TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Lagrange-Gleichungen 2. Art: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0\,, \quad j = 1, \dots, s$

- Zwangskräfte tauchen nicht mehr auf,
  Zwangsbedingungen wurden bei der Wahl der q_j verarbeitet
- Lagrange-Funktion: $L = T - V = L(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t)$
  - explizite Zeitabhängigkeit bei rheonomen Zwangsbedingungen

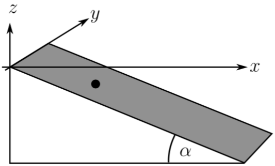
Lagrange-Gleichungen 2. Art: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0\,, \quad j = 1, \dots, s$

- Zwangskräfte tauchen nicht mehr auf,
  Zwangsbedingungen wurden bei der Wahl der q_j verarbeitet
- Lagrange-Funktion: $L = T - V = L(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t)$
  - explizite Zeitabhängigkeit bei rheonomen Zwangsbedingungen
- Vorgehensweise:

1. Bestimme die Zahl der Freiheitsgrade s und wähle geeignete generalisierte Koordinaten $q_1, \dots q_s$.
2. Bestimme T, V und damit die Lagrange-Funktion $L = T - V$ als Funktion der q_j und $\dot{q}_j$ (und t).
3. Berechne daraus die Lagrange-Gleichungen $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$

(4. Löse die Gleichungen.)

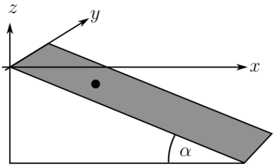
Beispiel 1: Teilchen auf schiefer Ebene



- Zwangsbedingung: $z = -x \tan\alpha$

→ generalisierte (= unabhängige) Koordinaten: x, y

Beispiel 1: Teilchen auf schiefer Ebene



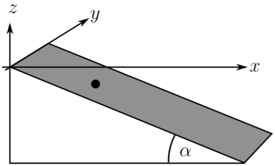
- Zwangsbedingung: $z = -x \tan\alpha$

→ generalisierte (= unabhängige) Koordinaten: x, y

- $T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$
  $= \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2(1 + \tan^2\alpha) + \dot{y}^2\right) = \frac{m}{2}\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)$

Beispiel 1: Teilchen auf schiefer Ebene

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT



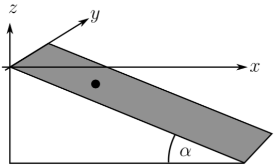
- Zwangsbedingung: $z = -x \tan\alpha$

→ generalisierte (= unabhängige) Koordinaten: x, y

- $$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2(1 + \tan^2\alpha) + \dot{y}^2\right) = \frac{m}{2}\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)$$

- $V = mgz = -mgx\tan\alpha$

Beispiel 1: Teilchen auf schiefer Ebene



- Zwangsbedingung: $z = -x \tan\alpha$

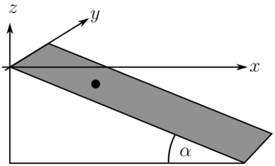
$\rightarrow$ generalisierte (= unabhängige) Koordinaten: x, y

- $T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$
  $= \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2(1 + \tan^2\alpha) + \dot{y}^2\right) = \frac{m}{2}\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)$
- $V = mgz = -mgx\tan\alpha$

$\Rightarrow$ Lagrange-Funktion: $L = T - V = \frac{m}{2}\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + mgx\tan\alpha$

Beispiel 1: Teilchen auf schiefer Ebene

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT



- Zwangsbedingung: $z = -x \tan\alpha$

→ generalisierte (= unabhängige) Koordinaten: x, y

- $T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$
  $= \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2(1+\tan^2\alpha) + \dot{y}^2\right) = \frac{m}{2}\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)$

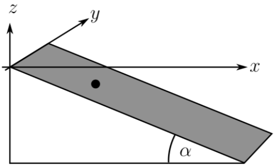
- $V = mgz = -mgx\tan\alpha$

$\Rightarrow$ Lagrange-Funktion: $L = T - V = \frac{m}{2}\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + mgx\tan\alpha$

- $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{m}{\cos^2\alpha}\dot{x} \quad\Rightarrow\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{m}{\cos^2\alpha}\ddot{x}, \qquad \frac{\partial L}{\partial x} = mg\tan\alpha$

Beispiel 1: Teilchen auf schiefer Ebene

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT



- Zwangsbedingung: $z = -x \tan\alpha$

→ generalisierte (= unabhängige) Koordinaten: x, y

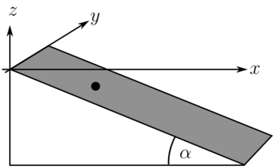
- $T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$
  $= \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2(1 + \tan^2\alpha) + \dot{y}^2\right) = \frac{m}{2}\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)$
- $V = mgz = -mgx\tan\alpha$

$\Rightarrow$ Lagrange-Funktion: $L = T - V = \frac{m}{2}\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + mgx\tan\alpha$

- $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{m}{\cos^2\alpha}\dot{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{m}{\cos^2\alpha}\ddot{x}, \qquad \frac{\partial L}{\partial x} = mg\tan\alpha$

  $\Rightarrow \quad \frac{m}{\cos^2\alpha}\ddot{x} - mg\tan\alpha = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x} = g\cos\alpha\sin\alpha$

Beispiel 1: Teilchen auf schiefer Ebene



- Zwangsbedingung: $z = -x \tan\alpha$

$\rightarrow$ generalisierte (= unabhängige) Koordinaten: x, y

- $T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$
  $= \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2(1 + \tan^2\alpha) + \dot{y}^2\right) = \frac{m}{2}\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)$

- $V = mgz = -mgx\tan\alpha$

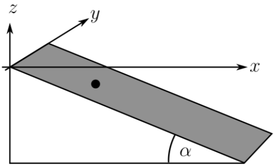
$\Rightarrow$ Lagrange-Funktion: $L = T - V = \frac{m}{2}\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + mgx\tan\alpha$

- $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{m}{\cos^2\alpha}\dot{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{m}{\cos^2\alpha}\ddot{x}, \qquad \frac{\partial L}{\partial x} = mg\tan\alpha$

  $\Rightarrow \quad \frac{m}{\cos^2\alpha}\ddot{x} - mg\tan\alpha = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x} = g\cos\alpha\sin\alpha$

- $\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\ddot{y}, \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = 0$

Beispiel 1: Teilchen auf schiefer Ebene



- Zwangsbedingung: $z = -x \tan\alpha$

$\rightarrow$ generalisierte (= unabhängige) Koordinaten: x, y

- $T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$
  $= \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2(1+\tan^2\alpha) + \dot{y}^2\right) = \frac{m}{2}\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)$

- $V = mgz = -mgx\tan\alpha$

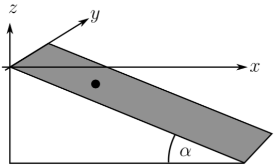
$\Rightarrow$ Lagrange-Funktion: $L = T - V = \frac{m}{2}\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + mgx\tan\alpha$

- $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{m}{\cos^2\alpha}\dot{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{m}{\cos^2\alpha}\ddot{x}, \qquad \frac{\partial L}{\partial x} = mg\tan\alpha$

  $\Rightarrow \quad \frac{m}{\cos^2\alpha}\ddot{x} - mg\tan\alpha = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x} = g\cos\alpha\sin\alpha$

- $\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\ddot{y}, \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad m\ddot{y} = 0$

Beispiel 1: Teilchen auf schiefer Ebene



- Zwangsbedingung: $z = -x \tan\alpha$

$\rightarrow$ generalisierte (= unabhängige) Koordinaten: x, y

- $T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$
  $= \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2(1 + \tan^2\alpha) + \dot{y}^2\right) = \frac{m}{2}\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)$

- $V = mgz = -mgx\tan\alpha$

$\Rightarrow$ Lagrange-Funktion: $L = T - V = \frac{m}{2}\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + mgx\tan\alpha$

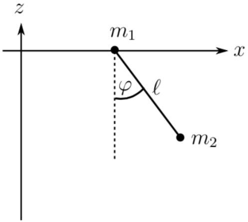
- $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{m}{\cos^2\alpha}\dot{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{m}{\cos^2\alpha}\ddot{x}, \qquad \frac{\partial L}{\partial x} = mg\tan\alpha$

  $\Rightarrow \quad \frac{m}{\cos^2\alpha}\ddot{x} - mg\tan\alpha = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x} = g\cos\alpha\sin\alpha$

- $\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\ddot{y}, \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad m\ddot{y} = 0$

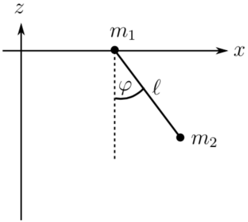
Gleiche Bewegungsgleichungen wie mit Lagrange 1. Art! ✓

Beispiel 2: ebenes Rollpendel im Schwerefeld



- m_1, kartes. Koordianten $(x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)})$, frei beweglich entlang der x-Achse
- m_2, kartes. Koordianten $(x^{(2)}, y^{(2)}, z^{(2)})$, frei schwingend in der x-z-Ebene im Abstand ℓ von m_1

Beispiel 2: ebenes Rollpendel im Schwerefeld



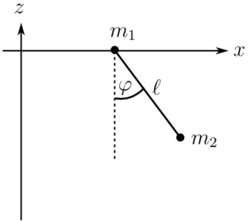
- m_1, kartes. Koordianten $(x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)})$, frei beweglich entlang der x-Achse
- m_2, kartes. Koordianten $(x^{(2)}, y^{(2)}, z^{(2)})$, frei schwingend in der x-z-Ebene im Abstand ℓ von m_1

→ Zwangsbedingungen:

$$\left.\begin{array}{ll}
1.) & y^{(1)} = 0 \\
2.) & z^{(1)} = 0 \\
3.) & y^{(2)} = 0 \\
4.) & (\vec{r}^{\,(1)} - \vec{r}^{\,(2)})^2 = \ell^2 \quad \Rightarrow \quad (x^{(1)} - x^{(2)})^2 + {z^{(2)}}^2 = \ell^2
\end{array}\right\} \; s = 6 - 4 = 2$$

Beispiel 2: ebenes Rollpendel im Schwerefeld

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

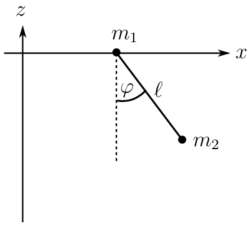


- m_1, kartes. Koordianten $(x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)})$, frei beweglich entlang der x-Achse
- m_2, kartes. Koordianten $(x^{(2)}, y^{(2)}, z^{(2)})$, frei schwingend in der x-z-Ebene im Abstand ℓ von m_1

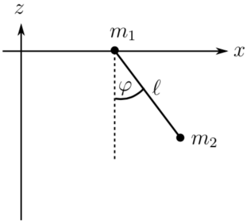
→ Zwangsbedingungen:

$$\left.\begin{array}{ll} 1.) & y^{(1)} = 0 \\ 2.) & z^{(1)} = 0 \\ 3.) & y^{(2)} = 0 \\ 4.) & (\vec{r}^{\,(1)} - \vec{r}^{\,(2)})^2 = \ell^2 \quad \Rightarrow \quad (x^{(1)} - x^{(2)})^2 + {z^{(2)}}^2 = \ell^2 \end{array}\right\} s = 6 - 4 = 2$$

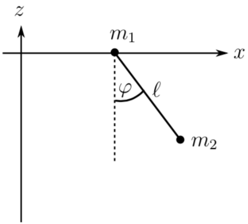
→ 2 generalisierte Koordinaten, z.B. $q_1 = x^{(1)}$, $q_2 = \varphi$



- $x^{(2)} = x^{(1)} + \ell \sin\varphi$
- $z^{(2)} = -\ell \cos\varphi$

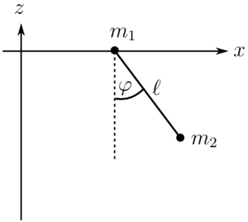


- $x^{(2)} = x^{(1)} + \ell \sin\varphi \quad \Rightarrow \quad \dot{x}^{(2)} = \dot{x}^{(1)} + \ell\,\dot{\varphi}\cos\varphi$
- $z^{(2)} = -\ell\cos\varphi \quad \Rightarrow \quad \dot{z}^{(2)} = \ell\,\dot{\varphi}\sin\varphi$



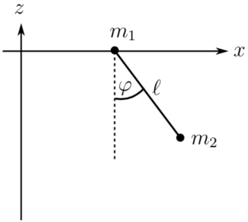
- $x^{(2)} = x^{(1)} + \ell \sin\varphi \quad \Rightarrow \quad \dot{x}^{(2)} = \dot{x}^{(1)} + \ell\,\dot{\varphi} \cos\varphi$
- $z^{(2)} = -\ell \cos\varphi \quad \Rightarrow \quad \dot{z}^{(2)} = \ell\,\dot{\varphi} \sin\varphi$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{1}{2} m_1 \left(\dot{x}^{(1)\,2} + \dot{y}^{(1)\,2} + \dot{z}^{(1)\,2} \right) + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{x}^{(2)\,2} + \dot{y}^{(2)\,2} + \dot{z}^{(2)\,2} \right)$$



- $x^{(2)} = x^{(1)} + \ell \sin\varphi \quad \Rightarrow \quad \dot{x}^{(2)} = \dot{x}^{(1)} + \ell\,\dot{\varphi}\cos\varphi$
- $z^{(2)} = -\ell\cos\varphi \quad \Rightarrow \quad \dot{z}^{(2)} = \ell\,\dot{\varphi}\sin\varphi$

$$\Rightarrow \quad T = \tfrac{1}{2} m_1 \left(\dot{x}^{(1)\,2} + \dot{y}^{(1)\,2} + \dot{z}^{(1)\,2}\right) + \tfrac{1}{2} m_2 \left(\dot{x}^{(2)\,2} + \dot{y}^{(2)\,2} + \dot{z}^{(2)\,2}\right)$$
$$= \tfrac{1}{2} m_1 \dot{x}^{(1)\,2} + \tfrac{1}{2} m_2 \left[(\dot{x}^{(1)} + \ell\,\dot{\varphi}\cos\varphi)^2 + (\ell\,\dot{\varphi}\sin\varphi)^2\right]$$

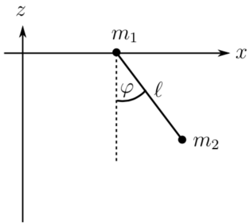


- $x^{(2)} = x^{(1)} + \ell \sin\varphi \quad \Rightarrow \quad \dot{x}^{(2)} = \dot{x}^{(1)} + \ell\,\dot{\varphi}\cos\varphi$
- $z^{(2)} = -\ell\cos\varphi \quad \Rightarrow \quad \dot{z}^{(2)} = \ell\,\dot{\varphi}\sin\varphi$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{1}{2}m_1\left(\dot{x}^{(1)\,2} + \dot{y}^{(1)\,2} + \dot{z}^{(1)\,2}\right) + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{x}^{(2)\,2} + \dot{y}^{(2)\,2} + \dot{z}^{(2)\,2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}m_1\dot{x}^{(1)\,2} + \frac{1}{2}m_2\left[(\dot{x}^{(1)} + \ell\,\dot{\varphi}\cos\varphi)^2 + (\ell\,\dot{\varphi}\sin\varphi)^2\right]$$

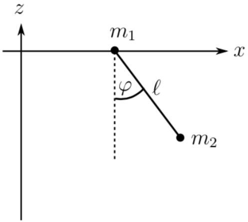
$$= \frac{1}{2}m_1\dot{x}^{(1)\,2} + \frac{1}{2}m_2\left[\dot{x}^{(1)\,2} + \ell^2\,\dot{\varphi}^2 + 2\ell\,\dot{x}^{(1)}\,\dot{\varphi}\cos\varphi\right]$$



- $x^{(2)} = x^{(1)} + \ell \sin\varphi \quad \Rightarrow \quad \dot{x}^{(2)} = \dot{x}^{(1)} + \ell\,\dot{\varphi}\cos\varphi$
- $z^{(2)} = -\ell\cos\varphi \quad \Rightarrow \quad \dot{z}^{(2)} = \ell\,\dot{\varphi}\sin\varphi$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad T &= \tfrac{1}{2}m_1\left(\dot{x}^{(1)\,2} + \dot{y}^{(1)\,2} + \dot{z}^{(1)\,2}\right) + \tfrac{1}{2}m_2\left(\dot{x}^{(2)\,2} + \dot{y}^{(2)\,2} + \dot{z}^{(2)\,2}\right) \\
&= \tfrac{1}{2}m_1\dot{x}^{(1)\,2} + \tfrac{1}{2}m_2\left[(\dot{x}^{(1)} + \ell\,\dot{\varphi}\cos\varphi)^2 + (\ell\,\dot{\varphi}\sin\varphi)^2\right] \\
&= \tfrac{1}{2}m_1\dot{x}^{(1)\,2} + \tfrac{1}{2}m_2\left[\dot{x}^{(1)\,2} + \ell^2\,\dot{\varphi}^2 + 2\ell\,\dot{x}^{(1)}\,\dot{\varphi}\cos\varphi\right] \\
&= \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)\,\dot{x}^{(1)\,2} + \tfrac{1}{2}m_2\,\ell^2\,\dot{\varphi}^2 + m_2\,\ell\,\dot{x}^{(1)}\,\dot{\varphi}\cos\varphi
\end{aligned}
$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT



- $x^{(2)} = x^{(1)} + \ell \sin\varphi \quad \Rightarrow \quad \dot{x}^{(2)} = \dot{x}^{(1)} + \ell\,\dot{\varphi}\cos\varphi$
- $z^{(2)} = -\ell\cos\varphi \quad \Rightarrow \quad \dot{z}^{(2)} = \ell\,\dot{\varphi}\sin\varphi$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad T &= \tfrac{1}{2} m_1 \left(\dot{x}^{(1)\,2} + \dot{y}^{(1)\,2} + \dot{z}^{(1)\,2}\right) + \tfrac{1}{2} m_2 \left(\dot{x}^{(2)\,2} + \dot{y}^{(2)\,2} + \dot{z}^{(2)\,2}\right) \\
&= \tfrac{1}{2} m_1 \dot{x}^{(1)\,2} + \tfrac{1}{2} m_2 \left[(\dot{x}^{(1)} + \ell\,\dot{\varphi}\cos\varphi)^2 + (\ell\,\dot{\varphi}\sin\varphi)^2\right] \\
&= \tfrac{1}{2} m_1 \dot{x}^{(1)\,2} + \tfrac{1}{2} m_2 \left[\dot{x}^{(1)\,2} + \ell^2\,\dot{\varphi}^2 + 2\ell\,\dot{x}^{(1)}\,\dot{\varphi}\cos\varphi\right] \\
&= \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)\,\dot{x}^{(1)\,2} + \tfrac{1}{2} m_2\,\ell^2\,\dot{\varphi}^2 + m_2\,\ell\,\dot{x}^{(1)}\,\dot{\varphi}\cos\varphi
\end{aligned}
$$

$$
V = m_2 g z^{(2)} = -m_2 g\,\ell\cos\varphi
$$

$$\Rightarrow \; L = T - V = \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)\,\dot{x}^{(1)\,2} + \tfrac{1}{2} m_2\,\ell^2\,\dot{\varphi}^2 + m_2\,\ell\,\dot{x}^{(1)}\,\dot{\varphi}\cos\varphi + m_2 g\,\ell\cos\varphi$$

$$\Rightarrow \; L = T - V = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\,\dot{x}^{(1)\,2} + \frac{1}{2} m_2\,\ell^2\,\dot{\varphi}^2 + m_2\,\ell\,\dot{x}^{(1)}\,\dot{\varphi}\cos\varphi + m_2 g\,\ell\cos\varphi$$

- $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{(1)}} = (m_1 + m_2)\,\dot{x}^{(1)} + m_2\,\ell\,\dot{\varphi}\cos\varphi$

$$\Rightarrow \quad L = T - V = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\,\dot{x}^{(1)\,2} + \frac{1}{2}m_2\,\ell^2\,\dot{\varphi}^2 + m_2\,\ell\,\dot{x}^{(1)}\,\dot{\varphi}\cos\varphi + m_2 g\,\ell\cos\varphi$$

- $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{(1)}} = (m_1 + m_2)\,\dot{x}^{(1)} + m_2\,\ell\,\dot{\varphi}\cos\varphi$

  $$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{(1)}} = (m_1 + m_2)\,\ddot{x}^{(1)} + m_2\,\ell\,(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\,\sin\varphi)$$

$$\Rightarrow \quad L = T - V = \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)\, \dot{x}^{(1)\,2} + \tfrac{1}{2} m_2\, \ell^2\, \dot{\varphi}^2 + m_2\, \ell\, \dot{x}^{(1)}\, \dot{\varphi} \cos\varphi + m_2 g\, \ell \cos\varphi$$

- $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{(1)}} = (m_1 + m_2)\, \dot{x}^{(1)} + m_2\, \ell\, \dot{\varphi} \cos\varphi$

  $\Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{(1)}} = (m_1 + m_2)\, \ddot{x}^{(1)} + m_2\, \ell\, (\ddot{\varphi} \cos\varphi - \dot{\varphi}^2\, \sin\varphi)$

  $\frac{\partial L}{\partial x^{(1)}} = 0$

$$\Rightarrow \; L = T - V = \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)\,\dot{x}^{(1)\,2} + \tfrac{1}{2} m_2\,\ell^2\,\dot{\varphi}^2 + m_2\,\ell\,\dot{x}^{(1)}\,\dot{\varphi}\cos\varphi + m_2 g\,\ell\cos\varphi$$

- $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{(1)}} = (m_1 + m_2)\,\dot{x}^{(1)} + m_2\,\ell\,\dot{\varphi}\cos\varphi$

  $\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{(1)}} = (m_1 + m_2)\,\ddot{x}^{(1)} + m_2\,\ell\,(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\,\sin\varphi)$

  $\frac{\partial L}{\partial x^{(1)}} = 0$

- $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_2\,\ell^2\,\dot{\varphi} + m_2\,\ell\,\dot{x}^{(1)}\,\cos\varphi \;=\; m_2\,\ell\left(\ell\,\dot{\varphi} + \dot{x}^{(1)}\,\cos\varphi\right)$

$\Rightarrow$ $L = T - V = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\,\dot{x}^{(1)\,2} + \frac{1}{2} m_2\,\ell^2\,\dot{\varphi}^2 + m_2\,\ell\,\dot{x}^{(1)}\,\dot{\varphi}\cos\varphi + m_2 g\,\ell\cos\varphi$

- $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{(1)}} = (m_1 + m_2)\,\dot{x}^{(1)} + m_2\,\ell\,\dot{\varphi}\cos\varphi$

  $\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{(1)}} = (m_1 + m_2)\,\ddot{x}^{(1)} + m_2\,\ell\,(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\,\sin\varphi)$

  $\frac{\partial L}{\partial x^{(1)}} = 0$

- $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_2\,\ell^2\,\dot{\varphi} + m_2\,\ell\,\dot{x}^{(1)}\,\cos\varphi \;=\; m_2\,\ell\left(\ell\,\dot{\varphi} + \dot{x}^{(1)}\,\cos\varphi\right)$

  $\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_2\,\ell\left(\ell\,\ddot{\varphi} + \ddot{x}^{(1)}\,\cos\varphi - \dot{x}^{(1)}\,\dot{\varphi}\sin\varphi\right)$

$$\Rightarrow \; L = T - V = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\,\dot{x}^{(1)\,2} + \frac{1}{2} m_2\,\ell^2\,\dot{\varphi}^2 + m_2\,\ell\,\dot{x}^{(1)}\,\dot{\varphi}\cos\varphi + m_2 g\,\ell\cos\varphi$$

- $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{(1)}} = (m_1 + m_2)\,\dot{x}^{(1)} + m_2\,\ell\,\dot{\varphi}\cos\varphi$

  $\Rightarrow \; \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{(1)}} = (m_1 + m_2)\,\ddot{x}^{(1)} + m_2\,\ell\,(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\,\sin\varphi)$

  $\frac{\partial L}{\partial x^{(1)}} = 0$

- $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_2\,\ell^2\,\dot{\varphi} + m_2\,\ell\,\dot{x}^{(1)}\,\cos\varphi \; = \; m_2\,\ell\left(\ell\,\dot{\varphi} + \dot{x}^{(1)}\,\cos\varphi\right)$

  $\Rightarrow \; \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_2\,\ell\,\left(\ell\,\ddot{\varphi} + \ddot{x}^{(1)}\,\cos\varphi - \dot{x}^{(1)}\,\dot{\varphi}\sin\varphi\right)$

  $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -m_2\,\ell\,(\dot{x}^{(1)}\,\dot{\varphi} + g)\,\sin\varphi$

$$\Rightarrow \quad L = T - V = \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)\,\dot{x}^{(1)\,2} + \tfrac{1}{2} m_2\,\ell^2\,\dot{\varphi}^2 + m_2\,\ell\,\dot{x}^{(1)}\,\dot{\varphi}\cos\varphi + m_2 g\,\ell\cos\varphi$$

- $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{(1)}} = (m_1 + m_2)\,\dot{x}^{(1)} + m_2\,\ell\,\dot{\varphi}\cos\varphi$

  $\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{(1)}} = (m_1 + m_2)\,\ddot{x}^{(1)} + m_2\,\ell\,(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\,\sin\varphi)$

  $\frac{\partial L}{\partial x^{(1)}} = 0$

- $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_2\,\ell^2\,\dot{\varphi} + m_2\,\ell\,\dot{x}^{(1)}\,\cos\varphi \;=\; m_2\,\ell\left(\ell\,\dot{\varphi} + \dot{x}^{(1)}\,\cos\varphi\right)$

  $\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_2\,\ell\,\left(\ell\,\ddot{\varphi} + \ddot{x}^{(1)}\,\cos\varphi - \dot{x}^{(1)}\,\dot{\varphi}\sin\varphi\right)$

  $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -m_2\,\ell\,(\dot{x}^{(1)}\,\dot{\varphi} + g)\,\sin\varphi$

$$\Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcll} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{(1)}} - \frac{\partial L}{\partial x^{(1)}} & = & (m_1 + m_2)\,\ddot{x}^{(1)} + m_2\,\ell\,(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\,\sin\varphi) & = 0 \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} & = & m_2\,\ell\,\left(\ell\,\ddot{\varphi} + \ddot{x}^{(1)}\,\cos\varphi + g\,\sin\varphi\right) & = 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \; L = T - V = \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)\, \dot{x}^{(1)\,2} + \tfrac{1}{2} m_2\, \ell^2\, \dot{\varphi}^2 + m_2\, \ell\, \dot{x}^{(1)}\, \dot{\varphi} \cos\varphi + m_2 g\, \ell \cos\varphi$$

- $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{(1)}} = (m_1 + m_2)\, \dot{x}^{(1)} + m_2\, \ell\, \dot{\varphi} \cos\varphi$

  $\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{(1)}} = (m_1 + m_2)\, \ddot{x}^{(1)} + m_2\, \ell\, (\ddot{\varphi} \cos\varphi - \dot{\varphi}^2 \sin\varphi)$

  $\frac{\partial L}{\partial x^{(1)}} = 0$

- $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_2\, \ell^2\, \dot{\varphi} + m_2\, \ell\, \dot{x}^{(1)} \cos\varphi \; = \; m_2\, \ell \left(\ell\, \dot{\varphi} + \dot{x}^{(1)} \cos\varphi\right)$

  $\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_2\, \ell \left(\ell\, \ddot{\varphi} + \ddot{x}^{(1)} \cos\varphi - \dot{x}^{(1)}\, \dot{\varphi} \sin\varphi\right)$

  $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -m_2\, \ell\, (\dot{x}^{(1)}\, \dot{\varphi} + g) \sin\varphi$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcll} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{(1)}} - \frac{\partial L}{\partial x^{(1)}} & = & (m_1 + m_2)\, \ddot{x}^{(1)} + m_2\, \ell\, (\ddot{\varphi} \cos\varphi - \dot{\varphi}^2 \sin\varphi) & = 0 \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} & = & m_2\, \ell \left(\ell\, \ddot{\varphi} + \ddot{x}^{(1)} \cos\varphi + g \sin\varphi\right) & = 0 \end{array} \right.$$

(2 gekoppelte DGln. 2. Ordnung, Lösung i.A. numerisch)

4.5 Erhaltungssätze

4.5 Erhaltungssätze

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Rollpendel: $\frac{\partial L}{\partial x^{(1)}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{(1)}} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_1 \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{(1)}} = const.$

- Rollpendel: $\frac{\partial L}{\partial x^{(1)}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{(1)}} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_1 \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{(1)}} = const.$

  physikalische Interpretation:

  $$p_1 = (m_1 + m_2)\,\dot{x}^{(1)} + m_2\,\ell\,\dot{\varphi}\cos\varphi = m_1\,\dot{x}^{(1)} + m_2\,\dot{x}^{(2)}$$

  $= x$-Komponente des Gesamtimpulses

  (erhalten, da keine äußere Kraft in x-Richtung ✓)

4.5 Erhaltungssätze

- Rollpendel: $\frac{\partial L}{\partial x^{(1)}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{(1)}} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_1 \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{(1)}} = const.$

  physikalische Interpretation:

  $$p_1 = (m_1 + m_2)\,\dot{x}^{(1)} + m_2\,\ell\,\dot{\varphi}\cos\varphi = m_1\,\dot{x}^{(1)} + m_2\,\dot{x}^{(2)}$$

  $= x$-Komponente des Gesamtimpulses

  (erhalten, da keine äußere Kraft in x-Richtung $\checkmark$)

- **Definitionen:**
  - „zu q_j kanonisch konjugierter Impuls“: $p_j \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$

4.5 Erhaltungssätze

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Rollpendel: $\frac{\partial L}{\partial x^{(1)}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{(1)}} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_1 \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{(1)}} = const.$

  physikalische Interpretation:

  $p_1 = (m_1 + m_2)\,\dot{x}^{(1)} + m_2\,\ell\,\dot{\varphi}\cos\varphi = m_1\,\dot{x}^{(1)} + m_2\,\dot{x}^{(2)}$

  $= x$-Komponente des Gesamtimpulses

  (erhalten, da keine äußere Kraft in x-Richtung $\checkmark$)

- **Definitionen:**
  - „zu q_j kanonisch konjugierter Impuls“: $p_j \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$
  - q_j ist eine „zyklische Koordinate“, falls $\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$

4.5 Erhaltungssätze

- Rollpendel: $\frac{\partial L}{\partial x^{(1)}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{(1)}} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_1 \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{(1)}} = const.$

  physikalische Interpretation:

  $$p_1 = (m_1 + m_2)\,\dot{x}^{(1)} + m_2\,\ell\,\dot{\varphi}\cos\varphi = m_1\,\dot{x}^{(1)} + m_2\,\dot{x}^{(2)}$$

  $= x$-Komponente des Gesamtimpulses

  (erhalten, da keine äußere Kraft in x-Richtung ✓)

- **Definitionen:**
  - „zu q_j kanonisch konjugierter Impuls“: $p_j \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$
  - q_j ist eine „zyklische Koordinate“, falls $\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$

- Dann gilt allgemein: $\boxed{q_j \text{ zyklisch} \;\Rightarrow\; p_j = \text{Erhaltungsgröße}}$

4.5 Erhaltungssätze

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Rollpendel: $\frac{\partial L}{\partial x^{(1)}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{(1)}} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_1 \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{(1)}} = const.$

  physikalische Interpretation:

  $p_1 = (m_1 + m_2)\,\dot{x}^{(1)} + m_2\,\ell\,\dot{\varphi}\cos\varphi = m_1\,\dot{x}^{(1)} + m_2\,\dot{x}^{(2)}$

  $= x$-Komponente des Gesamtimpulses

  (erhalten, da keine äußere Kraft in x-Richtung ✓)

- **Definitionen:**
  - „zu q_j kanonisch konjugierter Impuls“: $p_j \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$
  - q_j ist eine „zyklische Koordinate“, falls $\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$

- Dann gilt allgemein: $\boxed{q_j \text{ zyklisch} \;\Rightarrow\; p_j = \text{Erhaltungsgröße}}$

Beweis: $\dot{p}_j = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \overset{\text{Lagrange}}{=} \frac{\partial L}{\partial q_j} \overset{q_j\,\text{zykl.}}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad p_j = const.$

- Noether-Theorem (Emmy Noether, 1918)

  Zu jeder kontinuierlichen Symmetrie eines physikalischen Systems gehört eine Erhaltungsgröße.

- Noether-Theorem (Emmy Noether, 1918)

  Zu jeder kontinuierlichen Symmetrie eines physikalischen Systems gehört eine Erhaltungsgröße.

  - „Wirkung“: $S = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L$
  - Symmetrie:
    (Koordinaten-) Transformation, die die Wirkung invariant lässt

Homogenität der Zeit

Homogenität der Zeit

- Homogenität der Zeit:
  Der Ablauf eines Experiments hängt nicht vom Anfangszeitpunkt ab:

  gleiche Anfangsbedingungen zu unterschiedlichen Zeiten t_A und $t_B = t_A + \Delta t$

  $\rightarrow$ analog zeitverschobene Bewegungsabläufe $\vec{r}_A^{(i)}(t) = \vec{r}_B^{(i)}(t + \Delta t)$

Homogenität der Zeit

- Homogenität der Zeit:
  Der Ablauf eines Experiments hängt nicht vom Anfangszeitpunkt ab:

  gleiche Anfangsbedingungen zu unterschiedlichen Zeiten t_A und $t_B = t_A + \Delta t$
  $\to$ analog zeitverschobene Bewegungsabläufe $\vec{r}_A^{(i)}(t) = \vec{r}_B^{(i)}(t + \Delta t)$

- Voraussetzung: keine zeitabhängigen Zwangsbedingungen
  $\Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad L = L(q_1, \ldots, q_s, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_s, \cancel{t})$

Homogenität der Zeit

- Homogenität der Zeit:
  Der Ablauf eines Experiments hängt nicht vom Anfangszeitpunkt ab:

  gleiche Anfangsbedingungen zu unterschiedlichen Zeiten t_A und $t_B = t_A + \Delta t$
  $\rightarrow$ analog zeitverschobene Bewegungsabläufe $\vec{r}_A^{\,(i)}(t) = \vec{r}_B^{\,(i)}(t + \Delta t)$

- Voraussetzung: keine zeitabhängigen Zwangsbedingungen
  $\Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad L = L(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, \cancel{t})$

$$\Rightarrow \quad \frac{dL}{dt} = \sum_{j=1}^{s} \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right)$$

Homogenität der Zeit

- Homogenität der Zeit:
  Der Ablauf eines Experiments hängt nicht vom Anfangszeitpunkt ab:

  gleiche Anfangsbedingungen zu unterschiedlichen Zeiten t_A und $t_B = t_A + \Delta t$

  ➞ analog zeitverschobene Bewegungsabläufe $\vec{r}_A^{(i)}(t) = \vec{r}_B^{(i)}(t + \Delta t)$

- Voraussetzung: keine zeitabhängigen Zwangsbedingungen

  $\Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad L = L(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, \cancel{t})$

$$\Rightarrow \quad \frac{dL}{dt} = \sum_{j=1}^{s} \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right) = \sum_{j=1}^{s} \left(\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right)$$

Homogenität der Zeit

- Homogenität der Zeit:
  Der Ablauf eines Experiments hängt nicht vom Anfangszeitpunkt ab:

  gleiche Anfangsbedingungen zu unterschiedlichen Zeiten t_A und $t_B = t_A + \Delta t$

  $\rightarrow$ analog zeitverschobene Bewegungsabläufe $\vec{r}_A^{(i)}(t) = \vec{r}_B^{(i)}(t + \Delta t)$

- Voraussetzung: keine zeitabhängigen Zwangsbedingungen

  $\Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad L = L(q_1, \ldots, q_s, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_s, \cancel{t})$

$$\Rightarrow \frac{dL}{dt} = \sum_{j=1}^{s} \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right) = \sum_{j=1}^{s} \left(\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right) = \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j$$

Homogenität der Zeit

- Homogenität der Zeit:
  Der Ablauf eines Experiments hängt nicht vom Anfangszeitpunkt ab:

  gleiche Anfangsbedingungen zu unterschiedlichen Zeiten t_A und $t_B = t_A + \Delta t$
  $\rightarrow$ analog zeitverschobene Bewegungsabläufe $\vec{r}_A^{(i)}(t) = \vec{r}_B^{(i)}(t + \Delta t)$

- Voraussetzung: keine zeitabhängigen Zwangsbedingungen
  $\Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad L = L(q_1, \ldots, q_s, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_s, \cancel{t})$

$$\Rightarrow \quad \frac{dL}{dt} = \sum_{j=1}^{s} \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right) = \sum_{j=1}^{s} \left(\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right) = \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^{s} p_j \dot{q}_j$$

Homogenität der Zeit

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Homogenität der Zeit:
  Der Ablauf eines Experiments hängt nicht vom Anfangszeitpunkt ab:

  gleiche Anfangsbedingungen zu unterschiedlichen Zeiten t_A und $t_B = t_A + \Delta t$
  $\rightarrow$ analog zeitverschobene Bewegungsabläufe $\vec{r}_A^{(i)}(t) = \vec{r}_B^{(i)}(t + \Delta t)$

- Voraussetzung: keine zeitabhängigen Zwangsbedingungen
  $\Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad L = L(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, \cancel{t})$

$$\Rightarrow \frac{dL}{dt} = \sum_{j=1}^{s} \left(\frac{\partial L}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j \right) = \sum_{j=1}^{s} \left(\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right)\dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j \right) = \frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j = \frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{s} p_j \dot{q}_j$$

- **Def.:** $H \equiv \sum_{j=1}^{s} p_j \dot{q}_j - L$ „Hamilton-Funktion“

Homogenität der Zeit

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Homogenität der Zeit:
  Der Ablauf eines Experiments hängt nicht vom Anfangszeitpunkt ab:

  gleiche Anfangsbedingungen zu unterschiedlichen Zeiten t_A und $t_B = t_A + \Delta t$

  $\rightarrow$ analog zeitverschobene Bewegungsabläufe $\vec{r}_A^{\,(i)}(t) = \vec{r}_B^{\,(i)}(t + \Delta t)$

- Voraussetzung: keine zeitabhängigen Zwangsbedingungen

  $\Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad L = L(q_1, \ldots, q_s, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_s, \cancel{t})$

$$\Rightarrow \quad \frac{dL}{dt} = \sum_{j=1}^{s} \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right) = \sum_{j=1}^{s} \left(\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right) = \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^{s} p_j \dot{q}_j$$

- **Def.:** $H \equiv \sum_{j=1}^{s} p_j \dot{q}_j - L$ „Hamilton-Funktion“

- Dann gilt: Homogenität der Zeit $\Rightarrow \quad \frac{dH}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad H = const.$

Interpretation

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Interpretation

skleronome Zwangsbedingungen $\longrightarrow$ $\vec{r}^{\,(i)} = \vec{r}^{\,(i)}(q_1, \dots, q_s)\,, \quad \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial t} = 0$

Interpretation

skleronome Zwangsbedingungen $\rightarrow$ $\vec{r}^{\,(i)} = \vec{r}^{\,(i)}(q_1, \dots, q_s)$, $\quad \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial t} = 0$

$$\Rightarrow \quad \dot{\vec{r}}^{\,(i)} = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_k} \, \dot{q}_k$$

Interpretation

skleronome Zwangsbedingungen $\rightarrow$ $\vec{r}^{\,(i)} = \vec{r}^{\,(i)}(q_1, \dots, q_s)\,, \quad \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial t} = 0$

$$\Rightarrow \quad \dot{\vec{r}}^{\,(i)} = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_k}\,\dot{q}_k$$

kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\,\dot{\vec{r}}^{\,(i)\,2} = \frac{1}{2}\sum_{k,\ell=1}^{s} m_{k\ell}(q_1,\dots,q_s)\,\dot{q}_k\dot{q}_\ell \quad \text{mit} \quad m_{k\ell} \equiv \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_k}\cdot\frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_\ell}$$

Interpretation

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

skleronome Zwangsbedingungen $\rightarrow\ \vec{r}^{\,(i)} = \vec{r}^{\,(i)}(q_1, \ldots, q_s)\ , \quad \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial t} = 0$

$$\Rightarrow \quad \dot{\vec{r}}^{\,(i)} = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_k}\, \dot{q}_k$$

kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i\, {\dot{\vec{r}}^{\,(i)}}{}^2 = \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^{s} m_{k\ell}(q_1, \ldots, q_s)\, \dot{q}_k \dot{q}_\ell \quad \text{mit} \quad m_{k\ell} \equiv \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_\ell}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\, \dot{q}_j = \frac{1}{2} \sum_{j,k,\ell=1}^{s} m_{k\ell}\, \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_k \dot{q}_\ell \right)}_{\delta_{jk}\dot{q}_\ell + \dot{q}_k \delta_{j\ell}} \dot{q}_j = \sum_{k,\ell=1}^{s} m_{k\ell}\, \dot{q}_k \dot{q}_\ell = 2T$$

Interpretation

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

skleronome Zwangsbedingungen $\to$ $\vec{r}^{\,(i)} = \vec{r}^{\,(i)}(q_1, \ldots, q_s)\,, \quad \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial t} = 0$

$$\Rightarrow \quad \dot{\vec{r}}^{\,(i)} = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_k}\,\dot{q}_k$$

kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\,\dot{\vec{r}}^{\,(i)\,2} = \frac{1}{2}\sum_{k,\ell=1}^{s} m_{k\ell}(q_1, \ldots, q_s)\,\dot{q}_k\dot{q}_\ell \quad \text{mit} \quad m_{k\ell} \equiv \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_\ell}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\,\dot{q}_j = \frac{1}{2}\sum_{j,k,\ell=1}^{s} m_{k\ell}\,\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_k\dot{q}_\ell\right)}_{\delta_{jk}\dot{q}_\ell + \dot{q}_k\delta_{j\ell}}\,\dot{q}_j = \sum_{k,\ell=1}^{s} m_{k\ell}\,\dot{q}_k\dot{q}_\ell = 2T$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{s} p_j\dot{q}_j = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j \overset{\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j}=0}{=} \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j = 2T$$

Interpretation

skleronome Zwangsbedingungen $\longrightarrow\ \vec{r}^{\,(i)} = \vec{r}^{\,(i)}(q_1, \dots, q_s)\,, \quad \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial t} = 0$

$$\Rightarrow \quad \dot{\vec{r}}^{\,(i)} = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_k}\, \dot{q}_k$$

kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i\, \dot{\vec{r}}^{\,(i)\,2} = \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^{s} m_{k\ell}(q_1, \dots, q_s)\, \dot{q}_k \dot{q}_\ell \quad \text{mit} \quad m_{k\ell} \equiv \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_\ell}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\, \dot{q}_j = \frac{1}{2} \sum_{j,k,\ell=1}^{s} m_{k\ell} \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_k \dot{q}_\ell \right)}_{\delta_{jk} \dot{q}_\ell + \dot{q}_k \delta_{j\ell}} \dot{q}_j = \sum_{k,\ell=1}^{s} m_{k\ell}\, \dot{q}_k \dot{q}_\ell = 2T$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{s} p_j \dot{q}_j = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \overset{\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0}{=} \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = 2T$$

$\Rightarrow$ Hamilton-Funktion: $\quad H = \sum_{j=1}^{s} p_j \dot{q}_j - L = 2T - (T - V) = T + V = E$

Symmetrien und Erhaltungssätze

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fazit:

- Homogenität der Zeit: $\Rightarrow$ Energieerhaltung: $E = const$.

Symmetrien und Erhaltungssätze

Fazit:

- Homogenität der Zeit: $\Rightarrow$ Energieerhaltung: $E = const.$

Analog kann man zeigen:

- Homogenität des Raumes
  (= Invarianz der phys. Abläufe gegenüber räumlichen Verschiebungen):

  $\Rightarrow$ Gesamtimpulserhaltung: $\vec{P} = const.$

Fazit:

- Homogenität der Zeit: $\Rightarrow$ Energieerhaltung: $E = const.$

Analog kann man zeigen:

- Homogenität des Raumes
  (= Invarianz der phys. Abläufe gegenüber räumlichen Verschiebungen):

  $\Rightarrow$ Gesamtimpulserhaltung: $\vec{P} = const.$

- Isotropie des Raumes
  (= Invarianz der phys. Abläufe gegenüber Drehungen):

  $\Rightarrow$ Gesamtdrehimpulserhaltung: $\vec{L} = const.$

5. Schwingungen

Motivation

Motivation

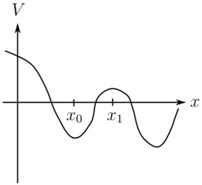
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Schwingungen: weit verbreitetes physikalisches Phänomen
  - tritt oft auf, wenn ein System geringfügig aus dem Gleichgewicht gebracht wird

Motivation

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- **Beispiel:** eindim Potenzial mit Minimum bei $x = x_0$ und Maximum bei $x = x_1$

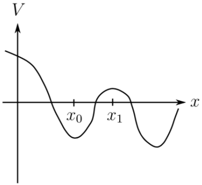


- $\left.\frac{dV}{dx}\right|_{x=x_0} = 0, \quad \left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=x_0} \equiv k > 0$
- $\left.\frac{dV}{dx}\right|_{x=x_1} = 0, \quad \left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=x_1} \equiv -\kappa < 0$

Motivation

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- **Beispiel:** eindim Potenzial mit Minimum bei $x = x_0$ und Maximum bei $x = x_1$

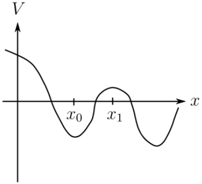


- $\left.\frac{dV}{dx}\right|_{x=x_0} = 0, \quad \left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=x_0} \equiv k > 0$
- $\left.\frac{dV}{dx}\right|_{x=x_1} = 0, \quad \left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=x_1} \equiv -\kappa < 0$
- Kraft: $F(x) = -\frac{dV}{dx} \quad \Rightarrow \quad F(x_0) = 0 = F(x_1)$

  („Gleichgewicht“)

Motivation

- **Beispiel:** eindim Potenzial mit Minimum bei $x = x_0$ und Maximum bei $x = x_1$



- $\left.\frac{dV}{dx}\right|_{x=x_0} = 0, \quad \left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=x_0} \equiv k > 0$
- $\left.\frac{dV}{dx}\right|_{x=x_1} = 0, \quad \left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=x_1} \equiv -\kappa < 0$
- Kraft: $F(x) = -\frac{dV}{dx} \quad \Rightarrow \quad F(x_0) = 0 = F(x_1)$

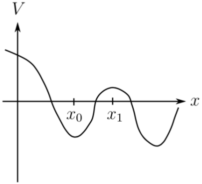
  („Gleichgewicht")

- kleine Auslenkung um x_0:

$$V(x) = V(x_0) + \underbrace{V'(x_0)}_{=0}(x - x_0) + \frac{1}{2}\underbrace{V''(x_0)}_{=k}(x - x_0)^2 + \cdots \approx V(x_0) + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$$

Motivation

- **Beispiel:** eindim Potenzial mit Minimum bei $x = x_0$ und Maximum bei $x = x_1$



- $\left.\frac{dV}{dx}\right|_{x=x_0} = 0, \qquad \left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=x_0} \equiv k > 0$
- $\left.\frac{dV}{dx}\right|_{x=x_1} = 0, \qquad \left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=x_1} \equiv -\kappa < 0$
- Kraft: $F(x) = -\frac{dV}{dx} \quad \Rightarrow \quad F(x_0) = 0 = F(x_1)$

  („Gleichgewicht")

- kleine Auslenkung um x_0:

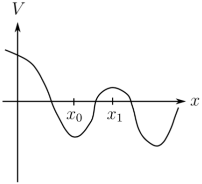
$$V(x) = V(x_0) + \underbrace{V'(x_0)}_{=0}(x - x_0) + \frac{1}{2}\underbrace{V''(x_0)}_{=k}(x - x_0)^2 + \cdots \approx V(x_0) + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$$

$\Rightarrow \quad F(x) \approx -k(x - x_0)$ (Hooke'sches Gesetz)

Motivation

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- **Beispiel:** eindim Potenzial mit Minimum bei $x = x_0$ und Maximum bei $x = x_1$



- $\left.\frac{dV}{dx}\right|_{x=x_0} = 0, \quad \left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=x_0} \equiv k > 0$
- $\left.\frac{dV}{dx}\right|_{x=x_1} = 0, \quad \left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=x_1} \equiv -\kappa < 0$
- Kraft: $F(x) = -\frac{dV}{dx} \quad \Rightarrow \quad F(x_0) = 0 = F(x_1)$

  („Gleichgewicht“)

- kleine Auslenkung um x_0:

$$V(x) = V(x_0) + \underbrace{V'(x_0)}_{=0}(x - x_0) + \frac{1}{2}\underbrace{V''(x_0)}_{=k}(x - x_0)^2 + \cdots \approx V(x_0) + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$$

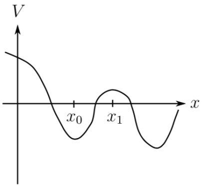
$\Rightarrow \quad F(x) \approx -k(x - x_0)$ (Hooke'sches Gesetz)

Teilchen wird in Richtung x_0 zurückgezogen ➞ stabiles Gleichgewicht!

Motivation

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- **Beispiel:** eindim Potenzial mit Minimum bei $x = x_0$ und Maximum bei $x = x_1$



- $\frac{dV}{dx}\Big|_{x=x_0} = 0, \quad \frac{d^2V}{dx^2}\Big|_{x=x_0} \equiv k > 0$
- $\frac{dV}{dx}\Big|_{x=x_1} = 0, \quad \frac{d^2V}{dx^2}\Big|_{x=x_1} \equiv -\kappa < 0$
- Kraft: $F(x) = -\frac{dV}{dx} \quad \Rightarrow \quad F(x_0) = 0 = F(x_1)$

  („Gleichgewicht“)

- kleine Auslenkung um x_0:

$$V(x) = V(x_0) + \underbrace{V'(x_0)}_{=0}(x - x_0) + \frac{1}{2}\underbrace{V''(x_0)}_{=k}(x - x_0)^2 + \cdots \approx V(x_0) + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$$

$\Rightarrow \quad F(x) \approx -k(x - x_0)$ (Hooke'sches Gesetz)

Teilchen wird in Richtung x_0 zurückgezogen $\rightarrow$ stabiles Gleichgewicht!

- kleine Auslenkung um $x_1 \Rightarrow \quad F(x) \approx +\kappa(x - x_1)$ labiles Gleichgewicht