2.4 Lösung für das Gravitationspotenzial

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

2.4 Lösung für das Gravitationspotenzial

- $V(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r} \equiv -\frac{\kappa}{r}$, $\qquad \kappa \equiv G m_1 m_2 = GMm \quad (m \equiv \mu)$

  $\Rightarrow \quad V_{eff} = -\frac{\kappa}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}$

2.4 Lösung für das Gravitationspotenzial

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- $V(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r} \equiv -\frac{\kappa}{r}\,, \qquad \kappa \equiv G m_1 m_2 = GMm \quad (m \equiv \mu)$

  $$\Rightarrow \quad V_{eff} = -\frac{\kappa}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}$$

  $$\Rightarrow \quad \frac{dr}{d\varphi} = \pm\frac{\sqrt{2m}}{L}\, r^2\sqrt{E - V_{eff}(r)} = \pm\frac{\sqrt{2m}}{L}\, r^2\sqrt{E + \frac{\kappa}{r} - \frac{L^2}{2mr^2}}$$

2.4 Lösung für das Gravitationspotenzial

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- $V(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r} \equiv -\frac{\kappa}{r}\,, \qquad \kappa \equiv Gm_1 m_2 = GMm \quad (m \equiv \mu)$

  $\Rightarrow \quad V_{eff} = -\frac{\kappa}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}$

  $\Rightarrow \quad \frac{dr}{d\varphi} = \pm\frac{\sqrt{2m}}{L}\, r^2\sqrt{E - V_{eff}(r)} = \pm\frac{\sqrt{2m}}{L}\, r^2\sqrt{E + \frac{\kappa}{r} - \frac{L^2}{2mr^2}}$

- Subst.: $u \equiv \frac{1}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}$

2.4 Lösung für das Gravitationspotenzial

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- $V(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r} \equiv -\frac{\kappa}{r}\,, \qquad \kappa \equiv Gm_1 m_2 = GMm \quad (m \equiv \mu)$

  $\Rightarrow \quad V_{eff} = -\frac{\kappa}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}$

  $\Rightarrow \quad \frac{dr}{d\varphi} = \pm\frac{\sqrt{2m}}{L}\, r^2\sqrt{E - V_{eff}(r)} = \pm\frac{\sqrt{2m}}{L}\, r^2\sqrt{E + \frac{\kappa}{r} - \frac{L^2}{2mr^2}}$

- Subst.: $u \equiv \frac{1}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}$

  $\Rightarrow \quad \frac{du}{d\varphi} = \mp\frac{\sqrt{2m}}{L}\sqrt{E + \kappa u - \frac{L^2}{2m}u^2}$

2.4 Lösung für das Gravitationspotenzial

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- $V(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r} \equiv -\frac{\kappa}{r}\,, \qquad \kappa \equiv G m_1 m_2 = GMm \quad (m \equiv \mu)$

  $\Rightarrow \quad V_{eff} = -\frac{\kappa}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}$

  $\Rightarrow \quad \frac{dr}{d\varphi} = \pm\frac{\sqrt{2m}}{L}\,r^2\sqrt{E - V_{eff}(r)} = \pm\frac{\sqrt{2m}}{L}\,r^2\sqrt{E + \frac{\kappa}{r} - \frac{L^2}{2mr^2}}$

- Subst.: $u \equiv \frac{1}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}$

  $\Rightarrow \quad \frac{du}{d\varphi} = \mp\frac{\sqrt{2m}}{L}\sqrt{E + \kappa u - \frac{L^2}{2m}u^2} \qquad \Rightarrow \quad \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{2mE}{L^2} + \frac{2m\kappa}{L^2}u - u^2$

2.4 Lösung für das Gravitationspotenzial

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- $V(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r} \equiv -\frac{\kappa}{r}\,, \qquad \kappa \equiv G m_1 m_2 = GMm \quad (m \equiv \mu)$

  $\Rightarrow \quad V_{eff} = -\frac{\kappa}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}$

  $\Rightarrow \quad \frac{dr}{d\varphi} = \pm\frac{\sqrt{2m}}{L}\, r^2 \sqrt{E - V_{eff}(r)} = \pm\frac{\sqrt{2m}}{L}\, r^2 \sqrt{E + \frac{\kappa}{r} - \frac{L^2}{2mr^2}}$

- Subst.: $u \equiv \frac{1}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}$

  $\Rightarrow \quad \frac{du}{d\varphi} = \mp\frac{\sqrt{2m}}{L}\sqrt{E + \kappa u - \frac{L^2}{2m}u^2} \qquad \Rightarrow \quad \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{2mE}{L^2} + \frac{2m\kappa}{L^2}u - u^2$

- Subst.: $w \equiv u - \frac{m\kappa}{L^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dw}{d\varphi} = \frac{du}{d\varphi}, \qquad w^2 = u^2 - \frac{2m\kappa}{L^2}u + \frac{m^2\kappa^2}{L^4}$

2.4 Lösung für das Gravitationspotenzial

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- $V(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r} \equiv -\frac{\kappa}{r}\,, \qquad \kappa \equiv G m_1 m_2 = GMm \quad (m \equiv \mu)$

  $\Rightarrow \quad V_{eff} = -\frac{\kappa}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}$

  $\Rightarrow \quad \frac{dr}{d\varphi} = \pm\frac{\sqrt{2m}}{L}\, r^2 \sqrt{E - V_{eff}(r)} = \pm\frac{\sqrt{2m}}{L}\, r^2 \sqrt{E + \frac{\kappa}{r} - \frac{L^2}{2mr^2}}$

- Subst.: $u \equiv \frac{1}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}$

  $\Rightarrow \quad \frac{du}{d\varphi} = \mp\frac{\sqrt{2m}}{L}\sqrt{E + \kappa u - \frac{L^2}{2m}u^2} \qquad \Rightarrow \quad \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{2mE}{L^2} + \frac{2m\kappa}{L^2}u - u^2$

- Subst.: $w \equiv u - \frac{m\kappa}{L^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dw}{d\varphi} = \frac{du}{d\varphi}, \qquad w^2 = u^2 - \frac{2m\kappa}{L^2}u + \frac{m^2\kappa^2}{L^4}$

  $\Rightarrow \quad \left(\frac{dw}{d\varphi}\right)^2 = -w^2 + \frac{m^2\kappa^2}{L^4} + \frac{2mE}{L^2}$

2.4 Lösung für das Gravitationspotenzial

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- $V(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r} \equiv -\frac{\kappa}{r}$, $\qquad \kappa \equiv Gm_1 m_2 = GMm \quad (m \equiv \mu)$

$$\Rightarrow \quad V_{eff} = -\frac{\kappa}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dr}{d\varphi} = \pm\frac{\sqrt{2m}}{L}\, r^2\sqrt{E - V_{eff}(r)} = \pm\frac{\sqrt{2m}}{L}\, r^2\sqrt{E + \frac{\kappa}{r} - \frac{L^2}{2mr^2}}$$

- Subst.: $u \equiv \frac{1}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}$

$$\Rightarrow \quad \frac{du}{d\varphi} = \mp\frac{\sqrt{2m}}{L}\sqrt{E + \kappa u - \frac{L^2}{2m}u^2} \qquad \Rightarrow \quad \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{2mE}{L^2} + \frac{2m\kappa}{L^2}u - u^2$$

- Subst.: $w \equiv u - \frac{m\kappa}{L^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dw}{d\varphi} = \frac{du}{d\varphi}, \quad w^2 = u^2 - \frac{2m\kappa}{L^2}u + \frac{m^2\kappa^2}{L^4}$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{dw}{d\varphi}\right)^2 = -w^2 + \frac{m^2\kappa^2}{L^4} + \frac{2mE}{L^2} = -w^2 + A^2 \quad \text{mit } A^2 \equiv \frac{m^2\kappa^2}{L^4} + \frac{2mE}{L^2}$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$\left(\frac{dw}{d\varphi}\right)^2 + w^2 = A^2, \qquad A^2 = \frac{m^2\kappa^2}{L^4} + \frac{2mE}{L^2}$$

$$\left(\frac{dw}{d\varphi}\right)^2 + w^2 = A^2, \qquad A^2 = \frac{m^2\kappa^2}{L^4} + \frac{2mE}{L^2}$$

- Lösung: $w(\varphi) = A\cos(\varphi - \varphi_0)$ (φ_0: beliebige Integrationskonstante)

$$\left(\frac{dw}{d\varphi}\right)^2 + w^2 = A^2, \qquad A^2 = \frac{m^2\kappa^2}{L^4} + \frac{2mE}{L^2}$$

- Lösung: $w(\varphi) = A\cos(\varphi - \varphi_0)$ (φ_0: beliebige Integrationskonstante)

  Beweis: $\frac{dw}{d\varphi} = -A\sin(\varphi - \varphi_0)$

$$\Rightarrow \left(\frac{dw}{d\varphi}\right)^2 + w^2 = A^2\left(\sin^2(\varphi - \varphi_0) + \cos^2(\varphi - \varphi_0)\right) = A^2 \quad \checkmark$$

$$\left(\frac{dw}{d\varphi}\right)^2 + w^2 = A^2, \qquad A^2 = \frac{m^2\kappa^2}{L^4} + \frac{2mE}{L^2}$$

- Lösung: $w(\varphi) = A\cos(\varphi - \varphi_0) \qquad (\varphi_0\text{: beliebige Integrationskonstante})$

  Beweis: $\frac{dw}{d\varphi} = -A\sin(\varphi - \varphi_0)$

$$\Rightarrow \left(\frac{dw}{d\varphi}\right)^2 + w^2 = A^2\left(\sin^2(\varphi - \varphi_0) + \cos^2(\varphi - \varphi_0)\right) = A^2 \quad \checkmark$$

- Zusammenstellung:

$$\frac{1}{r} = u = w + \frac{m\kappa}{L^2} = \sqrt{\frac{m^2\kappa^2}{L^4} + \frac{2mE}{L^2}}\cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{m\kappa}{L^2}$$

$$= \frac{m\kappa}{L^2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2L^2E}{m\kappa^2}}\cos(\varphi - \varphi_0)\right)$$

Kegelschnitte

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{lcl} r(\varphi) & = & \frac{p}{1+\varepsilon\cos(\varphi-\varphi_0)} \qquad \text{Kegelschnittgleichung} \\ p & = & \frac{L^2}{m\kappa} \\ \varepsilon & = & \sqrt{1+\frac{2L^2E}{m\kappa^2}} \qquad \text{„numerische Exzentrizität“} \end{array}}$$

Kegelschnitte

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{lcll} r(\varphi) & = & \frac{p}{1+\varepsilon\cos(\varphi-\varphi_0)} & \text{Kegelschnittgleichung} \\ p & = & \frac{L^2}{m\kappa} & \\ \varepsilon & = & \sqrt{1+\frac{2L^2E}{m\kappa^2}} & \text{„numerische Exzentrizität“} \end{array}}$$

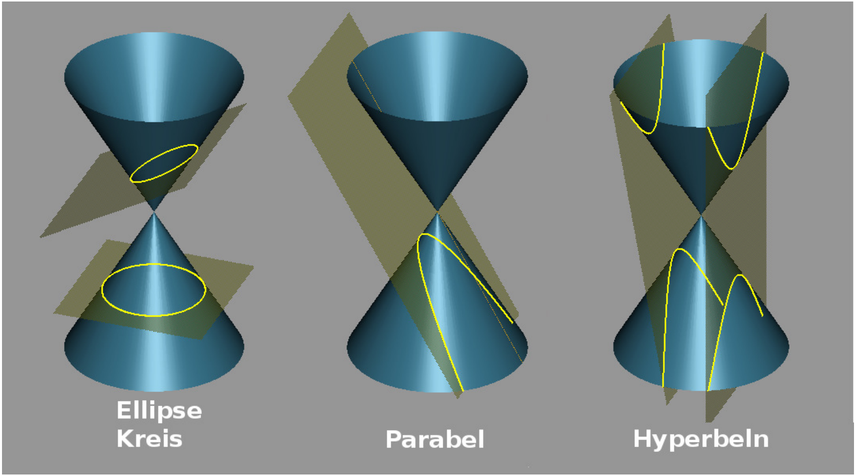
- $\varepsilon > 1$ $(\Leftrightarrow\ E > 0)$: Hyperbel
- $\varepsilon = 1$ $(\Leftrightarrow\ E = 0)$: Parabel
- $\varepsilon < 1$ $(\Leftrightarrow\ E < 0)$: Ellipse

  Grenzfall $\varepsilon = 0$ $(\Leftrightarrow\ E = -\frac{m\kappa^2}{2L^2})$: Kreis

Kegelschnitte

(aus Wikipedia)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

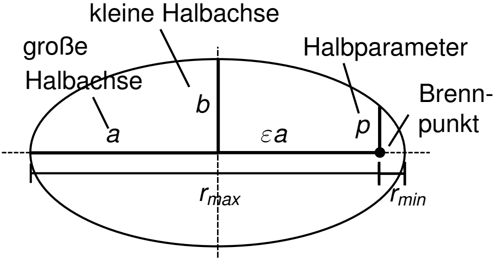


Ellipse

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wähle o.B.d.A. $\varphi_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos\varphi}\,, \qquad 0 \leq \varepsilon < 1$

$$r(0) = \frac{p}{1+\varepsilon} = r_{min}$$
$$r(\pi) = \frac{p}{1-\varepsilon} = r_{max}$$
$$r(\frac{\pi}{2}) = r(\frac{3\pi}{2}) = p$$



Ellipse

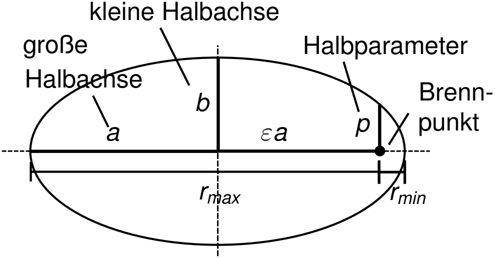
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wähle o.B.d.A. $\varphi_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos\varphi}, \qquad 0 \le \varepsilon < 1$

$$r(0) = \frac{p}{1+\varepsilon} = r_{min}$$

$$r(\pi) = \frac{p}{1-\varepsilon} = r_{max}$$

$$r(\frac{\pi}{2}) = r(\frac{3\pi}{2}) = p$$



$\Rightarrow \quad 2a = r_{min} + r_{max} = \frac{2p}{1-\varepsilon^2}$

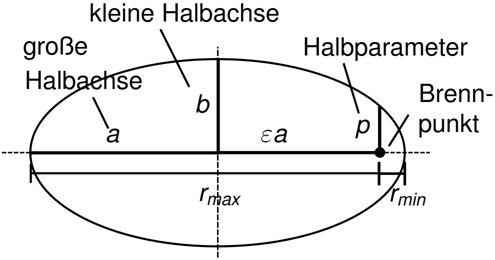
$\Rightarrow \quad a = \frac{p}{1-\varepsilon^2} = \frac{L^2}{m\kappa}\left(-\frac{m\kappa^2}{2L^2E}\right) = -\frac{\kappa}{2E} = \frac{\kappa}{2|E|}$

Ellipse

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wähle o.B.d.A. $\varphi_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos\varphi}, \qquad 0 \leq \varepsilon < 1$

$$r(0) = \frac{p}{1+\varepsilon} = r_{min}$$
$$r(\pi) = \frac{p}{1-\varepsilon} = r_{max}$$
$$r(\frac{\pi}{2}) = r(\frac{3\pi}{2}) = p$$



$$\Rightarrow \quad 2a = r_{min} + r_{max} = \frac{2p}{1-\varepsilon^2}$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{p}{1-\varepsilon^2} = \frac{L^2}{m\kappa}\left(-\frac{m\kappa^2}{2L^2E}\right) = -\frac{\kappa}{2E} = \frac{\kappa}{2|E|} \quad \Rightarrow \quad a = a(E)$$

Ellipse

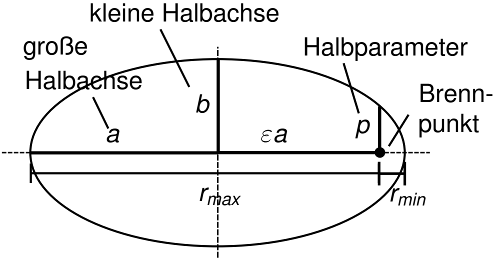
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wähle o.B.d.A. $\varphi_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad r(\varphi) = \dfrac{p}{1 + \varepsilon \cos\varphi}, \qquad 0 \leq \varepsilon < 1$

$$r(0) = \frac{p}{1+\varepsilon} = r_{min}$$

$$r(\pi) = \frac{p}{1-\varepsilon} = r_{max}$$

$$r(\frac{\pi}{2}) = r(\frac{3\pi}{2}) = p$$



$$\Rightarrow \quad 2a = r_{min} + r_{max} = \frac{2p}{1-\varepsilon^2}$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{p}{1-\varepsilon^2} = \frac{L^2}{m\kappa}\left(-\frac{m\kappa^2}{2L^2E}\right) = -\frac{\kappa}{2E} = \frac{\kappa}{2|E|} \quad \Rightarrow \quad a = a(E)$$

$$p = \frac{L^2}{m\kappa} \quad \Rightarrow \quad p = p(L)$$

- große Halbachse (s. vorige Seite): $a = \frac{p}{1-\varepsilon^2}$

- große Halbachse (s. vorige Seite): $a = \frac{p}{1-\varepsilon^2}$
- kleine Halbachse (s. Übung): $b^2 = ap$

- große Halbachse (s. vorige Seite): $a = \frac{p}{1-\varepsilon^2}$
- kleine Halbachse (s. Übung): $b^2 = ap$
- Flächeninhalt einer Ellipse: $A = \pi ab$

- große Halbachse (s. vorige Seite): $a = \frac{p}{1-\varepsilon^2}$
- kleine Halbachse (s. Übung): $b^2 = ap$
- Flächeninhalt einer Ellipse: $A = \pi ab$
- 2. Kepler'sches Gesetz: $\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} \quad \Rightarrow \quad dA = \frac{L}{2m}dt$

- große Halbachse (s. vorige Seite): $a = \frac{p}{1-\varepsilon^2}$
- kleine Halbachse (s. Übung): $b^2 = ap$
- Flächeninhalt einer Ellipse: $A = \pi ab$
- 2. Kepler'sches Gesetz: $\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} \quad \Rightarrow \quad dA = \frac{L}{2m} dt$

  Integration über einen Umlauf:

$$A = \int_{\text{Ellipse}} dA = \int_0^T dt \, \frac{L}{2m} = \frac{L}{2m} T \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2m}{L} A$$

- große Halbachse (s. vorige Seite): $a = \frac{p}{1-\varepsilon^2}$
- kleine Halbachse (s. Übung): $b^2 = ap$
- Flächeninhalt einer Ellipse: $A = \pi ab$
- 2. Kepler'sches Gesetz: $\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} \quad \Rightarrow \quad dA = \frac{L}{2m} dt$

  Integration über einen Umlauf:

$$A = \int_{\text{Ellipse}} dA = \int_0^T dt \, \frac{L}{2m} = \frac{L}{2m} T \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2m}{L} A = \frac{2m}{L} \pi ab = \frac{2m}{L} \pi \sqrt{p} \, a^{3/2}$$

- große Halbachse (s. vorige Seite): $a = \frac{p}{1-\varepsilon^2}$
- kleine Halbachse (s. Übung): $b^2 = ap$
- Flächeninhalt einer Ellipse: $A = \pi ab$
- 2. Kepler'sches Gesetz: $\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} \quad \Rightarrow \quad dA = \frac{L}{2m} dt$

  Integration über einen Umlauf:

$$A = \int_{\text{Ellipse}} dA = \int_0^T dt \, \frac{L}{2m} = \frac{L}{2m} T \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2m}{L} A = \frac{2m}{L} \pi ab = \frac{2m}{L} \pi \sqrt{p} \, a^{3/2}$$

- $p = \frac{L^2}{m\kappa} = \frac{L^2}{GMm^2}$

- große Halbachse (s. vorige Seite): $a = \frac{p}{1-\varepsilon^2}$
- kleine Halbachse (s. Übung): $b^2 = ap$
- Flächeninhalt einer Ellipse: $A = \pi ab$
- 2. Kepler'sches Gesetz: $\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} \quad \Rightarrow \quad dA = \frac{L}{2m} dt$

  Integration über einen Umlauf:

$$A = \int_{\text{Ellipse}} dA = \int_0^T dt \, \frac{L}{2m} = \frac{L}{2m} T \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2m}{L} A = \frac{2m}{L} \pi ab = \frac{2m}{L} \pi \sqrt{p}\, a^{3/2}$$

- $p = \frac{L^2}{m\kappa} = \frac{L^2}{GMm^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} a^{3/2}}$

- große Halbachse (s. vorige Seite): $a = \frac{p}{1-\varepsilon^2}$
- kleine Halbachse (s. Übung): $b^2 = ap$
- Flächeninhalt einer Ellipse: $A = \pi ab$
- 2. Kepler'sches Gesetz: $\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} \quad \Rightarrow \quad dA = \frac{L}{2m} dt$

  Integration über einen Umlauf:

$$A = \int_{\text{Ellipse}} dA = \int_0^T dt \, \frac{L}{2m} = \frac{L}{2m} T \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2m}{L} A = \frac{2m}{L} \pi ab = \frac{2m}{L} \pi \sqrt{p}\, a^{3/2}$$

- $p = \frac{L^2}{m\kappa} = \frac{L^2}{GMm^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} a^{3/2}}$ hängt nur von $M \approx M_\odot$ ab!

- große Halbachse (s. vorige Seite): $a = \frac{p}{1-\varepsilon^2}$
- kleine Halbachse (s. Übung): $b^2 = ap$
- Flächeninhalt einer Ellipse: $A = \pi ab$
- 2. Kepler'sches Gesetz: $\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} \quad \Rightarrow \quad dA = \frac{L}{2m} dt$

  Integration über einen Umlauf:

$$A = \int_{\text{Ellipse}} dA = \int_0^T dt \, \frac{L}{2m} = \frac{L}{2m} T \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2m}{L} A = \frac{2m}{L} \pi ab = \frac{2m}{L} \pi \sqrt{p}\, a^{3/2}$$

- $p = \frac{L^2}{m\kappa} = \frac{L^2}{GMm^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} a^{3/2}}$ hängt nur von $M \approx M_\odot$ ab!

→ 3. Kepler'sches Gesetz:

Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen der großen Halbachsen ihrer Ellipsenbahnen.

2.5 Streuung im Zentralkraftfeld

2.5 Streuung im Zentralkraftfeld

- Streuexperiment:

  Teilchenstrahl („Projektil“) wird auf andere Teilchen („Target“) gerichtet und durch die Wechselwirkung abgelenkt.

2.5 Streuung im Zentralkraftfeld

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Streuexperiment:

  Teilchenstrahl („Projektil“) wird auf andere Teilchen („Target“) gerichtet und durch die Wechselwirkung abgelenkt.

- Winkelverteilung der gestreuten Teilchen

  → Rückschlüsse über die Wechselwirkung

2.5 Streuung im Zentralkraftfeld

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Streuexperiment:

  Teilchenstrahl („Projektil“) wird auf andere Teilchen („Target“) gerichtet und durch die Wechselwirkung abgelenkt.

- Winkelverteilung der gestreuten Teilchen

  → Rückschlüsse über die Wechselwirkung

- Vereinfachende Annahme:

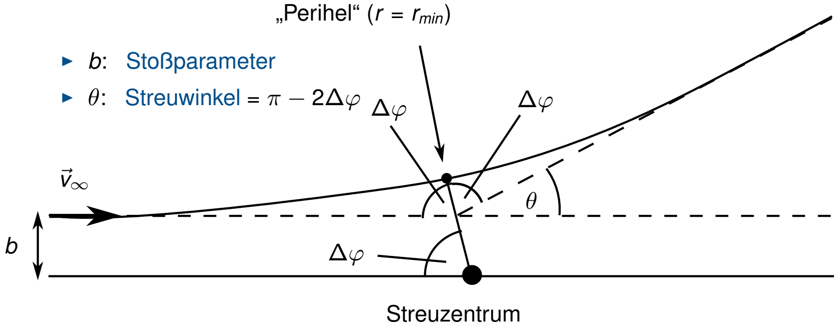
  1 Projektil- + 1 Target-Teilchen mit zentraler Zweiteilchenkraft

  → Streuung eines Teilchens mit reduzierter Masse μ am Zentralpotenzial $V(r)$

- weitere Annahmen:
  - Kraft für $r \to \infty$ vernachlässigbar

    $\Rightarrow$ Teilchen läuft geradlinig gleichförmig ein und aus
  - Anfangsgeschwindigkeit: $\vec{v}_\infty$

- b: Stoßparameter
- θ: Streuwinkel $= \pi - 2\Delta\varphi$



- Wähle $V(r \to \infty) = 0 \quad \Rightarrow$ Energie: $E = T_\infty = \frac{1}{2}\mu v_\infty^2$

- Wähle $V(r \to \infty) = 0 \quad \Rightarrow$ Energie: $E = T_\infty = \frac{1}{2}\mu v_\infty^2$
- Drehimpuls: $L = |\vec{r} \times \mu\vec{v}| \underset{\uparrow}{=} b\mu v_\infty$

  Auswertung für $r \to \infty$, nur $\vec{r}$-Komponente $\perp$ $\vec{v}$ trägt bei

- Wähle $V(r \to \infty) = 0 \quad \Rightarrow$ Energie: $E = T_\infty = \frac{1}{2}\mu v_\infty^2$
- Drehimpuls: $L = |\vec{r} \times \mu \vec{v}| \underset{\uparrow}{=} b\mu v_\infty = b\sqrt{2\mu E}$

  Auswertung für $r \to \infty$, nur $\vec{r}$-Komponente $\perp$ $\vec{v}$ trägt bei

- Wähle $V(r \to \infty) = 0 \quad \Rightarrow$ Energie: $E = T_\infty = \frac{1}{2}\mu v_\infty^2$
- Drehimpuls: $L = |\vec{r} \times \mu\vec{v}| = b\mu v_\infty = b\sqrt{2\mu E}$

  $\uparrow$

  Auswertung für $r \to \infty$, nur $\vec{r}$-Komponente $\perp$ $\vec{v}$ trägt bei
- Winkeländerung:

$$\Delta\varphi = |\varphi(r_{min}) - \varphi(r \to \infty)|$$

- Wähle $V(r \to \infty) = 0 \quad \Rightarrow$ Energie: $E = T_\infty = \frac{1}{2}\mu v_\infty^2$
- Drehimpuls: $L = |\vec{r} \times \mu\vec{v}| \underset{\uparrow}{=} b\mu v_\infty = b\sqrt{2\mu E}$

  Auswertung für $r \to \infty$, nur $\vec{r}$-Komponente $\perp$ $\vec{v}$ trägt bei

- Winkeländerung:

$$\Delta\varphi = |\varphi(r_{min}) - \varphi(r \to \infty)| \overset{\text{Abschnitt 2.3}}{=} \frac{L}{\sqrt{2\mu}} \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2\sqrt{E - V_{eff}(r)}} = b \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2\sqrt{1 - \frac{V_{eff}(r)}{E}}}$$

- Wähle $V(r \to \infty) = 0 \quad \Rightarrow$ Energie: $E = T_\infty = \frac{1}{2}\mu v_\infty^2$
- Drehimpuls: $L = |\vec{r} \times \mu \vec{v}| \underset{\uparrow}{=} b\mu v_\infty = b\sqrt{2\mu E}$

  Auswertung für $r \to \infty$, nur $\vec{r}$-Komponente $\perp$ $\vec{v}$ trägt bei

- Winkeländerung:

$$\Delta\varphi = |\varphi(r_{min}) - \varphi(r \to \infty)| \overset{\text{Abschnitt 2.3}}{=} \frac{L}{\sqrt{2\mu}} \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2\sqrt{E - V_{eff}(r)}} = b \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2\sqrt{1 - \frac{V_{eff}(r)}{E}}}$$

$$V_{eff} = V + \frac{L^2}{2\mu r^2} = V + \frac{Eb^2}{r^2}$$

- Wähle $V(r \to \infty) = 0 \quad \Rightarrow$ Energie: $E = T_\infty = \frac{1}{2}\mu v_\infty^2$
- Drehimpuls: $L = |\vec{r} \times \mu\vec{v}| = b\mu v_\infty = b\sqrt{2\mu E}$

  $\uparrow$

  Auswertung für $r \to \infty$, nur $\vec{r}$-Komponente $\perp$ $\vec{v}$ trägt bei

- Winkeländerung:

$$\Delta\varphi = |\varphi(r_{min}) - \varphi(r \to \infty)| \overset{\text{Abschnitt 2.3}}{=} \frac{L}{\sqrt{2\mu}} \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2\sqrt{E - V_{eff}(r)}} = b \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2\sqrt{1 - \frac{V_{eff}(r)}{E}}}$$

$$V_{eff} = V + \frac{L^2}{2\mu r^2} = V + \frac{Eb^2}{r^2}$$

$\rightarrow$ Streuwinkel: $\theta(b) = \pi - 2b \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2\sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{V(r)}{E}}}$ (beachte: $r_{min} = r_{min}(E, b)$)

- Wähle $V(r \to \infty) = 0 \quad \Rightarrow$ Energie: $E = T_\infty = \frac{1}{2}\mu v_\infty^2$
- Drehimpuls: $L = |\vec{r} \times \mu\vec{v}| = b\mu v_\infty = b\sqrt{2\mu E}$

$\uparrow$

Auswertung für $r \to \infty$, nur $\vec{r}$-Komponente $\perp$ $\vec{v}$ trägt bei

- Winkeländerung:

$$\Delta\varphi = |\varphi(r_{min}) - \varphi(r \to \infty)| \overset{\text{Abschnitt 2.3}}{=} \frac{L}{\sqrt{2\mu}} \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2\sqrt{E - V_{eff}(r)}} = b \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2\sqrt{1 - \frac{V_{eff}(r)}{E}}}$$

$$V_{eff} = V + \frac{L^2}{2\mu r^2} = V + \frac{Eb^2}{r^2}$$

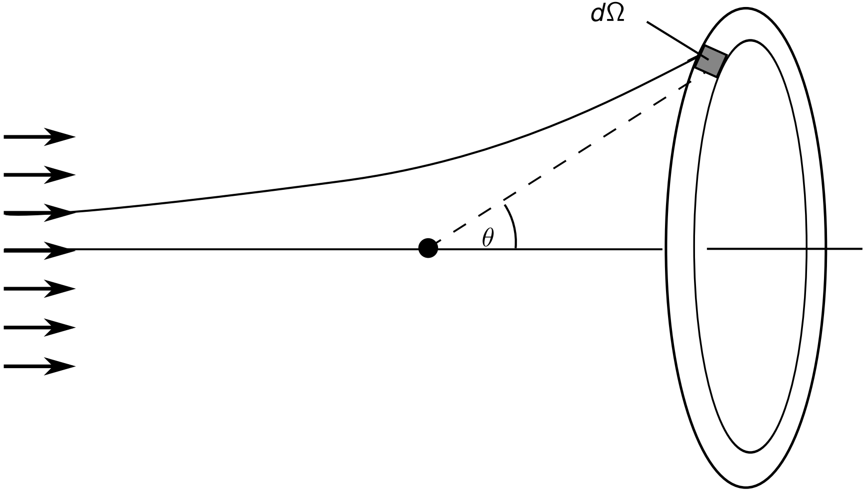
$\longrightarrow$ Streuwinkel: $\theta(b) = \pi - 2b \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2\sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{V(r)}{E}}}$ (beachte: $r_{min} = r_{min}(E, b)$)

- bekanntes $V(r)$ und E, b vorgegeben $\longrightarrow$ Vorhersage für θ
- E, b vorgegeben, θ gemessen $\longrightarrow$ Rückschlüsse über V

- reale Streuexperimente an mikroskopischen Teilchen:
  Mittelung über Teilchenstrahl mit gleichem $\vec{v}_\infty$

- reale Streuexperimente an mikroskopischen Teilchen:
  Mittelung über Teilchenstrahl mit gleichem $\vec{v}_\infty$
- Teilchenstromdichte: $j = \frac{\text{Zahl der einlaufenden Teilchen}}{\text{Fläche}\cdot\text{Zeit}}$

- reale Streuexperimente an mikroskopischen Teilchen:
  Mittelung über Teilchenstrahl mit gleichem $\vec{v}_\infty$
- Teilchenstromdichte: $j = \frac{\text{Zahl der einlaufenden Teilchen}}{\text{Fläche} \cdot \text{Zeit}}$
- Man misst: $dN = \frac{\text{Zahl der in das Raumwinkelelement } d\Omega \text{ gestreuten Teilchen}}{\text{Zeit}}$


$d\Omega$
θ

- reale Streuexperimente an mikroskopischen Teilchen:
  Mittelung über Teilchenstrahl mit gleichem $\vec{v}_\infty$
- Teilchenstromdichte: $j = \dfrac{\text{Zahl der einlaufenden Teilchen}}{\text{Fläche}\cdot\text{Zeit}}$
- Man misst: $dN = \dfrac{\text{Zahl der in das Raumwinkelelement } d\Omega \text{ gestreuten Teilchen}}{\text{Zeit}}$

- reale Streuexperimente an mikroskopischen Teilchen:
  Mittelung über Teilchenstrahl mit gleichem $\vec{v}_\infty$

- Teilchenstromdichte: $j = \dfrac{\text{Zahl der einlaufenden Teilchen}}{\text{Fläche}\cdot\text{Zeit}}$

- Man misst: $dN = \dfrac{\text{Zahl der in das Raumwinkelelement } d\Omega \text{ gestreuten Teilchen}}{\text{Zeit}}$

  und definiert:

$$d\sigma = \frac{dN}{j} = \frac{\text{Zahl der in das Raumwinkelelement } d\Omega \text{ gestreuten Teilchen pro Zeit}}{\text{Zahl der einlaufenden Teilchen pro Fläche und Zeit}}\,, \qquad [d\sigma] = \text{Fläche}$$

- reale Streuexperimente an mikroskopischen Teilchen:
  Mittelung über Teilchenstrahl mit gleichem $\vec{v}_\infty$
- Teilchenstromdichte: $j = \frac{\text{Zahl der einlaufenden Teilchen}}{\text{Fläche}\cdot\text{Zeit}}$
- Man misst: $dN = \frac{\text{Zahl der in das Raumwinkelelement } d\Omega \text{ gestreuten Teilchen}}{\text{Zeit}}$

  und definiert:

$$d\sigma = \frac{dN}{j} = \frac{\text{Zahl der in das Raumwinkelelement } d\Omega \text{ gestreuten Teilchen pro Zeit}}{\text{Zahl der einlaufenden Teilchen pro Fläche und Zeit}}, \qquad [d\sigma] = \text{Fläche}$$

$$= \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega, \qquad \frac{d\sigma}{d\Omega}: \text{„differenzieller Wirkungsquerschnitt“}$$

- reale Streuexperimente an mikroskopischen Teilchen:
  Mittelung über Teilchenstrahl mit gleichem $\vec{v}_\infty$
- Teilchenstromdichte: $j = \frac{\text{Zahl der einlaufenden Teilchen}}{\text{Fläche}\cdot\text{Zeit}}$
- Man misst: $dN = \frac{\text{Zahl der in das Raumwinkelelement } d\Omega \text{ gestreuten Teilchen}}{\text{Zeit}}$

  und definiert:

  $$d\sigma = \frac{dN}{j} = \frac{\text{Zahl der in das Raumwinkelelement } d\Omega \text{ gestreuten Teilchen pro Zeit}}{\text{Zahl der einlaufenden Teilchen pro Fläche und Zeit}}\,, \qquad [d\sigma] = \text{Fläche}$$

  $$= \frac{d\sigma}{d\Omega}\,d\Omega, \qquad \frac{d\sigma}{d\Omega}: \text{„differenzieller Wirkungsquerschnitt“}$$
- totaler Wirkungsquerschnitt: $\sigma = \int d\Omega\,\frac{d\sigma}{d\Omega}$

- Kugelsymmetrie von $V(r)$ $\Rightarrow$ Axialsymmetrie um die Strahlachse

- Kugelsymmetrie von $V(r) \quad \Rightarrow \quad$ Axialsymmetrie um die Strahlachse
  - → Fasse Raumwinkel mit gleichem θ zusammen:

$$d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \, \sin\theta \, d\theta = 2\pi \, \sin\theta \, d\theta$$

- Kugelsymmetrie von $V(r) \quad \Rightarrow \quad$ Axialsymmetrie um die Strahlachse

  → Fasse Raumwinkel mit gleichem θ zusammen:

$$d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \ \sin\theta \, d\theta = 2\pi \ \sin\theta \, d\theta$$

- Achtung: Wechsel des Koordinatensystems!
  - effektives Einteilchenproblem: Polarkoordinaten in der xy-Ebene
  - Teilchenstrahl: dreidim. Koordinaten, Strahlrichtung = z-Richtung

    Kugelkoordinaten: $\theta \equiv$ Streuwinkel, $\varphi \neq \varphi(2D)$

- Kugelsymmetrie von $V(r)$ $\Rightarrow$ Axialsymmetrie um die Strahlachse

  → Fasse Raumwinkel mit gleichem θ zusammen:

$$d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \, \sin\theta \, d\theta = 2\pi \, \sin\theta \, d\theta$$

- Achtung: Wechsel des Koordinatensystems!
  - effektives Einteilchenproblem: Polarkoordinaten in der xy-Ebene
  - Teilchenstrahl: dreidim. Koordinaten, Strahlrichtung = z-Richtung

    Kugelkoordinaten: $\theta \equiv$ Streuwinkel, $\varphi \neq \varphi(2D)$

- Wie gesehen: $\theta = \theta(b)$ (für festes E)

  $\Rightarrow$ Teilchen, die in das Winkelintervall $[\theta, \theta + d\theta]$ gestreut werden, sind vorher durch einen Ring $[b, b + db]$ eingelaufen.