{r})$$

Weitere Eigenschaften konservativer Kraftfelder

- $V = V(\vec{r}) = V(x, y, z)$

$$\Rightarrow \quad dV = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial V}{\partial r_i} dr_i = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \; = \vec{\nabla} V \cdot d\vec{r}$$

$$\vec{\nabla} V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix}, \quad d\vec{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = W_{12} = V_1 - V_2 = -\int_{V_1}^{V_2} dV = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} V(\vec{r})$$

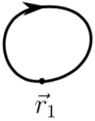
Das gilt für beliebige $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$. $\quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r})}$

- Es gilt: $\boxed{\vec{F}(\vec{r}) \text{ konservativ } \Leftrightarrow \oint\limits_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = 0 \text{ für alle geschlossenen Wege } \mathcal{C}}$

► Es gilt: $\boxed{\vec{F}(\vec{r}) \text{ konservativ } \Leftrightarrow \oint\limits_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = 0 \text{ für alle geschlossenen Wege } \mathcal{C}}$

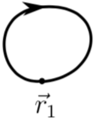
Beweis:

„$\Rightarrow$": $\oint d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = \int\limits_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_1} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = V_1 - V_1 = 0 \quad \checkmark$



- Es gilt: $\boxed{\vec{F}(\vec{r}) \text{ konservativ } \Leftrightarrow \oint\limits_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = 0 \text{ für alle geschlossenen Wege } \mathcal{C}}$

<u>Beweis:</u>



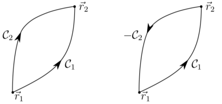
„$\Rightarrow$": $\oint d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = \int\limits_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_1} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = V_1 - V_1 = 0 \quad \checkmark$

„$\Leftarrow$": Annahmen: $\oint\limits_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = 0 \;\forall$ geschlossenen Wege $\mathcal{C}$,

$\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ Wege mit gleichen Anfangs- und Endpunkten

$$\Rightarrow \int\limits_{\mathcal{C}_1} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) - \int\limits_{\mathcal{C}_2} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r})$$

$$= \int\limits_{\mathcal{C}_1} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) + \int\limits_{-\mathcal{C}_2} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = \oint\limits_{\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = 0 \quad \checkmark$$



- Stokes'scher Satz: $$\oint_{\mathcal{C}=\partial\mathcal{A}} d\vec{r}\cdot\vec{F}(\vec{r}) = \int_{\mathcal{A}} d\vec{\sigma}\cdot \mathrm{rot}\,\vec{F}(\vec{r})\,, \qquad \mathrm{rot}\,\vec{F} \equiv \vec{\nabla}\times\vec{F}$$

  ↑ Wegintegral über den Rand von $\mathcal{A}$ ↑ Flächenintegral über $\mathcal{A}$

- Stokes'scher Satz: $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}=\partial\mathcal{A}} d\vec{r}\cdot\vec{F}(\vec{r}) = \int_{\mathcal{A}} d\vec{\sigma}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{F}(\vec{r})\,,\qquad \mathrm{rot}\,\vec{F} \equiv \vec{\nabla}\times\vec{F}$

$\uparrow$ Wegintegral über den Rand von $\mathcal{A}$

$\uparrow$ Flächenintegral über $\mathcal{A}$

also: $\boxed{\vec{F}\ \text{konservativ} \quad\Leftrightarrow\quad \vec{\nabla}\times\vec{F}(\vec{r}) = \vec{0}\quad \forall\,\vec{r}}$

- Stokes'scher Satz: $\oint\limits_{\mathcal{C}=\partial\mathcal{A}} d\vec{r}\cdot\vec{F}(\vec{r}) = \int\limits_{\mathcal{A}} d\vec{\sigma}\cdot \mathrm{rot}\,\vec{F}(\vec{r})\,,\qquad \mathrm{rot}\,\vec{F} \equiv \vec{\nabla}\times\vec{F}$

  $\uparrow$ Wegintegral über den Rand von $\mathcal{A}$ $\qquad$ $\uparrow$ Flächenintegral über $\mathcal{A}$

also: $\boxed{\vec{F}\ \text{konservativ} \quad\Leftrightarrow\quad \vec{\nabla}\times\vec{F}(\vec{r}) = \vec{0} \quad \forall\,\vec{r}}$

Alternative Herleitung von „$\Rightarrow$“:

$$\vec{F}\ \text{konservativ} \quad\Rightarrow\quad \vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r}) \quad\Rightarrow\quad \vec{\nabla}\times\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}V(\vec{r})\right) = \vec{0},$$

$$\text{da } \vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\phi(\vec{r})\right) = \vec{0} \text{ für beliebige Skalarfelder } \phi(\vec{r})$$

1.4 Mehrteilchen-Systeme

1.4 Mehrteilchen-Systeme

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- N Teilchen mit Massen m_i, Koordinaten $\vec{r}^{\,(i)}$, $\quad i = 1, \dots, N$
  - innere Kräfte: $\vec{F}^{(ij)}$ = Kraft von Teilchen j auf Teilchen i
  - äußere Kraft auf Teilchen i: $\vec{F}_{ex}^{(i)}$

$\Rightarrow$ Gesamtkraft auf Teilchen i: $\vec{F}^{(i)} = \sum\limits_{j \neq i} \vec{F}^{(ij)} + \vec{F}_{ex}^{(i)}$

1.4 Mehrteilchen-Systeme

- N Teilchen mit Massen m_i, Koordinaten $\vec{r}^{\,(i)}$, $\quad i = 1, \dots, N$
  - innere Kräfte: $\vec{F}^{(ij)}$ = Kraft von Teilchen j auf Teilchen i
  - äußere Kraft auf Teilchen i: $\vec{F}_{ex}^{(i)}$

  $\Rightarrow$ Gesamtkraft auf Teilchen i: $\vec{F}^{(i)} = \sum_{j \neq i} \vec{F}^{(ij)} + \vec{F}_{ex}^{(i)}$

- **Beispiel:**

  zwei durch eine Feder verbundene Massen m_1 und m_2 im Schwerefeld der Erde (Schwerebeschleunigung $\vec{g}$)
  - $\vec{F}_{ex}^{(1)} = m_1 \vec{g}$
  - $\vec{F}_{ex}^{(2)} = m_2 \vec{g}$
  - $\vec{F}^{(12)}$ = Federkraft auf Teilchen 1
  - $\vec{F}^{(21)} = -\vec{F}^{(12)}$ = Federkraft auf Teilchen 2

- Ein System heißt abgeschlossen, falls $\vec{F}_{ex}^{(i)} = \vec{0} \quad \forall\, i$.

- Ein System heißt abgeschlossen, falls $\vec{F}_{ex}^{(i)} = \vec{0} \quad \forall\, i$.
- **Grundlegende Annahme:** Es gilt das Superpositionsprinzip *N*4.

  → Alle inneren Käfte sind Zweiteilchen-Kräfte,
  d.h. sie werden nicht durch die Anwesenheit weiterer Teilchen beeinflusst.

- Ein System heißt abgeschlossen, falls $\vec{F}_{ex}^{(i)} = \vec{0} \quad \forall\, i$.
- **Grundlegende Annahme:** Es gilt das Superpositionsprinzip *N*4.

  → Alle inneren Käfte sind Zweiteilchen-Kräfte,
  d.h. sie werden nicht durch die Anwesenheit weiterer Teilchen beeinflusst.
- *actio* = *reactio* (N3): $\vec{F}^{(ij)} = -\vec{F}^{(ji)}$

- Ein System heißt abgeschlossen, falls $\vec{F}_{ex}^{(i)} = \vec{0} \quad \forall\, i$.
- **Grundlegende Annahme:** Es gilt das Superpositionsprinzip *N*4.

  → Alle inneren Käfte sind Zweiteilchen-Kräfte,
  d.h. sie werden nicht durch die Anwesenheit weiterer Teilchen beeinflusst.
- *actio* = *reactio* (N3): $\vec{F}^{(ij)} = -\vec{F}^{(ji)}$
- **Def.:** zentrale Zweiteilchen-Kräfte
  - Richtung entlang der Verbindungslinie
  - Stärke hängt nur vom Abstand ab

$$\vec{F}^{(ij)}(\vec{r}^{(i)}, \vec{r}^{(j)}) = f^{ij}(r_{ij})\,\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}, \qquad \text{mit} \quad \vec{r}_{ij} \equiv \vec{r}^{(i)} - \vec{r}^{(j)}, \quad r_{ij} \equiv |\vec{r}_{ij}|$$

Beispiele:

- Gravitationskraft zwischen zwei Massen m_1 und m_2:

  $\vec{F}_G^{(12)}(\vec{r}^{\,(1)}, \vec{r}^{\,(2)}) = -G\,\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\,\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$

Beispiele:

- Gravitationskraft zwischen zwei Massen m_1 und m_2:

  $$\vec{F}_G^{(12)}(\vec{r}^{\,(1)}, \vec{r}^{\,(2)}) = -G\,\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\,\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$$

- Coulomb-Kraft zwischen zwei Ladungen q_1 und q_2:

  $$\vec{F}_C^{(12)}(\vec{r}^{\,(1)}, \vec{r}^{\,(2)}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\,\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$$

1.4.1 Schwerpunktsatz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

1.4.1 Schwerpunktsatz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Definitionen:

- Gesamtimpuls: $\vec{P} \equiv \sum_{i=1}^{N} \vec{p}^{\,(i)} = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}^{\,(i)}$
- gesamte äußere Kraft: $\vec{F}_{ex} \equiv \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{ex}^{(i)}$
- Gesamtmasse: $M \equiv \sum_{i=1}^{N} m_i$
- Schwerpunktsvektor: $\vec{R} \equiv \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}^{\,(i)}$

1.4.1 Schwerpunktsatz

Definitionen:

- Gesamtimpuls: $\vec{P} \equiv \sum_{i=1}^{N} \vec{p}^{\,(i)} = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}^{\,(i)} = M\dot{\vec{R}}$
- gesamte äußere Kraft: $\vec{F}_{ex} \equiv \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{ex}^{(i)}$
- Gesamtmasse: $M \equiv \sum_{i=1}^{N} m_i$
- Schwerpunktsvektor: $\vec{R} \equiv \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}^{\,(i)}$

1.4.1 Schwerpunktsatz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Definitionen:

- Gesamtimpuls: $\vec{P} \equiv \sum_{i=1}^{N} \vec{p}^{\,(i)} = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}^{\,(i)} = M\dot{\vec{R}} \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{P}} = M\ddot{\vec{R}}$
- gesamte äußere Kraft: $\vec{F}_{ex} \equiv \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{ex}^{(i)}$
- Gesamtmasse: $M \equiv \sum_{i=1}^{N} m_i$
- Schwerpunktsvektor: $\vec{R} \equiv \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}^{\,(i)}$

1.4.1 Schwerpunktsatz

Definitionen:

- Gesamtimpuls: $\vec{P} \equiv \sum_{i=1}^{N} \vec{p}^{\,(i)} = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}^{\,(i)} = M\dot{\vec{R}} \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{P}} = M\ddot{\vec{R}}$
- gesamte äußere Kraft: $\vec{F}_{ex} \equiv \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{ex}^{(i)}$
- Gesamtmasse: $M \equiv \sum_{i=1}^{N} m_i$
- Schwerpunktsvektor: $\vec{R} \equiv \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}^{\,(i)}$

$$\dot{\vec{p}}^{\,(i)} = \vec{F}^{(i)} = \sum_{j \neq i} \vec{F}^{(ij)} + \vec{F}_{ex}^{(i)}$$

1.4.1 Schwerpunktsatz

Definitionen:

- Gesamtimpuls: $\vec{P} \equiv \sum_{i=1}^{N} \vec{p}^{\,(i)} = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}^{\,(i)} = M\dot{\vec{R}} \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{P}} = M\ddot{\vec{R}}$
- gesamte äußere Kraft: $\vec{F}_{ex} \equiv \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{ex}^{(i)}$
- Gesamtmasse: $M \equiv \sum_{i=1}^{N} m_i$
- Schwerpunktsvektor: $\vec{R} \equiv \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}^{\,(i)}$

$$\dot{\vec{p}}^{\,(i)} = \vec{F}^{(i)} = \sum_{j \neq i} \vec{F}^{(ij)} + \vec{F}_{ex}^{(i)} \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\vec{P}} = \sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{p}}^{\,(i)} = \underbrace{\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N} \vec{F}^{(ij)}}_{=\vec{0},\ \text{da}\ \vec{F}^{(ij)} = -\vec{F}^{(ji)}} + \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{ex}^{(i)} = \vec{F}_{ex}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\dot{\vec{P}} = M\ddot{\vec{R}} = \vec{F}_{ex}}$$

Der Schwerpunkt bewegt sich so, als ob die gesamte Masse in ihm vereint wäre und alle äußeren Kräfte an ihm wirkten!

$$\Rightarrow \quad \boxed{\dot{\vec{P}} = M\ddot{\vec{R}} = \vec{F}_{ex}}$$

Der Schwerpunkt bewegt sich so, als ob die gesamte Masse in ihm vereint wäre und alle äußeren Kräfte an ihm wirkten!

- Grundlage für das Funktionieren des Konzepts der Punktmassen

$$\Rightarrow \quad \boxed{\dot{\vec{P}} = M\ddot{\vec{R}} = \vec{F}_{ex}}$$

Der Schwerpunkt bewegt sich so, als ob die gesamte Masse in ihm vereint wäre und alle äußeren Kräfte an ihm wirkten!

- Grundlage für das Funktionieren des Konzepts der Punktmassen
- abgeschlossene Systeme:

$$\vec{F}_{ex}^{(i)} = \vec{0} \;\Rightarrow\; \vec{F}_{ex} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{P}} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = const.$$

1.4.2 Drehimpulssatz

1.4.2 Drehimpulssatz

Definitionen:

- Gesamtdrehimpuls: $$\vec{L} \equiv \sum_{i=1}^{N} \vec{L}^{(i)} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}^{(i)} \times \vec{p}^{(i)}$$
- gesamtes äußeres Drehmoment: $$\vec{N}_{ex} \equiv \sum_{i=1}^{N} \vec{r}^{(i)} \times \vec{F}_{ex}^{(i)}$$

1.4.2 Drehimpulssatz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Definitionen:

- Gesamtdrehimpuls: $\vec{L} \equiv \sum_{i=1}^{N} \vec{L}^{(i)} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}^{(i)} \times \vec{p}^{(i)}$
- gesamtes äußeres Drehmoment: $\vec{N}_{ex} \equiv \sum_{i=1}^{N} \vec{r}^{(i)} \times \vec{F}_{ex}^{(i)}$

$$\Rightarrow \quad \dot{\vec{L}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt}\left(\vec{r}^{(i)} \times \vec{p}^{(i)}\right) = \sum_{i=1}^{N}\left(\underbrace{\dot{\vec{r}}^{(i)} \times \vec{p}^{(i)}}_{\dot{\vec{r}}^{(i)} \times m_i \dot{\vec{r}}^{(i)} = \vec{0}} + \vec{r}^{(i)} \times \underbrace{\dot{\vec{p}}^{(i)}}_{\vec{F}^{(i)}} \right)$$

1.4.2 Drehimpulssatz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Definitionen:

- Gesamtdrehimpuls: $\vec{L} \equiv \sum_{i=1}^{N} \vec{L}^{(i)} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}^{\,(i)} \times \vec{p}^{\,(i)}$
- gesamtes äußeres Drehmoment: $\vec{N}_{ex} \equiv \sum_{i=1}^{N} \vec{r}^{\,(i)} \times \vec{F}_{ex}^{(i)}$

$$\Rightarrow \quad \dot{\vec{L}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt} \left(\vec{r}^{\,(i)} \times \vec{p}^{\,(i)} \right) = \sum_{i=1}^{N} \Big(\underbrace{\dot{\vec{r}}^{\,(i)} \times \vec{p}^{\,(i)}}_{\dot{\vec{r}}^{\,(i)} \times m_i \dot{\vec{r}}^{\,(i)} = \vec{0}} + \vec{r}^{\,(i)} \times \underbrace{\dot{\vec{p}}^{\,(i)}}_{\vec{F}^{(i)}} \Big)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \vec{r}^{\,(i)} \times \Big(\vec{F}_{ex}^{(i)} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \vec{F}^{(ij)} \Big) = \vec{N}_{ex} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N} \vec{r}^{\,(i)} \times \vec{F}^{(ij)}$$

1.4.2 Drehimpulssatz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Definitionen:

- Gesamtdrehimpuls: $$\vec{L} \equiv \sum_{i=1}^{N} \vec{L}^{(i)} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}^{(i)} \times \vec{p}^{(i)}$$
- gesamtes äußeres Drehmoment: $$\vec{N}_{ex} \equiv \sum_{i=1}^{N} \vec{r}^{(i)} \times \vec{F}_{ex}^{(i)}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\vec{L}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt}\left(\vec{r}^{(i)} \times \vec{p}^{(i)}\right) = \sum_{i=1}^{N} \Big(\underbrace{\dot{\vec{r}}^{(i)} \times \vec{p}^{(i)}}_{\dot{\vec{r}}^{(i)} \times m_i \dot{\vec{r}}^{(i)} = \vec{0}} + \vec{r}^{(i)} \times \underbrace{\dot{\vec{p}}^{(i)}}_{\vec{F}^{(i)}} \Big)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \vec{r}^{(i)} \times \Big(\vec{F}_{ex}^{(i)} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \vec{F}^{(ij)}\Big) = \vec{N}_{ex} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N} \vec{r}^{(i)} \times \vec{F}^{(ij)}$$

$$= \vec{N}_{ex} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{N} \vec{r}^{(i)} \times \vec{F}^{(ij)} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^{N} \vec{r}^{(i)} \times \vec{F}^{(ij)}$$

1.4.2 Drehimpulssatz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Definitionen:

- Gesamtdrehimpuls: $\vec{L} \equiv \sum_{i=1}^{N} \vec{L}^{(i)} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}^{\,(i)} \times \vec{p}^{\,(i)}$
- gesamtes äußeres Drehmoment: $\vec{N}_{ex} \equiv \sum_{i=1}^{N} \vec{r}^{\,(i)} \times \vec{F}^{(i)}_{ex}$

$$\Rightarrow \quad \dot{\vec{L}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt}\left(\vec{r}^{\,(i)} \times \vec{p}^{\,(i)}\right) = \sum_{i=1}^{N} \left(\underbrace{\dot{\vec{r}}^{\,(i)} \times \vec{p}^{\,(i)}}_{\dot{\vec{r}}^{\,(i)} \times m_i \dot{\vec{r}}^{\,(i)} = \vec{0}} + \vec{r}^{\,(i)} \times \underbrace{\dot{\vec{p}}^{\,(i)}}_{\vec{F}^{(i)}} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \vec{r}^{\,(i)} \times \left(\vec{F}^{(i)}_{ex} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \vec{F}^{(ij)} \right) = \vec{N}_{ex} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N} \vec{r}^{\,(i)} \times \vec{F}^{(ij)}$$

$$= \vec{N}_{ex} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{N} \vec{r}^{\,(i)} \times \vec{F}^{(ij)} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^{N} \vec{r}^{\,(i)} \times \vec{F}^{(ij)} \quad = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{N} \left(\vec{r}^{\,(i)} \times \vec{F}^{(ij)} + \vec{r}^{\,(j)} \times \vec{F}^{(ji)} \right)$$

$$\dot{\vec{L}} = \vec{N}_{ex} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{N} \left(\vec{r}^{\,(i)} \times \vec{F}^{(ij)} + \vec{r}^{\,(j)} \times \vec{F}^{(ji)} \right)$$

$$\dot{\vec{L}} = \vec{N}_{ex} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{N} \left(\vec{r}^{\,(i)} \times \vec{F}^{(ij)} + \vec{r}^{\,(j)} \times \vec{F}^{(ji)}\right) \overset{N3}{=} \vec{N}_{ex} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{N} \left(\vec{r}^{\,(i)} - \vec{r}^{\,(j)}\right) \times \vec{F}^{(ij)}$$

$$\dot{\vec{L}} = \vec{N}_{ex} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{N} \left(\vec{r}^{\,(i)} \times \vec{F}^{(ij)} + \vec{r}^{\,(j)} \times \vec{F}^{(ji)}\right) \overset{N3}{=} \vec{N}_{ex} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{N} \left(\vec{r}^{\,(i)} - \vec{r}^{\,(j)}\right) \times \vec{F}^{(ij)}$$

zentrale Zweiteilchen-Kräfte: $\vec{F}^{(ij)} \propto (\vec{r}^{\,(i)} - \vec{r}^{\,(i)})$

$$\dot{\vec{L}} = \vec{N}_{ex} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{N} \left(\vec{r}^{\,(i)} \times \vec{F}^{(ij)} + \vec{r}^{\,(j)} \times \vec{F}^{(ji)} \right) \stackrel{N3}{=} \vec{N}_{ex} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{N} \left(\vec{r}^{\,(i)} - \vec{r}^{\,(j)} \right) \times \vec{F}^{(ij)}$$

zentrale Zweiteilchen-Kräfte: $\vec{F}^{(ij)} \propto (\vec{r}^{\,(i)} - \vec{r}^{\,(i)})$

$\Rightarrow \quad \boxed{\dot{\vec{L}} = \vec{N}_{ex}}$ für zentrale Zweiteilchen-Kräfte

Zerlegung der Ortsvektoren in Schwerpunktsvektor + Rest: $\vec{r}^{(i)} = \vec{R} + \vec{r}^{(i)\,\prime}$

Zerlegung der Ortsvektoren in Schwerpunktsvektor + Rest: $\vec{r}^{(i)} = \vec{R} + \vec{r}^{(i)\,\prime}$

$$\Rightarrow \vec{L} = \sum_i \left(\vec{R} + \vec{r}^{(i)\,\prime}\right) \times \vec{p}^{\,(i)}$$

Zerlegung der Ortsvektoren in Schwerpunktsvektor + Rest: $\vec{r}^{(i)} = \vec{R} + \vec{r}^{\,(i)\,\prime}$

$$\Rightarrow \quad \vec{L} = \sum_i \left(\vec{R} + \vec{r}^{(i)\,\prime}\right) \times \vec{p}^{\,(i)}$$

$$= \vec{R} \times \sum_i \vec{p}^{\,(i)} + \sum_i \; \vec{r}^{\,(i)\,\prime} \times m_i \left(\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}^{\,(i)\,\prime}\right)$$

Zerlegung der Ortsvektoren in Schwerpunktsvektor + Rest: $\vec{r}^{(i)} = \vec{R} + \vec{r}^{\,(i)\,\prime}$

$$\Rightarrow \; \vec{L} = \sum_i \left(\vec{R} + \vec{r}^{(i)\,\prime}\right) \times \vec{p}^{\,(i)}$$

$$= \vec{R} \times \sum_i \vec{p}^{\,(i)} + \sum_i \; \vec{r}^{\,(i)\,\prime} \times m_i \big(\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}^{\,(i)\,\prime}\big)$$

$$= \vec{R} \times \vec{P} + \big(\sum_i m_i \vec{r}^{\,(i)\,\prime}\big) \times \dot{\vec{R}} + \sum_i \vec{r}^{\,(i)\,\prime} \times m_i \dot{\vec{r}}^{\,(i)\,\prime}$$

Zerlegung der Ortsvektoren in Schwerpunktsvektor + Rest: $\vec{r}^{(i)} = \vec{R} + \vec{r}^{\,(i)\,\prime}$

$$\Rightarrow \vec{L} = \sum_i \left(\vec{R} + \vec{r}^{(i)\,\prime}\right) \times \vec{p}^{\,(i)}$$

$$= \vec{R} \times \sum_i \vec{p}^{\,(i)} + \sum_i \vec{r}^{\,(i)\,\prime} \times m_i \left(\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}^{\,(i)\,\prime}\right)$$

$$= \vec{R} \times \vec{P} + \left(\sum_i m_i \vec{r}^{\,(i)\,\prime}\right) \times \dot{\vec{R}} + \sum_i \vec{r}^{\,(i)\,\prime} \times m_i \dot{\vec{r}}^{\,(i)\,\prime}$$

$$M\vec{R} = \sum_i m_i \vec{r}^{\,(i)} = \sum_i m_i \vec{R} + \sum_i m_i \vec{r}^{\,(i)\,\prime} = M\vec{R} + \sum_i m_i \vec{r}^{\,(i)\,\prime} \quad \Rightarrow \quad \sum_i m_i \vec{r}^{\,(i)\,\prime} = \vec{0}$$

Zerlegung der Ortsvektoren in Schwerpunktsvektor + Rest: $\vec{r}^{(i)} = \vec{R} + \vec{r}^{\,(i)\,\prime}$

$$\Rightarrow \ \vec{L} = \sum_i \left(\vec{R} + \vec{r}^{(i)\,\prime}\right) \times \vec{p}^{\,(i)}$$

$$= \vec{R} \times \sum_i \vec{p}^{\,(i)} + \sum_i \ \vec{r}^{\,(i)\,\prime} \times m_i \left(\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}^{\,(i)\,\prime}\right)$$

$$= \vec{R} \times \vec{P} + \Big(\sum_i m_i \vec{r}^{\,(i)\,\prime}\Big) \times \dot{\vec{R}} + \sum_i \vec{r}^{\,(i)\,\prime} \times m_i \dot{\vec{r}}^{\,(i)\,\prime}$$

$$M\vec{R} = \sum_i m_i \vec{r}^{\,(i)} = \sum_i m_i \,\vec{R} + \sum_i m_i \vec{r}^{\,(i)\,\prime} = M\vec{R} + \sum_i m_i \vec{r}^{\,(i)\,\prime} \quad \Rightarrow \quad \sum_i m_i \vec{r}^{\,(i)\,\prime} = \vec{0}$$

Def: $\vec{p}^{\,(i)\,\prime} \equiv m_i \dot{\vec{r}}^{\,(i)\,\prime}$

Zerlegung der Ortsvektoren in Schwerpunktsvektor + Rest: $\vec{r}^{(i)} = \vec{R} + \vec{r}^{(i)\,\prime}$

$$\Rightarrow \vec{L} = \sum_i \left(\vec{R} + \vec{r}^{(i)\,\prime}\right) \times \vec{p}^{\,(i)}$$
$$= \vec{R} \times \sum_i \vec{p}^{\,(i)} + \sum_i \vec{r}^{\,(i)\,\prime} \times m_i \left(\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}^{\,(i)\,\prime}\right)$$
$$= \vec{R} \times \vec{P} + \left(\sum_i m_i \vec{r}^{\,(i)\,\prime}\right) \times \dot{\vec{R}} + \sum_i \vec{r}^{\,(i)\,\prime} \times m_i \dot{\vec{r}}^{\,(i)\,\prime}$$

$$M\vec{R} = \sum_i m_i \vec{r}^{\,(i)} = \sum_i m_i \vec{R} + \sum_i m_i \vec{r}^{\,(i)\,\prime} = M\vec{R} + \sum_i m_i \vec{r}^{\,(i)\,\prime} \quad \Rightarrow \quad \sum_i m_i \vec{r}^{\,(i)\,\prime} = \vec{0}$$

Def: $\vec{p}^{\,(i)\,\prime} \equiv m_i \dot{\vec{r}}^{\,(i)\,\prime}$

$$\Rightarrow \quad \vec{L} \quad = \quad \underbrace{\vec{R} \times \vec{P}}_{\text{„Bahn-Drehimpuls“}} \quad + \quad \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \vec{r}^{\,(i)\,\prime} \times \vec{p}^{\,(i)\,\prime}}_{\text{„innerer Drehimpuls“, „Eigendrehimpuls“}}$$