Koordinatenwahl

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

- Wähle $\vec{L} = L\vec{e}_z \quad \Rightarrow$ Bewegung in der xy-Ebene

Koordinatenwahl

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Wähle $\vec{L} = L\vec{e}_z \quad \Rightarrow$ Bewegung in der xy-Ebene
- Zentralkraft $\Rightarrow$ $\vec{F}$, V radialsymmetrisch

Koordinatenwahl

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Wähle $\vec{L} = L\vec{e}_z \quad \Rightarrow$ Bewegung in der *xy*-Ebene
- Zentralkraft $\Rightarrow$ $\vec{F}$, V radialsymmetrisch

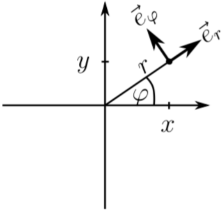
→ wähle ebene Polarkoordinaten:

$$x = r\cos\varphi$$

$$y = r\sin\varphi$$

$$\vec{e}_r = \cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y = \vec{e}_r(\varphi)$$

$$\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y = \vec{e}_\varphi(\varphi)$$

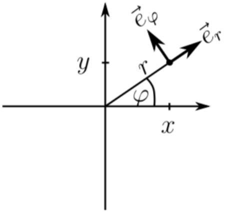


Koordinatenwahl

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Wähle $\vec{L} = L\vec{e}_z \quad \Rightarrow$ Bewegung in der *xy*-Ebene
- Zentralkraft $\Rightarrow$ $\vec{F}$, V radialsymmetrisch

→ wähle ebene Polarkoordinaten:



$$x = r\cos\varphi$$

$$y = r\sin\varphi$$

$$\vec{e}_r = \cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y = \vec{e}_r(\varphi)$$

$$\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y = \vec{e}_\varphi(\varphi)$$

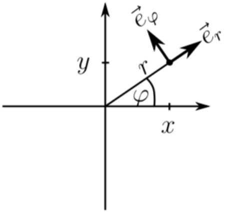
$$r = r(t),\ \varphi = \varphi(t) \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{e}}_r = (-\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y)\,\dot\varphi = \vec{e}_\varphi\,\dot\varphi$$

$$\dot{\vec{e}}_\varphi = (-\cos\varphi\,\vec{e}_x - \sin\varphi\,\vec{e}_y)\,\dot\varphi = -\vec{e}_r\,\dot\varphi$$

Koordinatenwahl

- Wähle $\vec{L} = L\vec{e}_z \quad \Rightarrow$ Bewegung in der xy-Ebene
- Zentralkraft $\Rightarrow$ $\vec{F}$, V radialsymmetrisch

→ wähle ebene Polarkoordinaten:



$$x = r\cos\varphi$$

$$y = r\sin\varphi$$

$$\vec{e}_r = \cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y = \vec{e}_r(\varphi)$$

$$\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y = \vec{e}_\varphi(\varphi)$$

$$r = r(t),\ \varphi = \varphi(t) \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{e}}_r = (-\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y)\,\dot\varphi = \vec{e}_\varphi\,\dot\varphi$$

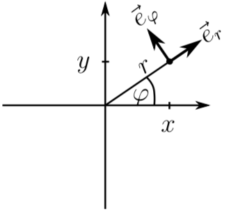
$$\dot{\vec{e}}_\varphi = (-\cos\varphi\,\vec{e}_x - \sin\varphi\,\vec{e}_y)\,\dot\varphi = -\vec{e}_r\,\dot\varphi$$

Ortsvektor: $\vec{r}(t) = r(t)\,\vec{e}_r(t)$

Koordinatenwahl

- Wähle $\vec{L} = L\vec{e}_z \quad \Rightarrow$ Bewegung in der *xy*-Ebene
- Zentralkraft $\Rightarrow \vec{F}$, V radialsymmetrisch

→ wähle ebene Polarkoordinaten:



$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$
$$\vec{e}_r = \cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y = \vec{e}_r(\varphi)$$
$$\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y = \vec{e}_\varphi(\varphi)$$

$$r = r(t),\ \varphi = \varphi(t) \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{e}}_r = (-\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y)\,\dot\varphi = \vec{e}_\varphi\,\dot\varphi$$
$$\dot{\vec{e}}_\varphi = (-\cos\varphi\,\vec{e}_x - \sin\varphi\,\vec{e}_y)\,\dot\varphi = -\vec{e}_r\,\dot\varphi$$

Ortsvektor: $\vec{r}(t) = r(t)\,\vec{e}_r(t) \quad \Rightarrow \quad \vec{v}(t) = \dot{r}(t)\,\vec{e}_r(t) + r(t)\,\dot{\vec{e}}_r(t) = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot\varphi\,\vec{e}_\varphi$

$$\vec{r} = r\,\vec{e}_r, \qquad \vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{r} = r\,\vec{e}_r, \qquad \vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

Drehimpuls:

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} = mr\dot{r}\,\underbrace{\vec{e}_r \times \vec{e}_r}_{=\vec{0}} + mr^2\dot{\varphi}\,\underbrace{\vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi}_{=\vec{e}_z} = mr^2\dot{\varphi}\,\vec{e}_z$$

$$\vec{r} = r\,\vec{e}_r, \qquad \vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

Drehimpuls:

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} = mr\dot{r}\,\underbrace{\vec{e}_r \times \vec{e}_r}_{=\vec{0}} + mr^2\dot{\varphi}\,\underbrace{\vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi}_{=\vec{e}_z} = mr^2\dot{\varphi}\,\vec{e}_z \qquad \Rightarrow \quad \vec{L}^{\,2} = m^2 r^4 \dot{\varphi}^2$$

$$\vec{r} = r\,\vec{e}_r, \qquad \vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

Drehimpuls:

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} = m r \dot{r}\,\underbrace{\vec{e}_r \times \vec{e}_r}_{=\vec{0}} + m r^2 \dot{\varphi}\,\underbrace{\vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi}_{=\vec{e}_z} = m r^2 \dot{\varphi}\,\vec{e}_z \qquad \Rightarrow \quad \vec{L}^{\,2} = m^2 r^4 \dot{\varphi}^2$$

Energie:

$$E = T + V = \frac{1}{2} m \vec{v}^{\,2} + V(r) = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2\right) + V(r)$$

2.3 Lösung der Bewegungsgleichung für allgemeine Zentralkäfte

2.3 Lösung der Bewegungsgleichung für allgemeine Zentralkäfte

$$\vec{L}^{\,2} = m^2 r^4 \dot{\varphi}^2 \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi}^2 = \frac{\vec{L}^{\,2}}{m^2 r^4}$$

2.3 Lösung der Bewegungsgleichung für allgemeine Zentralkäfte

$$\vec{L}^2 = m^2 r^4 \dot{\varphi}^2 \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi}^2 = \frac{\vec{L}^2}{m^2 r^4}$$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \right) + V(r) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{\vec{L}^2}{2mr^2} + V(r)$$

2.3 Lösung der Bewegungsgleichung für allgemeine Zentralkäfte

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$\vec{L}^2 = m^2 r^4 \dot{\varphi}^2 \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi}^2 = \frac{\vec{L}^2}{m^2 r^4}$$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \right) + V(r) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{\vec{L}^2}{2mr^2} + V(r)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + V_{eff}(r)} \quad \text{mit} \quad V_{eff}(r) = V(r) + \frac{\vec{L}^2}{2mr^2}$$

„effektives Potenzial“

2.3 Lösung der Bewegungsgleichung für allgemeine Zentralkäfte

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$\vec{L}^2 = m^2 r^4 \dot{\varphi}^2 \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi}^2 = \frac{\vec{L}^2}{m^2 r^4}$$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \right) + V(r) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{\vec{L}^2}{2mr^2} + V(r)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + V_{eff}(r)} \qquad \text{mit} \quad V_{eff}(r) = V(r) + \frac{\vec{L}^2}{2mr^2}$$

„effektives Potenzial“

- entspricht formal der Bewegung eines Teilchens in einer Dimension mit $T_{1D} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2$ im Potenzial $V_{eff}(r)$

2.3 Lösung der Bewegungsgleichung für allgemeine Zentralkäfte

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$\vec{L}^2 = m^2 r^4 \dot{\varphi}^2 \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi}^2 = \frac{\vec{L}^2}{m^2 r^4}$$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \right) + V(r) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{\vec{L}^2}{2mr^2} + V(r)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + V_{eff}(r)} \quad \text{mit} \quad V_{eff}(r) = V(r) + \frac{\vec{L}^2}{2mr^2}$$

„effektives Potenzial“

- entspricht formal der Bewegung eines Teilchens in einer Dimension mit $T_{1D} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2$ im Potenzial $V_{eff}(r)$
- $V_Z(r) = \frac{\vec{L}^2}{2mr^2} = \frac{1}{2} m r^2 \dot{\varphi}^2$ kommt aber eigentlich aus der kinetischen Energie des 3D-Problems

2.3 Lösung der Bewegungsgleichung für allgemeine Zentralkäfte

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$\vec{L}^{\,2} = m^2 r^4 \dot{\varphi}^2 \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi}^2 = \frac{\vec{L}^{\,2}}{m^2 r^4}$$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \right) + V(r) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{\vec{L}^{\,2}}{2mr^2} + V(r)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + V_{eff}(r)} \qquad \text{mit} \quad V_{eff}(r) = V(r) + \frac{\vec{L}^{\,2}}{2mr^2}$$

„effektives Potenzial“

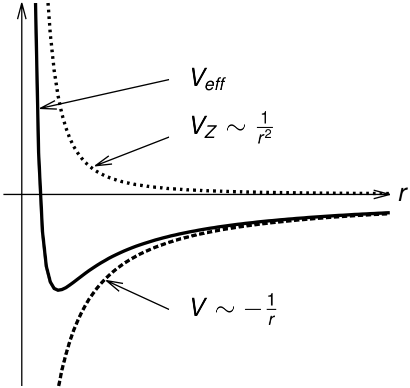
- entspricht formal der Bewegung eines Teilchens in einer Dimension mit $T_{1D} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2$ im Potenzial $V_{eff}(r)$
- $V_Z(r) = \frac{\vec{L}^{\,2}}{2mr^2} = \frac{1}{2} m r^2 \dot{\varphi}^2$ kommt aber eigentlich aus der kinetischen Energie des 3D-Problems
- physikalische Interpretation von V_Z:

  $$\vec{F}_Z(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V_Z(r) = \frac{\vec{L}^{\,2}}{mr^3}\, \vec{e}_r = m r \dot{\varphi}^2\, \vec{e}_r \quad \hat{=} \quad \text{Zentrifugalkraft}$$

  $\rightarrow \quad V_Z$ = Zentrifugalpotenzial

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Beispiel: $V(r) = -\frac{\kappa}{r}$, $\kappa > 0$ (z.B. Gravitation: $\kappa = Gm_1 m_2$)



- kleine r: V_Z dominiert
- große r: V dominiert

- allgemein: $E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{eff}(r)$

$$\Leftrightarrow \; E - V_{eff}(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 \geq 0$$

- allgemein: $E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{eff}(r)$

$$\Leftrightarrow \; E - V_{eff}(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 \geq 0$$

Für vorgegebene Energie E ergibt sich daraus:

  - klassisch erlaubter Bereich: r mit $V_{eff}(r) \leq E$
  - klassisch verbotener Bereich: r mit $V_{eff}(r) > E$

- allgemein: $E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{eff}(r)$

$$\Leftrightarrow \; E - V_{eff}(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 \geq 0$$

Für vorgegebene Energie E ergibt sich daraus:

  - klassisch erlaubter Bereich: r mit $V_{eff}(r) \leq E$
  - klassisch verbotener Bereich: r mit $V_{eff}(r) > E$
  - klassische Umkehrpunkte: $V_{eff}(r = r_{\mathrm{Umk}}) = E$

- allgemein: $E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{eff}(r)$

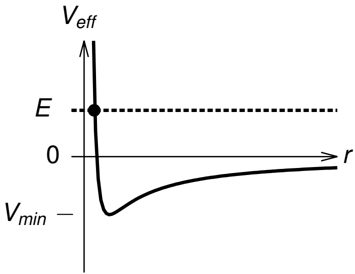
  $$\Leftrightarrow \; E - V_{eff}(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 \geq 0$$

  Für vorgegebene Energie E ergibt sich daraus:

  - klassisch erlaubter Bereich: r mit $V_{eff}(r) \leq E$
  - klassisch verbotener Bereich: r mit $V_{eff}(r) > E$
  - klassische Umkehrpunkte: $V_{eff}(r = r_{\text{Umk}}) = E$

    $\Rightarrow \; \dot{r} = 0 \; \rightarrow$ (Radialbewegung ändert Richtung)

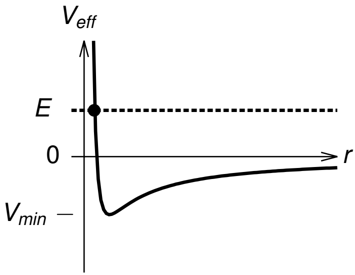
Beispiel: $V(r) = -\frac{\kappa}{r}$, $\kappa > 0$ (z.B. Gravitation: $\kappa = Gm_1 m_2$)



<u>$E > 0$</u>

- Umkehrpunkt: r_{min}
- erlaubter Bereich: $r \geq r_{min}$
- verbotener Bereich: $r < r_{min}$

Beispiel: $V(r) = -\frac{\kappa}{r}$, $\kappa > 0$ (z.B. Gravitation: $\kappa = Gm_1 m_2$)

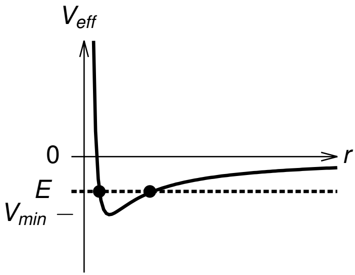


$\underline{E > 0}$

- Umkehrpunkt: r_{min}
- erlaubter Bereich: $r \geq r_{min}$
- verbotener Bereich: $r < r_{min}$

ungebundene Bewegung

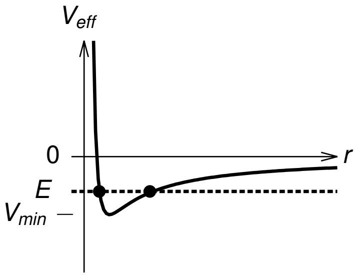
Beispiel: $V(r) = -\frac{\kappa}{r}$, $\kappa > 0$ (z.B. Gravitation: $\kappa = Gm_1 m_2$)



$\underline{V_{min} < E < 0}$

- Umkehrpunkte: $r_{min} < r_{max}$
- erlaubter Bereich:
  $r_{min} \leq r \leq r_{max}$
- verbotene Bereiche:
  $r < r_{min}, \quad r > r_{max}$

Beispiel: $V(r) = -\frac{\kappa}{r}$, $\kappa > 0$ (z.B. Gravitation: $\kappa = Gm_1 m_2$)



$\underline{V_{min} < E < 0}$

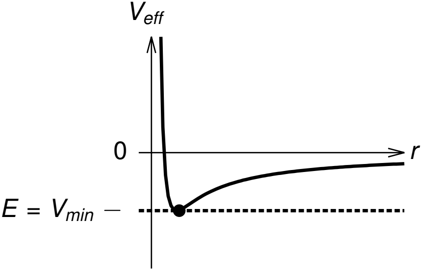
- Umkehrpunkte: $r_{min} < r_{max}$
- erlaubter Bereich:

  $r_{min} \leq r \leq r_{max}$
- verbotene Bereiche:

  $r < r_{min}, \quad r > r_{max}$

gebundene Bewegung

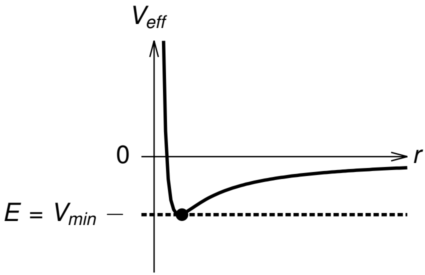
Beispiel: $V(r) = -\frac{\kappa}{r}$, $\kappa > 0$ (z.B. Gravitation: $\kappa = Gm_1 m_2$)



$\underline{E = V_{min}}$

= Grenzfall mit $r_{min} = r_{max}$

Beispiel: $V(r) = -\frac{\kappa}{r}$, $\kappa > 0$ (z.B. Gravitation: $\kappa = G m_1 m_2$)

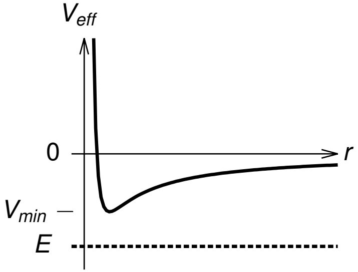


$\underline{E = V_{min}}$

= Grenzfall mit $r_{min} = r_{max}$

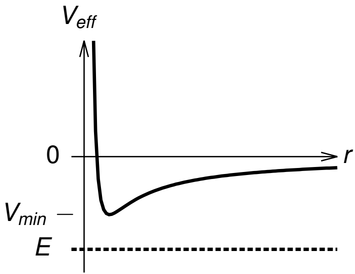
Kreisbahn

Beispiel: $V(r) = -\frac{\kappa}{r}$, $\kappa > 0$ (z.B. Gravitation: $\kappa = Gm_1 m_2$)



$\underline{E < V_{min}}$

Beispiel: $V(r) = -\frac{\kappa}{r}$, $\kappa > 0$ (z.B. Gravitation: $\kappa = Gm_1 m_2$)



$\underline{E < V_{min}}$

keine Lösung

Lösung der radialen Bewegungsgleichung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- $E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{eff}(r)$

Lösung der radialen Bewegungsgleichung

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

- $E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{eff}(r) \quad \Rightarrow \quad \frac{dr}{dt} = \dot{r} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\big(E - V_{eff}(r)\big)}$

Lösung der radialen Bewegungsgleichung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- $E = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + V_{eff}(r) \quad \Rightarrow \quad \frac{dr}{dt} = \dot{r} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V_{eff}(r)\right)}$
- Trennung der Variablen: $dt = \pm \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V_{eff}(r)\right)}}$

Lösung der radialen Bewegungsgleichung

- $E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + V_{eff}(r) \quad \Rightarrow \quad \frac{dr}{dt} = \dot{r} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V_{eff}(r)\right)}$
- Trennung der Variablen: $dt = \pm \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V_{eff}(r)\right)}}$
- Integration: $t(r) - t(r_0) = \int\limits_{t(r_0)}^{t(r)} dt = \pm \int\limits_{r_0}^{r} \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V_{eff}(r')\right)}}$

Lösung der radialen Bewegungsgleichung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- $E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{eff}(r) \quad \Rightarrow \quad \frac{dr}{dt} = \dot{r} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V_{eff}(r)\right)}$
- Trennung der Variablen: $dt = \pm\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V_{eff}(r)\right)}}$
- Integration: $t(r) - t(r_0) = \int\limits_{t(r_0)}^{t(r)} dt = \pm\int\limits_{r_0}^{r} \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V_{eff}(r')\right)}} \quad \xrightarrow{\text{Umkehrfkt.}} \quad r(t)$

Lösung der radialen Bewegungsgleichung

- $E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + V_{eff}(r) \quad \Rightarrow \quad \frac{dr}{dt} = \dot{r} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V_{eff}(r)\right)}$
- Trennung der Variablen: $dt = \pm \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V_{eff}(r)\right)}}$
- Integration: $t(r) - t(r_0) = \int\limits_{t(r_0)}^{t(r)} dt = \pm \int\limits_{r_0}^{r} \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V_{eff}(r')\right)}} \quad \stackrel{\text{Umkehrfkt.}}{\longrightarrow} \quad r(t)$
  - E und L legen nur den Betrag der Radialgeschwindigkeit im Abstand r fest, nicht aber deren Richtung ($\pm$).
  - Zeitumkehrinvarianz:
    Die „Vorwärtsbewegung“von r_0 nach r dauert genauso lange wie die „Rückwärtsbewegung“on r nach r_0.

Winkelbewegung

- $\vec{L} = mr^2\dot{\varphi}\,\vec{e}_z = const.$

  $\Rightarrow$ Vorzeichen von $\dot{\varphi}$ ändert sich nicht $\rightarrow$ konstanter Umlaufsinn

Winkelbewegung

- $\vec{L} = mr^2 \dot{\varphi}\, \vec{e}_z = const.$

  $\Rightarrow$ Vorzeichen von $\dot{\varphi}$ ändert sich nicht $\longrightarrow$ konstanter Umlaufsinn

- Wähle $\vec{L} = L\, \vec{e}_z, \quad L = |\vec{L}| > 0$

  $\Rightarrow \quad \dot{\varphi} > 0$ $\longrightarrow$ Bewegung gegen den Uhrzeigersinn

Winkelbewegung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- $\vec{L} = mr^2\dot{\varphi}\,\vec{e}_z = const.$

  $\Rightarrow$ Vorzeichen von $\dot{\varphi}$ ändert sich nicht → konstanter Umlaufsinn

- Wähle $\vec{L} = L\,\vec{e}_z, \quad L = |\vec{L}| > 0$

  $\Rightarrow \dot{\varphi} > 0$ → Bewegung gegen den Uhrzeigersinn

- $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{L}{mr^2} \quad \Rightarrow \quad d\varphi = \frac{L}{mr^2}\,dt$

Winkelbewegung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- $\vec{L} = mr^2\dot{\varphi}\,\vec{e}_z = const.$

  $\Rightarrow$ Vorzeichen von $\dot{\varphi}$ ändert sich nicht $\longrightarrow$ konstanter Umlaufsinn

- Wähle $\vec{L} = L\,\vec{e}_z, \quad L = |\vec{L}| > 0$

  $\Rightarrow$ $\dot{\varphi} > 0$ $\longrightarrow$ Bewegung gegen den Uhrzeigersinn

- $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{L}{mr^2} \quad \Rightarrow \quad d\varphi = \frac{L}{mr^2}\,dt$

  $$\Rightarrow \varphi(t) - \varphi(t_0) = \int_{t_0}^{t} dt'\,\frac{L}{mr^2(t')}$$

Bahnkurve

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

- gesucht: $r = r(\varphi)$

Bahnkurve

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

- gesucht: $r = r(\varphi)$
- $r = r(\varphi(t)) \quad \Rightarrow \quad \dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}\,\dot{\varphi} \quad \Rightarrow \quad \frac{dr}{d\varphi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}}$

Bahnkurve

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- gesucht: $r = r(\varphi)$
- $r = r(\varphi(t)) \quad \Rightarrow \quad \dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}\,\dot{\varphi} \quad \Rightarrow \quad \frac{dr}{d\varphi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}}$
- Wir hatten: $\dot{r} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\big(E - V_{eff}(r)\big)}\,, \quad \dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2}$

Bahnkurve

- gesucht: $r = r(\varphi)$
- $r = r(\varphi(t)) \quad \Rightarrow \quad \dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}\,\dot{\varphi} \quad \Rightarrow \quad \frac{dr}{d\varphi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}}$
- Wir hatten: $\dot{r} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V_{eff}(r)\right)}\,, \quad \dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2}$

$$\Rightarrow \quad \frac{dr}{d\varphi} = \pm\frac{\sqrt{2m}}{L}\,r^2\sqrt{E - V_{eff}(r)}$$

Bahnkurve

- gesucht: $r = r(\varphi)$
- $r = r(\varphi(t)) \quad \Rightarrow \quad \dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}\,\dot{\varphi} \quad \Rightarrow \quad \frac{dr}{d\varphi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}}$
- Wir hatten: $\dot{r} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\big(E - V_{eff}(r)\big)}\,, \quad \dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2}$

$$\Rightarrow \quad \frac{dr}{d\varphi} = \pm\frac{\sqrt{2m}}{L}\, r^2 \sqrt{E - V_{eff}(r)}$$

$$\Rightarrow \quad d\varphi = \pm\frac{L}{\sqrt{2m}}\, \frac{dr}{r^2\sqrt{E - V_{eff}(r)}}$$

Bahnkurve

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

- gesucht: $r = r(\varphi)$
- $r = r(\varphi(t)) \quad \Rightarrow \quad \dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}\,\dot{\varphi} \quad \Rightarrow \quad \frac{dr}{d\varphi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}}$
- Wir hatten: $\dot{r} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\big(E - V_{eff}(r)\big)}\,, \quad \dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2}$

$$\Rightarrow \quad \frac{dr}{d\varphi} = \pm\frac{\sqrt{2m}}{L}\,r^2\sqrt{E - V_{eff}(r)}$$

$$\Rightarrow \quad d\varphi = \pm\frac{L}{\sqrt{2m}}\,\frac{dr}{r^2\sqrt{E-V_{eff}(r)}}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(r) - \varphi(r_0) = \pm\frac{L}{\sqrt{2m}}\int_{r_0}^{r}\frac{dr'}{r'^{\,2}\sqrt{E-V_{eff}(r')}}$$

Bahnkurve

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

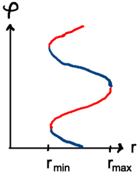
- gesucht: $r = r(\varphi)$
- $r = r(\varphi(t)) \quad \Rightarrow \quad \dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}\,\dot{\varphi} \quad \Rightarrow \quad \frac{dr}{d\varphi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}}$
- Wir hatten: $\dot{r} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\big(E - V_{eff}(r)\big)}\,, \qquad \dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2}$

$$\Rightarrow \quad \frac{dr}{d\varphi} = \pm\frac{\sqrt{2m}}{L}\, r^2 \sqrt{E - V_{eff}(r)}$$

$$\Rightarrow \quad d\varphi = \pm\frac{L}{\sqrt{2m}}\,\frac{dr}{r^2\sqrt{E - V_{eff}(r)}}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(r) - \varphi(r_0) = \pm\frac{L}{\sqrt{2m}}\int_{r_0}^{r}\frac{dr'}{r'^{\,2}\sqrt{E - V_{eff}(r')}}$$

+ für monoton wachsendes r
- für monoton fallendes r



Bahnkurve

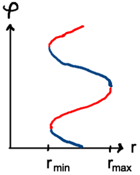
- gesucht: $r = r(\varphi)$
- $r = r(\varphi(t)) \quad \Rightarrow \quad \dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}\,\dot{\varphi} \quad \Rightarrow \quad \frac{dr}{d\varphi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}}$
- Wir hatten: $\dot{r} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\Big(E - V_{eff}(r)\Big)}\,, \qquad \dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2}$

$$\Rightarrow \quad \frac{dr}{d\varphi} = \pm\frac{\sqrt{2m}}{L}\,r^2\sqrt{E - V_{eff}(r)}$$

$$\Rightarrow \quad d\varphi = \pm\frac{L}{\sqrt{2m}}\,\frac{dr}{r^2\sqrt{E - V_{eff}(r)}}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(r) - \varphi(r_0) = \pm\frac{L}{\sqrt{2m}}\int_{r_0}^{r}\frac{dr'}{r'^{\,2}\sqrt{E - V_{eff}(r')}}$$

  + für monoton wachsendes r
  - für monoton fallendes r



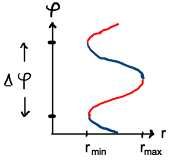
- Umkehrfunktion: $r(\varphi)$

Klassifizierung gebundener Bewegungen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Winkeländerung während einer Periode $r_{min} \rightarrow r_{max} \rightarrow r_{min}$:

$$\Delta\varphi = \frac{L}{\sqrt{2m}}\Big(\int_{r_{min}}^{r_{max}} dr' \cdots - \int_{r_{max}}^{r_{min}} dr' \; ... \Big) = \sqrt{\frac{2}{m}}\, L \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{dr'}{r'^{\,2}\sqrt{E - V_{eff}(r')}}$$

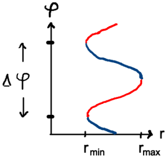


Klassifizierung gebundener Bewegungen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Winkeländerung während einer Periode $r_{min} \rightarrow r_{max} \rightarrow r_{min}$:

$$\Delta\varphi = \frac{L}{\sqrt{2m}}\left(\int\limits_{r_{min}}^{r_{max}} dr' \cdots - \int\limits_{r_{max}}^{r_{min}} dr' \,\ldots \right) = \sqrt{\frac{2}{m}}\, L \int\limits_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{dr'}{r'^{\,2}\sqrt{E - V_{eff}(r')}}$$



- $\Delta\varphi = 2\pi n,\ n \in \mathbb{N}$

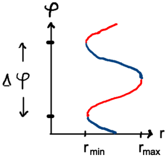
  $\Rightarrow$ Richtung von r_{min} („Perihel") konstant

Klassifizierung gebundener Bewegungen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Winkeländerung während einer Periode $r_{min} \to r_{max} \to r_{min}$:

$$\Delta\varphi = \frac{L}{\sqrt{2m}}\left(\int_{r_{min}}^{r_{max}} dr' \cdots - \int_{r_{max}}^{r_{min}} dr' \ \ldots \right) = \sqrt{\frac{2}{m}}\, L \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{dr'}{r'^{\,2}\sqrt{E - V_{eff}(r')}}$$



- $\Delta\varphi = 2\pi n,\ n \in \mathbb{N}$

  $\Rightarrow$ Richtung von r_{min} („Perihel") konstant

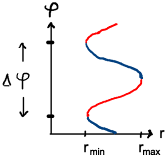
- $\Delta\varphi = 2\pi \frac{n}{m},\ n, m \in \mathbb{N}$: „geschlossene Bahn"

  $\Rightarrow$ Perihel kommt nach m Perioden (bzgl. r) zurück zum Ausgangspunkt

Klassifizierung gebundener Bewegungen

Winkeländerung während einer Periode $r_{min} \to r_{max} \to r_{min}$:

$$\Delta\varphi = \frac{L}{\sqrt{2m}}\Big(\int_{r_{min}}^{r_{max}} dr' \cdots - \int_{r_{max}}^{r_{min}} dr' \ \dots \Big) = \sqrt{\frac{2}{m}}\, L \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{dr'}{r'^{\,2}\sqrt{E - V_{eff}(r')}}$$



- $\Delta\varphi = 2\pi n,\ n \in \mathbb{N}$

  $\Rightarrow$ Richtung von r_{min} („Perihel“) konstant

- $\Delta\varphi = 2\pi \frac{n}{m},\ n, m \in \mathbb{N}$: „geschlossene Bahn“

  $\Rightarrow$ Perihel kommt nach m Perioden (bzgl. r) zurück zum Ausgangspunkt

- sonst: „offene Bahn“