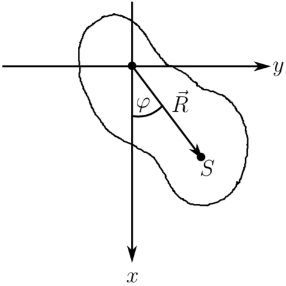
Beispiel: Physikalisches Pendel

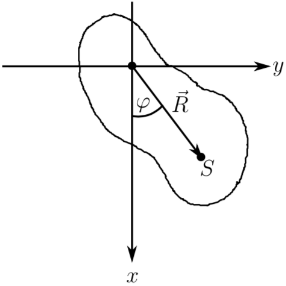
TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT



- Drehachse = z-Achse
- externe Kräfte (= Schwerkraft): $\vec{F}_{ex}^{(i)} = m_i g\, \vec{e}_x$

Beispiel: Physikalisches Pendel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

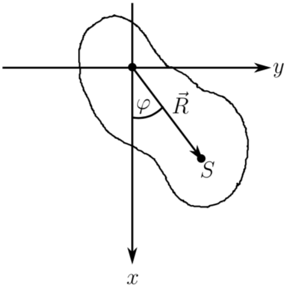


- Drehachse = z-Achse
- externe Kräfte (= Schwerkraft): $\vec{F}_{ex}^{(i)} = m_i g\, \vec{e}_x$

$$\Rightarrow N_{ex,n} = \Big(\sum_i \vec{r}^{(i)} \times m_i g\, \vec{e}_x \Big) \cdot \vec{e}_z$$

$$= \sum_i m_i g\, \underbrace{(\vec{e}_x \times \vec{e}_z)}_{=-\vec{e}_y} \cdot \vec{r}^{(i)} = -\sum_i m_i g\, y^{(i)}$$

Beispiel: Physikalisches Pendel



- Drehachse = z-Achse
- externe Kräfte (= Schwerkraft): $\vec{F}_{ex}^{(i)} = m_i g\, \vec{e}_x$

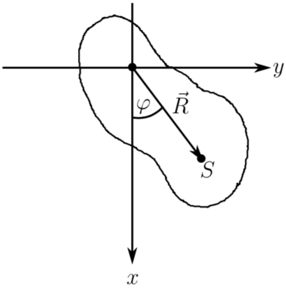
$$\Rightarrow N_{ex,n} = \Big(\sum_i \vec{r}^{(i)} \times m_i g\, \vec{e}_x \Big) \cdot \vec{e}_z$$

$$= \sum_i m_i g\, \underbrace{(\vec{e}_x \times \vec{e}_z)}_{=-\vec{e}_y} \cdot \vec{r}^{(i)} = -\sum_i m_i g\, y^{(i)}$$

- Schwerpunktsvektor: $\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}^{\,(i)}$

$$\Rightarrow N_{ex,n} = -MgR_y$$

Beispiel: Physikalisches Pendel



- Drehachse = z-Achse
- externe Kräfte (= Schwerkraft): $\vec{F}_{ex}^{(i)} = m_i g\, \vec{e}_x$

$$\Rightarrow \quad N_{ex,n} = \Big(\sum_i \vec{r}^{(i)} \times m_i g\, \vec{e}_x \Big) \cdot \vec{e}_z$$

$$= \sum_i m_i g\, \underbrace{(\vec{e}_x \times \vec{e}_z)}_{=-\vec{e}_y} \cdot \vec{r}^{(i)} = -\sum_i m_i g\, y^{(i)}$$

- Schwerpunktsvektor: $\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}^{\,(i)}$

$$\Rightarrow \quad N_{ex,n} = -MgR_y$$

- Wähle Schwerpunkt in xy-Ebene: $\vec{R} = \begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad J\ddot{\varphi} = -MgR\sin\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\ddot{\varphi} + \frac{MgR}{J}\sin\varphi = 0}$$

Alternative Herleitung über den Energiesatz:

- $V = \sum_i V^{(i)} = -\sum_i m_i g\, x^{(i)} = -MgR_x = -MgR\cos\varphi$
- $T = \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2$

$\Rightarrow$ $E = \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 - MgR\cos\varphi = const.$

Alternative Herleitung über den Energiesatz:

- $V = \sum_i V^{(i)} = -\sum_i m_i g\, x^{(i)} = -MgR_x = -MgR \cos\varphi$
- $T = \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2$

$\Rightarrow$ $E = \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2 - MgR \cos\varphi = const.$

$\Rightarrow$ $\frac{dE}{dt} = J\dot{\varphi}\,\ddot{\varphi} + MgR \sin\varphi\ \dot{\varphi} = (J\ddot{\varphi} + MgR \sin\varphi)\,\dot{\varphi} = 0$

Alternative Herleitung über den Energiesatz:

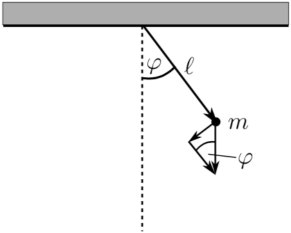
- $V = \sum_i V^{(i)} = -\sum_i m_i g\, x^{(i)} = -MgR_x = -MgR\cos\varphi$
- $T = \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2$

$\Rightarrow$ $E = \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 - MgR\cos\varphi = const.$

$\Rightarrow$ $\frac{dE}{dt} = J\dot{\varphi}\,\ddot{\varphi} + MgR\sin\varphi\,\dot{\varphi} = (J\ddot{\varphi} + MgR\sin\varphi)\,\dot{\varphi} = 0$

- $\dot{\varphi} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad J\ddot{\varphi} + MgR\sin\varphi = 0 \quad \checkmark$

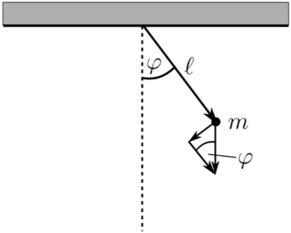
Mathematisches Pendel



- masseloser Faden mit Länge ℓ
- Punktmasse m

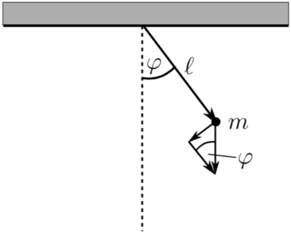
Mathematisches Pendel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT



- masseloser Faden mit Länge ℓ
- Punktmasse m
- Bahngeschwindigkeit: $\dot{\vec{r}} = \ell\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$

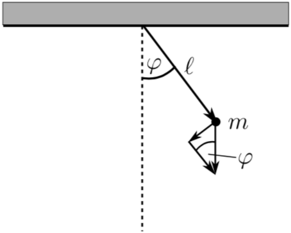
Mathematisches Pendel



- masseloser Faden mit Länge ℓ
- Punktmasse m
- Bahngeschwindigkeit: $\dot{\vec{r}} = \ell\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$

- Newton: $m\,\ell\ddot{\varphi} = -mg\sin\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell}\sin\varphi = 0$

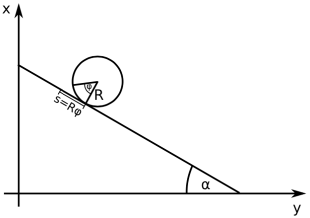
Mathematisches Pendel



- masseloser Faden mit Länge ℓ
- Punktmasse m
- Bahngeschwindigkeit: $\dot{\vec{r}} = \ell\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$

- Newton: $m\,\ell\ddot{\varphi} = -mg\sin\varphi \quad\Leftrightarrow\quad \ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell}\sin\varphi = 0$
- Vergleich physikalisches Pendel: $\ddot{\varphi} + \frac{MgR}{J}\sin\varphi = 0 \quad\longrightarrow\quad \ell \mathrel{\hat{=}} \frac{J}{MR}$

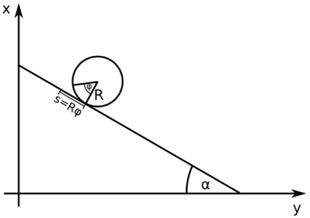
3.2.2 Rollbewegung



- Zylinder mit zylindersymm. Massenverteilung

3.2.2 Rollbewegung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

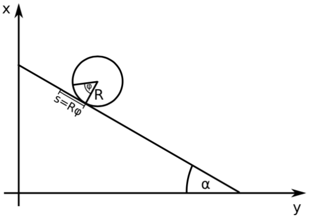


- Zylinder mit zylindersymm. Massenverteilung
- körperfestes Koordinatensystem:

  Ursprung = Schwerpunkt des Zylinders

  Drehachse = z'-Achse $\quad (\vec{e}_{z'} = \vec{e}_z)$

3.2.2 Rollbewegung



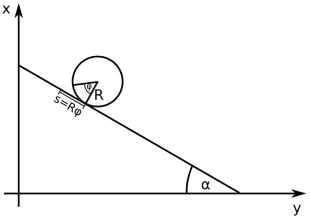
- Zylinder mit zylindersymm. Massenverteilung
- körperfestes Koordinatensystem:

  Ursprung = Schwerpunkt des Zylinders

  Drehachse = z'-Achse $\quad (\vec{e}_{z'} = \vec{e}_z)$
- Rollbewegung $\Rightarrow$ Drehachse nicht raumfest!

3.2.2 Rollbewegung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT



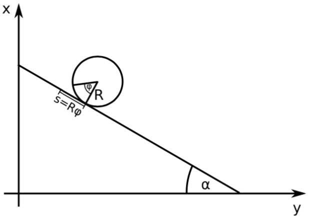
- Zylinder mit zylindersymm. Massenverteilung
- körperfestes Koordinatensystem:

  Ursprung = Schwerpunkt des Zylinders

  Drehachse = z'-Achse $\quad (\vec{e}_{z'} = \vec{e}_z)$
- Rollbewegung $\Rightarrow$ Drehachse nicht raumfest!

- Schwerpunktsvektor: $\vec{r}_0(t) = \vec{r}_0(0) + \vec{s}(t) = \vec{r}_0(0) + \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix} R\,\varphi(t)$

3.2.2 Rollbewegung



- Zylinder mit zylindersymm. Massenverteilung
- körperfestes Koordinatensystem:

  Ursprung = Schwerpunkt des Zylinders

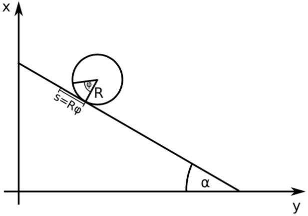
  Drehachse = z'-Achse $\quad (\vec{e}_{z'} = \vec{e}_z)$
- Rollbewegung $\Rightarrow$ Drehachse nicht raumfest!

- Schwerpunktsvektor: $\vec{r}_0(t) = \vec{r}_0(0) + \vec{s}(t) = \vec{r}_0(0) + \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix} R\,\varphi(t)$

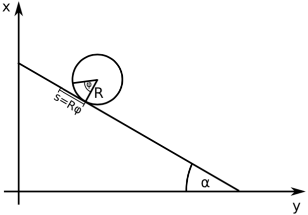
- beliebiger Zylinderpunkt im raumfesten Koordinatensystem:

  $\vec{r}^{\,(i)}(t) = \vec{r}_0(t) + \vec{r}^{\,(i)\prime}(t) = \vec{r}_0(0) + \vec{s}(t) + \vec{r}^{\,(i)\prime}(t)$

  $\vec{r}^{\,(i)\prime}(t)$: Bewegung relativ zum Schwerpunkt $\hat{=}$ Drehung um raumfeste Achse



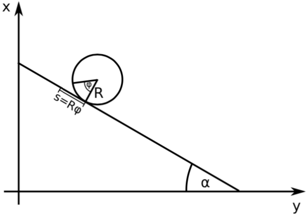
$$\vec{r}^{\,(i)}(t) = \vec{r}_0(0) + \vec{s}(t) + \vec{r}^{\,(i)\prime}(t)$$



$$\vec{r}^{\,(i)}(t) = \vec{r}_0(0) + \vec{s}(t) + \vec{r}^{\,(i)\prime}(t)$$

- kinetische Energie: $T = \frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{\vec{r}}^{\,(i)\,2} = \frac{1}{2}\sum_i m_i(\dot{\vec{s}} + \dot{\vec{r}}^{\,(i)\prime})^2$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT



$$\vec{r}^{\,(i)}(t) = \vec{r}_0(0) + \vec{s}(t) + \vec{r}^{\,(i)\prime}(t)$$

- kinetische Energie: $T = \frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{\vec{r}}^{\,(i)\,2} = \frac{1}{2}\sum_i m_i(\dot{\vec{s}} + \dot{\vec{r}}^{\,(i)\prime})^2$

  explizite Auswertung (Übung): $T = T_{trans} + T_{rot}$

  - $T_{trans} = \frac{1}{2} M \dot{\vec{s}}^{\,2}$
  - $T_{rot} = \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2$ kein Mischterm!

Analogien zwischen Translations- und Rotationsbewegung mit einem Freiheitgrad

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

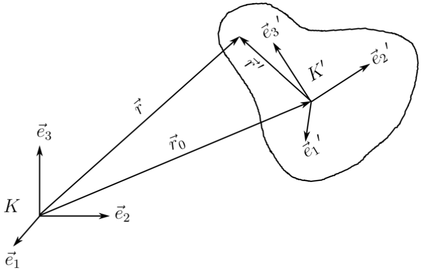
Punktmasse (in einer Dimension)		Rotator mit raumfester Achse	
Ort	x	Drehwinkel	φ
Masse	m	Trägheitsmoment	J
Geschwindigkeit	$v = \dot{x}$	Winkelgeschwindigkeit	$\omega = \dot{\varphi}$
Impuls	$p = mv$	Drehimpuls	$L_n = J\omega$
Kraft	F	Drehmoment	N_n
kinetische Energie	$T = \frac{1}{2}mv^2$	kinetische Energie	$T = \frac{1}{2}J\omega^2$
Bewegungsgleichung	$F = \dot{p} = m\ddot{x}$	Bewegungsgleichung	$N_n = \dot{L}_n = J\ddot{\varphi}$

3.3 Kinematik des starren Körpers

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

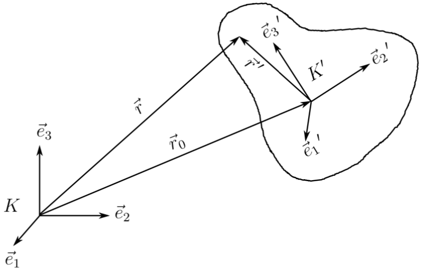
3.3 Kinematik des starren Körpers

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT



- K: raumfest (Inertialsystem)
- K': körperfest
- $\vec{r}_0$: Ursprung von K' (nicht notw. Schwerpunkt) gemessen in K

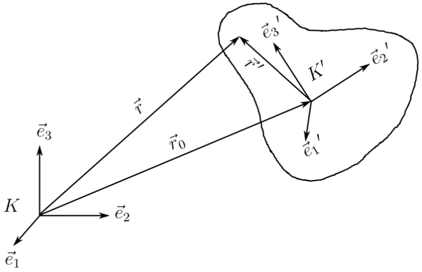
3.3 Kinematik des starren Körpers



- K: raumfest (Inertialsystem)
- K': körperfest
- $\vec{r}_0$: Ursprung von K' (nicht notw. Schwerpunkt) gemessen in K
- beliebiger Punkt (nicht notw. $\in$ starrer Körper): $\vec{r}(t) = \vec{r}_0(t) + \vec{r}\,'(t)$

3.3 Kinematik des starren Körpers

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

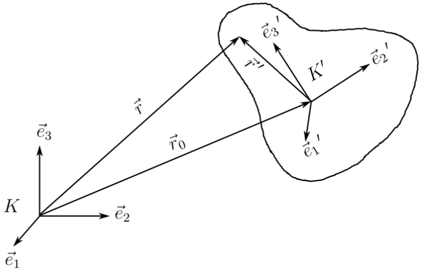


- K: raumfest (Inertialsystem)
- K': körperfest
- $\vec{r}_0$: Ursprung von K' (nicht notw. Schwerpunkt) gemessen in K
- beliebiger Punkt (nicht notw. $\in$ starrer Körper): $\vec{r}(t) = \vec{r}_0(t) + \vec{r}\,'(t)$

- Entwicklung nach Basisvektoren:

$$\vec{r}(t) = \sum_{i=1}^{3} r_i(t)\,\vec{e}_i, \qquad \vec{r}\,'(t) = \sum_{i=1}^{3} r_i'(t)\,\vec{e}_i{}'(t)$$

3.3 Kinematik des starren Körpers

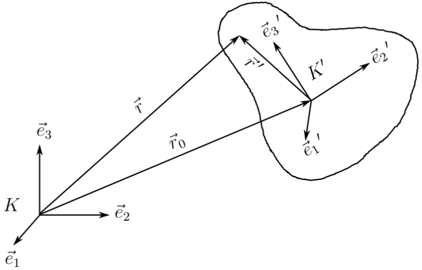


- K: raumfest (Inertialsystem)
- K': körperfest
- $\vec{r}_0$: Ursprung von K' (nicht notw. Schwerpunkt) gemessen in K
- beliebiger Punkt (nicht notw. $\in$ starrer Körper): $\vec{r}(t) = \vec{r}_0(t) + \vec{r}\,'(t)$

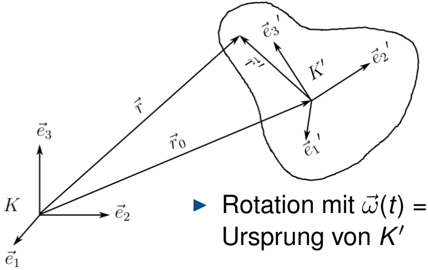
- Entwicklung nach Basisvektoren:

$$\vec{r}(t) = \sum_{i=1}^{3} r_i(t)\,\vec{e}_i, \qquad \vec{r}\,'(t) = \sum_{i=1}^{3} r_i'(t)\,\vec{e}_i{}'(t)$$

  - $r_i'(t)$: in K' gemessene Koordinaten
  - $\vec{e}_i{}'(t)$ Basisvektoren von K' aus Sicht von K

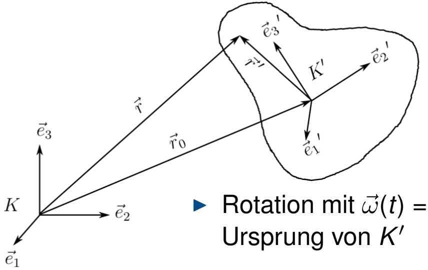


- $\vec{r}(t) = \vec{r}_0(t) + \vec{r}\,'(t)$
- $\vec{r}\,'(t) = \sum_{i=1}^{3} r_i'(t)\, \vec{e}_i{}'(t)$



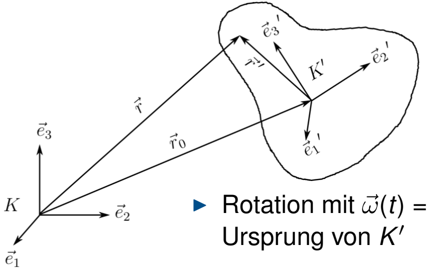
- $\vec{r}(t) = \vec{r}_0(t) + \vec{r}\,'(t)$
- $\vec{r}\,'(t) = \sum_{i=1}^{3} r_i'(t)\,\vec{e}_i{}'(t)$
- Rotation mit $\vec{\omega}(t) = \omega(t)\vec{n}(t)$ um eine Achse $\vec{n}(t)$ durch den Ursprung von K'

$$\Rightarrow \quad \dot{\vec{e}}_i{}' = \vec{\omega} \times \vec{e}_i{}'$$



- $\vec{r}(t) = \vec{r}_0(t) + \vec{r}\,'(t)$
- $\vec{r}\,'(t) = \sum_{i=1}^{3} r_i'(t)\,\vec{e}_i{}'(t)$
- Rotation mit $\vec{\omega}(t) = \omega(t)\vec{n}(t)$ um eine Achse $\vec{n}(t)$ durch den Ursprung von K' $\quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{e}}_i{}' = \vec{\omega} \times \vec{e}_i{}'$

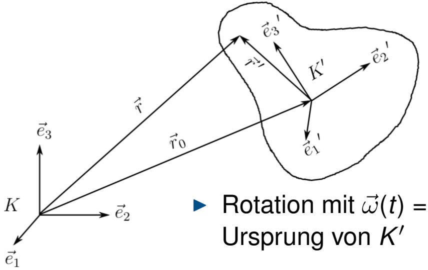
$$\Rightarrow \quad \vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_0 + \dot{\vec{r}}\,' = \dot{\vec{r}}_0 + \sum_{i=1}^{3} \left(\dot{r}_i'\,\vec{e}_i{}' + r_i'\,\dot{\vec{e}}_i{}' \right) = \dot{\vec{r}}_0 + \sum_{i=1}^{3} \dot{r}_i'\,\vec{e}_i{}' + \vec{\omega} \times \sum_{i=1}^{3} r_i'\vec{e}_i{}'$$



- $\vec{r}(t) = \vec{r}_0(t) + \vec{r}\,'(t)$
- $\vec{r}\,'(t) = \sum_{i=1}^{3} r_i'(t)\,\vec{e}_i\,'(t)$
- Rotation mit $\vec{\omega}(t) = \omega(t)\vec{n}(t)$ um eine Achse $\vec{n}(t)$ durch den Ursprung von K' $\quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{e}}_i\,' = \vec{\omega} \times \vec{e}_i\,'$

$$\Rightarrow \quad \vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_0 + \dot{\vec{r}}\,' = \dot{\vec{r}}_0 + \sum_{i=1}^{3}\left(\dot{r}_i'\,\vec{e}_i\,' + r_i'\,\dot{\vec{e}}_i\,'\right) = \dot{\vec{r}}_0 + \sum_{i=1}^{3}\dot{r}_i'\,\vec{e}_i\,' + \vec{\omega} \times \sum_{i=1}^{3} r_i'\vec{e}_i\,'$$

$$\equiv \vec{v}_0 + \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times \vec{r}\,'$$

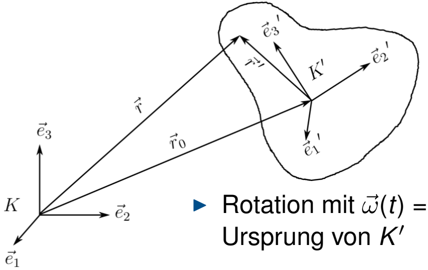


- $\vec{r}(t) = \vec{r}_0(t) + \vec{r}\,'(t)$
- $\vec{r}\,'(t) = \sum_{i=1}^{3} r_i'(t)\,\vec{e}_i{}'(t)$
- Rotation mit $\vec{\omega}(t) = \omega(t)\vec{n}(t)$ um eine Achse $\vec{n}(t)$ durch den Ursprung von K' $\quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{e}}_i{}' = \vec{\omega} \times \vec{e}_i{}'$

$$\Rightarrow \quad \vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_0 + \dot{\vec{r}}\,' = \dot{\vec{r}}_0 + \sum_{i=1}^{3}\left(\dot{r}_i'\,\vec{e}_i{}' + r_i'\,\dot{\vec{e}}_i{}'\right) = \dot{\vec{r}}_0 + \sum_{i=1}^{3}\dot{r}_i'\,\vec{e}_i{}' + \vec{\omega} \times \sum_{i=1}^{3} r_i'\vec{e}_i{}'$$

$$\equiv \vec{v}_0 + \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times \vec{r}\,'$$

- $\vec{v}_0 = \dot{\vec{r}}_0$: Geschwindigkeit der Translationsbewegung



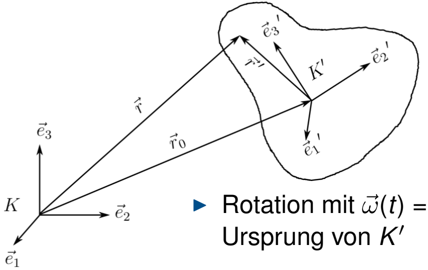
- $\vec{r}(t) = \vec{r}_0(t) + \vec{r}\,'(t)$
- $\vec{r}\,'(t) = \sum_{i=1}^{3} r_i'(t)\,\vec{e}_i{}'(t)$

- Rotation mit $\vec{\omega}(t) = \omega(t)\vec{n}(t)$ um eine Achse $\vec{n}(t)$ durch den Ursprung von K' $\quad\Rightarrow\quad \dot{\vec{e}}_i{}' = \vec{\omega} \times \vec{e}_i{}'$

$$\Rightarrow \quad \vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_0 + \dot{\vec{r}}\,' = \dot{\vec{r}}_0 + \sum_{i=1}^{3}\left(\dot{r}_i'\,\vec{e}_i{}' + r_i'\,\dot{\vec{e}}_i{}'\right) = \dot{\vec{r}}_0 + \sum_{i=1}^{3}\dot{r}_i'\,\vec{e}_i{}' + \vec{\omega} \times \sum_{i=1}^{3} r_i'\vec{e}_i{}'$$

$$\equiv \vec{v}_0 + \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times \vec{r}\,'$$

- $\vec{v}_0 = \dot{\vec{r}}_0$: Geschwindigkeit der Translationsbewegung
- $\vec{v}\,' = \sum \dot{r}_i'\,\vec{e}_i{}'$: in K' gemessene Geschwindigkeit des Teilchens



- $\vec{r}(t) = \vec{r}_0(t) + \vec{r}\,'(t)$
- $\vec{r}\,'(t) = \sum_{i=1}^{3} r_i'(t)\, \vec{e}_i{}'(t)$
- Rotation mit $\vec{\omega}(t) = \omega(t)\vec{n}(t)$ um eine Achse $\vec{n}(t)$ durch den Ursprung von K' $\quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{e}}_i{}' = \vec{\omega} \times \vec{e}_i{}'$

$$\Rightarrow \quad \vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_0 + \dot{\vec{r}}\,' = \dot{\vec{r}}_0 + \sum_{i=1}^{3} \left(\dot{r}_i'\, \vec{e}_i{}' + r_i'\, \dot{\vec{e}}_i{}' \right) = \dot{\vec{r}}_0 + \sum_{i=1}^{3} \dot{r}_i'\, \vec{e}_i{}' + \vec{\omega} \times \sum_{i=1}^{3} r_i' \vec{e}_i{}'$$

$$\equiv \vec{v}_0 + \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times \vec{r}\,'$$

- $\vec{v}_0 = \dot{\vec{r}}_0$: Geschwindigkeit der Translationsbewegung
- $\vec{v}\,' = \sum \dot{r}_i'\, \vec{e}_i{}'$: in K' gemessene Geschwindigkeit des Teilchens
- $\vec{\omega} \times \vec{r}\,'$: Rotationseffekt

Analoge Rechnung für die Beschleunigung:

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \vec{a}_0 + \vec{a}\,' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}\,' + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}\,' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')$$

Analoge Rechnung für die Beschleunigung:

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \vec{a}_0 + \vec{a}\,' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}\,' + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}\,' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')$$

- $\vec{a}_0 \equiv \ddot{\vec{r}}_0$: Beschleunigung der Translationsbewegung
- $\vec{a}\,' \equiv \sum_{i=1}^{3} \ddot{r}_i' \, \vec{e}_i\,'$: in K' gemessene Beschleunigung des Teilchens

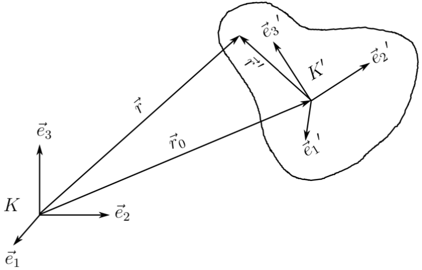
Analoge Rechnung für die Beschleunigung:

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \vec{a}_0 + \vec{a}\,' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}\,' + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}\,' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')$$

- $\vec{a}_0 \equiv \ddot{\vec{r}}_0$: Beschleunigung der Translationsbewegung
- $\vec{a}\,' \equiv \sum_{i=1}^{3} \ddot{r}_i' \, \vec{e}_i\,'$: in K' gemessene Beschleunigung des Teilchens
- $2\vec{\omega} \times \vec{v}\,'$: Coriolis-Beschleunigung
- $\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}\,'$: Effekt durch nicht-konstantes $\vec{\omega}$
- $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')$: Zentrifugalbeschleunigung

Geschwindigkeit und Beschleunigung beliebiger Punkte:

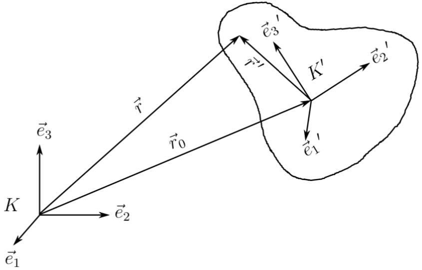
- $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times \vec{r}\,'$
- $\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \vec{a}_0 + \vec{a}\,' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}\,' + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}\,' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')$



Geschwindigkeit und Beschleunigung beliebiger Punkte:

- $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times \vec{r}\,'$
- $\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \vec{a}_0 + \vec{a}\,' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}\,' + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}\,' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')$

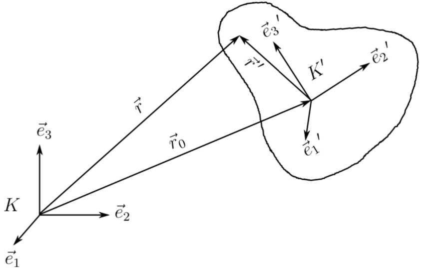
Punkte $\vec{r} = \vec{r}^{\,(i)}$ des starren Körpers selbst: $\vec{v}^{\,(i)\prime} = \vec{a}^{\,(i)\prime} = \vec{0}$



Geschwindigkeit und Beschleunigung beliebiger Punkte:

- $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times \vec{r}\,'$
- $\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \vec{a}_0 + \vec{a}\,' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}\,' + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}\,' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')$

Punkte $\vec{r} = \vec{r}^{\,(i)}$ des starren Körpers selbst: $\vec{v}^{\,(i)\prime} = \vec{a}^{\,(i)\prime} = \vec{0}$



$$\Rightarrow \quad \vec{v}^{\,(i)} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)\prime}$$

$$\vec{a}^{\,(i)} = \vec{a}_0 + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}^{\,(i)\prime} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)\prime})$$