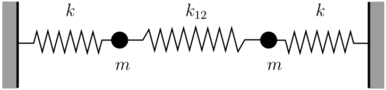
Beispiel: zwei gekoppelte Oszillatoren

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

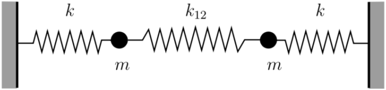


- generalisierte Koordinaten: q_k, $k = 1, 2$

  = Auslenkung der k-ten Masse aus der Gleichgewichtslage

Beispiel: zwei gekoppelte Oszillatoren

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

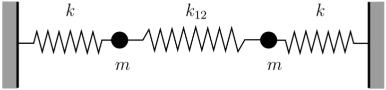


$$\Rightarrow \quad T = \frac{1}{2} m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2),$$

- generalisierte Koordinaten: q_k, $k = 1, 2$

  = Auslenkung der k-ten Masse aus der Gleichgewichtslage

Beispiel: zwei gekoppelte Oszillatoren



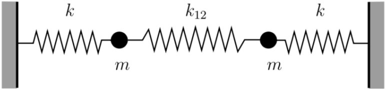
- generalisierte Koordinaten: q_k, $k = 1, 2$

  = Auslenkung der k-ten Masse aus der Gleichgewichtslage

$$\Rightarrow \quad T = \frac{1}{2} m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2), \qquad V = \frac{1}{2} k(q_1^2 + q_2^2) + \frac{1}{2} k_{12}(q_1 - q_2)^2$$

Beispiel: zwei gekoppelte Oszillatoren

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT



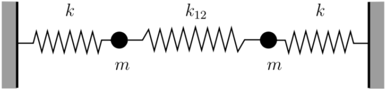
- generalisierte Koordinaten: q_k, $k = 1, 2$

  = Auslenkung der k-ten Masse aus der Gleichgewichtslage

$$\Rightarrow \quad T = \frac{1}{2} m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2), \qquad V = \frac{1}{2} k(q_1^2 + q_2^2) + \frac{1}{2} k_{12}(q_1 - q_2)^2$$

- Matrixnotation:
  - $T = \frac{1}{2}(\dot{q}_1, \dot{q}_2) \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix}$
  - $V = \frac{1}{2}(q_1, q_2) \begin{pmatrix} k + k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k + k_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$

Beispiel: zwei gekoppelte Oszillatoren



- generalisierte Koordinaten: q_k, $k = 1, 2$

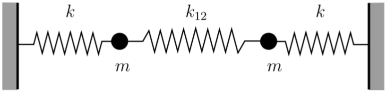
  = Auslenkung der k-ten Masse aus der Gleichgewichtslage

$$\Rightarrow \quad T = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2), \qquad V = \frac{1}{2}k(q_1^2 + q_2^2) + \frac{1}{2}k_{12}(q_1 - q_2)^2$$

- Matrixnotation:
  - $T = \frac{1}{2}(\dot{q}_1, \dot{q}_2)\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \quad \underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$
  - $V = \frac{1}{2}(q_1, q_2)\begin{pmatrix} k + k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k + k_{12} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \quad \underline{\underline{K}} = \begin{pmatrix} k + k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k + k_{12} \end{pmatrix}$

Beispiel: zwei gekoppelte Oszillatoren

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT



- generalisierte Koordinaten: $q_k,\ k = 1, 2$

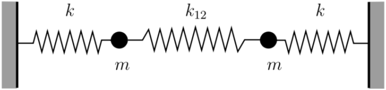
  = Auslenkung der k-ten Masse aus der Gleichgewichtslage

$$\Rightarrow \quad T = \frac{1}{2} m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2), \qquad V = \frac{1}{2} k(q_1^2 + q_2^2) + \frac{1}{2} k_{12}(q_1 - q_2)^2$$

- Matrixnotation:
  - $T = \frac{1}{2}(\dot{q}_1, \dot{q}_2) \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \quad \underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$
  - $V = \frac{1}{2}(q_1, q_2) \begin{pmatrix} k + k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k + k_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \quad \underline{\underline{K}} = \begin{pmatrix} k + k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k + k_{12} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad 0 = \det\left(\underline{\underline{K}} - \omega^2 \underline{\underline{M}}\right) = \det \begin{pmatrix} k + k_{12} - \omega^2 m & -k_{12} \\ -k_{12} & k + k_{12} - \omega^2 m \end{pmatrix}$$

Beispiel: zwei gekoppelte Oszillatoren



- generalisierte Koordinaten: q_k, $k = 1, 2$

  = Auslenkung der k-ten Masse aus der Gleichgewichtslage

$$\Rightarrow \quad T = \tfrac{1}{2} m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2), \qquad V = \tfrac{1}{2} k(q_1^2 + q_2^2) + \tfrac{1}{2} k_{12}(q_1 - q_2)^2$$

- Matrixnotation:
  - $T = \frac{1}{2}(\dot{q}_1, \dot{q}_2) \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \quad \underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$
  - $V = \frac{1}{2}(q_1, q_2) \begin{pmatrix} k + k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k + k_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \quad \underline{\underline{K}} = \begin{pmatrix} k + k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k + k_{12} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad 0 = \det\left(\underline{\underline{K}} - \omega^2 \underline{\underline{M}}\right) = \det \begin{pmatrix} k + k_{12} - \omega^2\, m & -k_{12} \\ -k_{12} & k + k_{12} - \omega^2\, m \end{pmatrix}$$

$$= (k + k_{12} - \omega^2\, m)^2 - k_{12}^2$$

- $(k + k_{12} - \omega^2 m)^2 - k_{12}^2 = 0$

- $(k + k_{12} - \omega^2\, m)^2 - k_{12}^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega^2\, m - k - k_{12} = \pm k_{12}$

- $(k + k_{12} - \omega^2\, m)^2 - k_{12}^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega^2\, m - k - k_{12} = \pm k_{12}$

  $\longrightarrow$ quadrierte Eigenfrequenzen: $\omega_1^2 = \frac{k}{m} \quad \omega_2^2 = \frac{k+2k_{12}}{m}$

- $(k + k_{12} - \omega^2 m)^2 - k_{12}^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 m - k - k_{12} = \pm k_{12}$

  → quadrierte Eigenfrequenzen: $\omega_1^2 = \frac{k}{m} \quad \omega_2^2 = \frac{k+2k_{12}}{m}$

- Einsetzen in die Eigenwertgleichung:

  - $\underline{\underline{K}}\tilde{q}^{(1)} = \omega_1^2 \underline{\underline{M}}\tilde{q}^{(1)}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} k + k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k + k_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{q}_1^{(1)} \\ \tilde{q}_2^{(1)} \end{pmatrix} = \frac{k}{m} \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{q}_1^{(1)} \\ \tilde{q}_2^{(1)} \end{pmatrix}$$

- $(k + k_{12} - \omega^2 m)^2 - k_{12}^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 m - k - k_{12} = \pm k_{12}$

  $\rightarrow$ quadrierte Eigenfrequenzen: $\omega_1^2 = \frac{k}{m} \quad \omega_2^2 = \frac{k+2k_{12}}{m}$

- Einsetzen in die Eigenwertgleichung:

  - $\underline{\underline{K}}\tilde{q}^{(1)} = \omega_1^2 \underline{\underline{M}}\tilde{q}^{(1)}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} k + k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k + k_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{q}_1^{(1)} \\ \tilde{q}_2^{(1)} \end{pmatrix} = \frac{k}{m} \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{q}_1^{(1)} \\ \tilde{q}_2^{(1)} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (k + k_{12})\tilde{q}_1^{(1)} - k_{12}\,\tilde{q}_2^{(1)} = k\tilde{q}_1^{(1)} \quad \Rightarrow \quad \tilde{q}_1^{(1)} = \tilde{q}_2^{(1)} \quad \Rightarrow \quad \tilde{q}^{(1)} = \mathcal{N}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $(k + k_{12} - \omega^2 m)^2 - k_{12}^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 m - k - k_{12} = \pm k_{12}$

  → quadrierte Eigenfrequenzen: $\omega_1^2 = \frac{k}{m} \qquad \omega_2^2 = \frac{k+2k_{12}}{m}$

- Einsetzen in die Eigenwertgleichung:

  - $\underline{\underline{K}}\tilde{q}^{(1)} = \omega_1^2 \underline{\underline{M}}\tilde{q}^{(1)}$

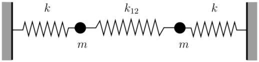
    $$\Rightarrow \begin{pmatrix} k + k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k + k_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{q}_1^{(1)} \\ \tilde{q}_2^{(1)} \end{pmatrix} = \frac{k}{m} \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{q}_1^{(1)} \\ \tilde{q}_2^{(1)} \end{pmatrix}$$

    $$\Rightarrow (k + k_{12})\tilde{q}_1^{(1)} - k_{12}\,\tilde{q}_2^{(1)} = k\tilde{q}_1^{(1)} \quad \Rightarrow \quad \tilde{q}_1^{(1)} = \tilde{q}_2^{(1)} \quad \Rightarrow \quad \tilde{q}^{(1)} = \mathcal{N}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  - $\underline{\underline{K}}\tilde{q}^{(2)} = \omega_2^2 \underline{\underline{M}}\tilde{q}^{(2)} \quad \Rightarrow \quad \ldots \quad \Rightarrow \quad \tilde{q}^{(2)} = \mathcal{N}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Interpretation

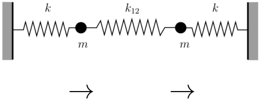
- $\tilde{q}^{(1)} \, e^{i\omega_1 t} = \mathcal{N}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\omega_1 t}, \qquad \omega_1^2 = \frac{k}{m}$



Interpretation

- $\tilde{q}^{(1)}\, e^{i\omega_1 t} = \mathcal{N}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\omega_1 t}, \qquad \omega_1^2 = \frac{k}{m}$

  $\rightarrow$ Massen schwingen gleichphasig

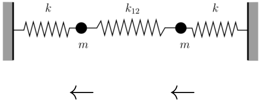


Interpretation

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

- $\tilde{q}^{(1)}\, e^{i\omega_1 t} = \mathcal{N}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\omega_1 t}, \qquad \omega_1^2 = \frac{k}{m}$

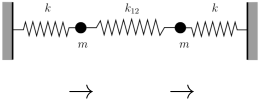
  → Massen schwingen gleichphasig



Interpretation

- $\tilde{q}^{(1)}\, e^{i\omega_1 t} = \mathcal{N}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\omega_1 t}, \qquad \omega_1^2 = \frac{k}{m}$

  → Massen schwingen gleichphasig



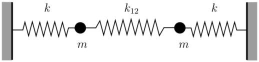
Interpretation

- $\tilde{q}^{(1)}\, e^{i\omega_1 t} = \mathcal{N}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\omega_1 t}, \qquad \omega_1^2 = \frac{k}{m}$

  → Massen schwingen gleichphasig

  $\Rightarrow$ Abstand bleibt konstant

  $\Rightarrow$ k_{12} für ω_1 irrelevant



$\rightarrow \qquad \rightarrow$

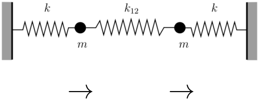
Interpretation

- $\tilde{q}^{(1)}\, e^{i\omega_1 t} = \mathcal{N}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\omega_1 t}, \qquad \omega_1^2 = \frac{k}{m}$

  $\longrightarrow$ Massen schwingen gleichphasig

  $\Rightarrow$ Abstand bleibt konstant

  $\Rightarrow$ k_{12} für ω_1 irrelevant

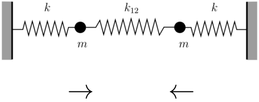


- $\tilde{q}^{(2)}\, e^{i\omega_2 t} = \mathcal{N}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{i\omega_2 t}, \qquad \omega_2^2 = \frac{k+2k_{12}}{m}$

  $\longrightarrow$ Massen schwingen gegenphasig

  $\Rightarrow$ Abstand ändert sich

  $\Rightarrow$ k_{12} geht in ω_2 ein



Interpretation

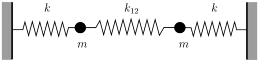
TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

- $\tilde{q}^{(1)}\, e^{i\omega_1 t} = \mathcal{N}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\omega_1 t}, \qquad \omega_1^2 = \frac{k}{m}$

  ➞ Massen schwingen gleichphasig

  $\Rightarrow$ Abstand bleibt konstant

  $\Rightarrow$ k_{12} für ω_1 irrelevant



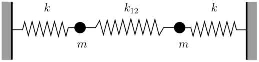
$\rightarrow \qquad \rightarrow$

- $\tilde{q}^{(2)}\, e^{i\omega_2 t} = \mathcal{N}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{i\omega_2 t}, \qquad \omega_2^2 = \frac{k+2k_{12}}{m}$

  ➞ Massen schwingen gegenphasig

  $\Rightarrow$ Abstand ändert sich

  $\Rightarrow$ k_{12} geht in ω_2 ein



$\leftarrow \qquad \rightarrow$

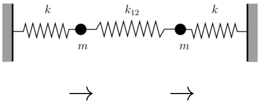
Interpretation

- $\tilde{q}^{(1)}\, e^{i\omega_1 t} = \mathcal{N}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\omega_1 t}, \qquad \omega_1^2 = \frac{k}{m}$

  $\rightarrow$ Massen schwingen gleichphasig

  $\Rightarrow$ Abstand bleibt konstant

  $\Rightarrow$ k_{12} für ω_1 irrelevant

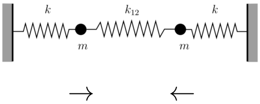


- $\tilde{q}^{(2)}\, e^{i\omega_2 t} = \mathcal{N}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{i\omega_2 t}, \qquad \omega_2^2 = \frac{k+2k_{12}}{m}$

  $\rightarrow$ Massen schwingen gegenphasig

  $\Rightarrow$ Abstand ändert sich

  $\Rightarrow$ k_{12} geht in ω_2 ein



- $\{\tilde{q}^{(j)}\}$ = orthogonale Basis für q $\quad \rightarrow \quad q(t) = \sum_{j=1}^{s} \eta_j(t)\, \tilde{q}^{(j)}$
  - $\eta_j(t)$: „Normalkoordinaten“

- $\{\tilde{q}^{(j)}\}$ = orthogonale Basis für q $\quad \rightarrow \quad q(t) = \sum_{j=1}^{s} \eta_j(t)\, \tilde{q}^{(j)}$
  - $\eta_j(t)$: „Normalkoordinaten“
- Lagrangefunktion:

$$L = \frac{1}{2} \left(\dot{q}^T \underline{\underline{M}}\, \dot{q} \;-\; q^T \underline{\underline{K}}\, q \right)$$

- $\{\tilde{q}^{(j)}\}$ = orthogonale Basis für q $\quad\rightarrow\quad q(t) = \sum_{j=1}^{s} \eta_j(t)\,\tilde{q}^{(j)}$
  - $\eta_j(t)$: „Normalkoordinaten"
- Lagrangefunktion:

$$L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}^T \underline{\underline{M}}\,\dot{q} - q^T \underline{\underline{K}}\,q\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s} \dot{\eta}_i(t)\dot{\eta}_j(t)\,\underbrace{\tilde{q}^{(i)\,T}\,\underline{\underline{M}}\,\tilde{q}^{(j)}}_{\delta_{ij}} - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s} \eta_i(t)\eta_j(t)\underbrace{\tilde{q}^{(i)\,T}\,\underline{\underline{K}}\,\tilde{q}^{(j)}}_{\omega_j^2\;\tilde{q}^{(i)\,T}\underline{\underline{M}}\;\tilde{q}^{(j)}\;=\;\omega_j^2\;\delta_{ij}}$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- $\{\tilde{q}^{(j)}\}$ = orthogonale Basis für q $\quad\rightarrow\quad$ $q(t) = \sum_{j=1}^{s} \eta_j(t)\, \tilde{q}^{(j)}$
  - $\eta_j(t)$: „Normalkoordinaten“
- Lagrangefunktion:

$$L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}^T \underline{\underline{M}}\, \dot{q} - q^T \underline{\underline{K}}\, q\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s} \dot{\eta}_i(t)\dot{\eta}_j(t)\, \underbrace{\tilde{q}^{(i)\,T}\, \underline{\underline{M}}\, \tilde{q}^{(j)}}_{\delta_{ij}} - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s} \eta_i(t)\eta_j(t) \underbrace{\tilde{q}^{(i)\,T}\, \underline{\underline{K}}\, \tilde{q}^{(j)}}_{\omega_j^2\; \tilde{q}^{(i)\,T} \underline{\underline{M}}\; \tilde{q}^{(j)} \,=\, \omega_j^2\, \delta_{ij}}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s}\left(\dot{\eta}_j^2(t) - \omega_j^2 \eta_j^2(t)\right)$$

- $\{\tilde{q}^{(j)}\}$ = orthogonale Basis für q $\quad\rightarrow\quad q(t) = \sum_{j=1}^{s} \eta_j(t)\, \tilde{q}^{(j)}$
  - $\eta_j(t)$: „Normalkoordinaten“
- Lagrangefunktion:

$$L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}^T \underline{\underline{M}}\, \dot{q} \;-\; q^T \underline{\underline{K}}\, q\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s} \dot{\eta}_i(t)\dot{\eta}_j(t)\, \underbrace{\tilde{q}^{(i)\,T}\, \underline{\underline{M}}\, \tilde{q}^{(j)}}_{\delta_{ij}} - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s} \eta_i(t)\eta_j(t) \underbrace{\tilde{q}^{(i)\,T}\, \underline{\underline{K}}\, \tilde{q}^{(j)}}_{\omega_j^2\, \tilde{q}^{(i)\,T} \underline{\underline{M}}\, \tilde{q}^{(j)} \,=\, \omega_j^2\, \delta_{ij}}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s} \left(\dot{\eta}_j^2(t) - \omega_j^2 \eta_j^2(t)\right)$$

s vollständig entkoppelte harmon. Oszillatoren!

- $\{\tilde{q}^{(j)}\}$ = orthogonale Basis für q $\quad\rightarrow\quad q(t) = \sum_{j=1}^{s} \eta_j(t)\, \tilde{q}^{(j)}$
  - $\eta_j(t)$: „Normalkoordinaten“
- Lagrangefunktion:

$$L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}^T \underline{\underline{M}}\, \dot{q} - q^T \underline{\underline{K}}\, q\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s} \dot{\eta}_i(t)\dot{\eta}_j(t)\, \underbrace{\tilde{q}^{(i)\,T}\, \underline{\underline{M}}\, \tilde{q}^{(j)}}_{\delta_{ij}} - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s} \eta_i(t)\eta_j(t) \underbrace{\tilde{q}^{(i)\,T}\, \underline{\underline{K}}\, \tilde{q}^{(j)}}_{\omega_j^2\ \tilde{q}^{(i)\,T}\underline{\underline{M}}\ \tilde{q}^{(j)} \,=\, \omega_j^2\ \delta_{ij}}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s}\left(\dot{\eta}_j^2(t) - \omega_j^2\eta_j^2(t)\right)$$ s vollständig entkoppelte harmon. Oszillatoren!

$\Rightarrow$ Bewegungsgleichungen: $\ddot{\eta}_j + \omega_j^2\eta_j = 0\ , \quad j = 1, \dots, s$

- $\{\tilde{q}^{(j)}\}$ = orthogonale Basis für q $\quad\rightarrow\quad q(t) = \sum_{j=1}^{s} \eta_j(t)\, \tilde{q}^{(j)}$
  - $\eta_j(t)$: „Normalkoordinaten“
- Lagrangefunktion:

$$L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}^T \underline{\underline{M}}\,\dot{q} - q^T \underline{\underline{K}}\, q\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s} \dot{\eta}_i(t)\dot{\eta}_j(t)\,\underbrace{\tilde{q}^{(i)\,T}\,\underline{\underline{M}}\,\tilde{q}^{(j)}}_{\delta_{ij}} - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s} \eta_i(t)\eta_j(t)\underbrace{\tilde{q}^{(i)\,T}\,\underline{\underline{K}}\,\tilde{q}^{(j)}}_{\omega_j^2\ \tilde{q}^{(i)\,T}\underline{\underline{M}}\ \tilde{q}^{(j)} = \omega_j^2\,\delta_{ij}}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s}\left(\dot{\eta}_j^2(t) - \omega_j^2\eta_j^2(t)\right)$$ s vollständig entkoppelte harmon. Oszillatoren!

$\Rightarrow$ Bewegungsgleichungen: $\quad \ddot{\eta}_j + \omega_j^2\eta_j = 0\,, \quad j = 1, \ldots, s$

$\Rightarrow$ Lösungen: $\quad \eta_j(t) = A_j\, \cos(\omega_j t + \varphi_j); \quad A_j, \varphi_j = const.$ $\quad$ (2s Anfangsbed.)

Teil II: Klassische Elektrodynamik

6. Elektrostatik
7. Magnetostatik
8. Elektro- und Magnetostatik in Materie
9. Elektrodynamik zeitlich veränderlicher Felder

6. Elektrostatik

6.1 Grundlagen:
Ladungen und das Coulomb-Gesetz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

6.1 Grundlagen: Ladungen und das Coulomb-Gesetz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Grundgrößen der Mechanik: Länge, Zeit, Masse

  zusätzlich in der Elektrostatik: Ladung

6.1 Grundlagen: Ladungen und das Coulomb-Gesetz

- Grundgrößen der Mechanik: Länge, Zeit, Masse
  zusätzlich in der Elektrostatik: Ladung
- analog zu den Punktmassen: Punktladungen q

6.1 Grundlagen: Ladungen und das Coulomb-Gesetz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Grundgrößen der Mechanik: Länge, Zeit, Masse
  zusätzlich in der Elektrostatik: Ladung
- analog zu den Punktmassen: Punktladungen q
- Elementarteilchen:
  - Elektron: $q_{e^-} = -e$, Positron: $q_{e^+} = +e$
  - Up-Quark: $q_u = \frac{2}{3}e$
  - Down-Quark: $q_d = -\frac{1}{3}e$
  - ...

  Elementarladung: $e = 1,602176634 \cdot 10^{-19}\mathrm{C}$

6.1 Grundlagen: Ladungen und das Coulomb-Gesetz

- Grundgrößen der Mechanik: Länge, Zeit, Masse
  zusätzlich in der Elektrostatik: Ladung
- analog zu den Punktmassen: Punktladungen q
- Elementarteilchen:
  - Elektron: $q_{e^-} = -e$, Positron: $q_{e^+} = +e$
  - Up-Quark: $q_u = \frac{2}{3}e$
  - Down-Quark: $q_d = -\frac{1}{3}e$
  - ...

  Elementarladung: $e = 1,602176634 \cdot 10^{-19}\mathrm{C}$
- makroskopische Körper:
  kontinuierliche Ladungsverteilung $\rightarrow$ Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$

- Gesamtladung: $Q = \sum_i q_i = \int_{\mathcal{V}} d^3r\, \rho(\vec{r})$

- Gesamtladung: $Q = \sum_i q_i = \int_{\mathcal{V}} d^3r\, \rho(\vec{r})$
- Punktladung q_i am Ort $\vec{r}^{\,(i)}$: $\rho_i(\vec{r}) = q_i\, \delta(\vec{r} - \vec{r}^{\,(i)})$

- Gesamtladung: $Q = \sum_i q_i = \int_{\mathcal{V}} d^3r\, \rho(\vec{r})$
- Punktladung q_i am Ort $\vec{r}^{\,(i)}$: $\rho_i(\vec{r}) = q_i\, \delta(\vec{r} - \vec{r}^{\,(i)})$
- δ-„Funktion“ (δ-Distribution):
  - $\int_a^b dx\, f(x)\, \delta(x - x_0) = \begin{cases} f(x_0) & \text{falls } x_0 \in (a, b) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
  - $\int_{\mathcal{V}} d^3r\, f(\vec{r})\, \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \begin{cases} f(\vec{r}_0) & \text{falls } \vec{r}_0 \in \mathcal{V} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

- Gesamtladung: $Q = \sum_i q_i = \int_{\mathcal{V}} d^3r\, \rho(\vec{r})$
- Punktladung q_i am Ort $\vec{r}^{\,(i)}$: $\rho_i(\vec{r}) = q_i\, \delta(\vec{r} - \vec{r}^{\,(i)})$
- δ-„Funktion“ (δ-Distribution):
  - $\int_a^b dx\, f(x)\, \delta(x - x_0) = \begin{cases} f(x_0) & \text{falls } x_0 \in (a, b) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
  - $\int_{\mathcal{V}} d^3r\, f(\vec{r})\, \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \begin{cases} f(\vec{r}_0) & \text{falls } \vec{r}_0 \in \mathcal{V} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
- mehrere Punktladungen: $\rho(\vec{r}) = \sum_i \rho_i(\vec{r}) = \sum_i q_i\, \delta(\vec{r} - \vec{r}^{\,(i)})$

$$\Rightarrow \quad Q = \int_{\mathcal{V}} d^3r \sum_i q_i\, \delta(\vec{r} - \vec{r}^{\,(i)}) = \sum_i q_i \int_{\mathcal{V}} d^3r\, \delta(\vec{r} - \vec{r}^{\,(i)}) = \sum_{\substack{i \\ \vec{r}^{\,(i)} \in \mathcal{V}}} q_i \quad \checkmark$$

- Gesamtladung: $Q = \sum_i q_i = \int_{\mathcal{V}} d^3r\, \rho(\vec{r})$
- Punktladung q_i am Ort $\vec{r}^{\,(i)}$: $\rho_i(\vec{r}) = q_i\, \delta(\vec{r} - \vec{r}^{\,(i)})$
- δ-„Funktion" (δ-Distribution):
  - $\int_a^b dx\, f(x)\, \delta(x - x_0) = \begin{cases} f(x_0) & \text{falls } x_0 \in (a, b) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
  - $\int_{\mathcal{V}} d^3r\, f(\vec{r})\, \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \begin{cases} f(\vec{r}_0) & \text{falls } \vec{r}_0 \in \mathcal{V} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
- mehrere Punktladungen: $\rho(\vec{r}) = \sum_i \rho_i(\vec{r}) = \sum_i q_i\, \delta(\vec{r} - \vec{r}^{\,(i)})$

$$\Rightarrow \quad Q = \int_{\mathcal{V}} d^3r \sum_i q_i\, \delta(\vec{r} - \vec{r}^{\,(i)}) = \sum_i q_i \int_{\mathcal{V}} d^3r\, \delta(\vec{r} - \vec{r}^{\,(i)}) = \sum_{\substack{i \\ \vec{r}^{\,(i)} \in \mathcal{V}}} q_i \quad \checkmark$$

- Gesamtladung Q = Erhaltungsgröße

  aber: Positive und negative Ladungen können sich gegenseitig aufheben.

Coulomb-Gesetz

Kraft einer ruhenden Punktladung q_j auf eine ruhende Punktladung q_i:

$$\vec{F}^{\,(ij)} = k\,\frac{q_i\,q_j}{r_{ij}^2}\,\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}, \qquad \vec{r}_{ij} = \vec{r}^{(i)} - \vec{r}^{(j)}, \quad k = const.$$

Coulomb-Gesetz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Kraft einer ruhenden Punktladung q_j auf eine ruhende Punktladung q_i:

$$\vec{F}^{\,(ij)} = k\,\frac{q_i\,q_j}{r_{ij}^2}\,\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}, \qquad \vec{r}_{ij} = \vec{r}^{(i)} - \vec{r}^{(j)}, \qquad k = const.$$

- fällt quadratisch mit dem Abstand ab: $\left|\vec{F}^{\,(ij)}\right| \propto \frac{1}{r_{ij}^2}$

Coulomb-Gesetz

Kraft einer ruhenden Punktladung q_j auf eine ruhende Punktladung q_i:

$$\vec{F}^{\,(ij)} = k\,\frac{q_i\,q_j}{r_{ij}^2}\,\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}, \qquad \vec{r}_{ij} = \vec{r}^{(i)} - \vec{r}^{(j)}, \qquad k = const.$$

- fällt quadratisch mit dem Abstand ab: $\left|\vec{F}^{\,(ij)}\right| \propto \frac{1}{r_{ij}^2}$
- Richtung entlang der Verbindungslinie
  - gleiche Vorzeichen ($q_i q_j > 0$): abstoßende Kraft
  - ungleiche Vorzeichen ($q_i q_j < 0$): anziehende Kraft

$\Rightarrow \quad k > 0$

Coulomb-Gesetz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Kraft einer ruhenden Punktladung q_j auf eine ruhende Punktladung q_i:

$$\vec{F}^{\,(ij)} = k\,\frac{q_i\,q_j}{r_{ij}^2}\,\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}, \qquad \vec{r}_{ij} = \vec{r}^{(i)} - \vec{r}^{(j)}, \qquad k = const.$$

- fällt quadratisch mit dem Abstand ab: $\left|\vec{F}^{\,(ij)}\right| \propto \frac{1}{r_{ij}^2}$
- Richtung entlang der Verbindungslinie
  - gleiche Vorzeichen ($q_i q_j > 0$): abstoßende Kraft
  - ungleiche Vorzeichen ($q_i q_j < 0$): anziehende Kraft

$\Rightarrow \quad k > 0$

- $\vec{F}^{\,(ij)} = -\vec{F}^{\,(ji)}$ („*actio = reactio*“)

Coulomb-Gesetz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Kraft einer ruhenden Punktladung q_j auf eine ruhende Punktladung q_i:

$$\vec{F}^{(ij)} = k \, \frac{q_i \, q_j}{r_{ij}^2} \, \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}, \qquad \vec{r}_{ij} = \vec{r}^{(i)} - \vec{r}^{(j)}, \quad k = const.$$

- fällt quadratisch mit dem Abstand ab: $\left|\vec{F}^{(ij)}\right| \propto \frac{1}{r_{ij}^2}$
- Richtung entlang der Verbindungslinie
  - gleiche Vorzeichen ($q_i q_j > 0$): abstoßende Kraft
  - ungleiche Vorzeichen ($q_i q_j < 0$): anziehende Kraft

$\Rightarrow \quad k > 0$

- $\vec{F}^{(ij)} = -\vec{F}^{(ji)}$ („*actio* = *reactio*“)
- Wie groß ist k?

1. Variante

- Setze $k = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left|\vec{F}^{\,(ij)}\right| = \frac{q_i\, q_j}{r_{ij}^2}$ und definiere so die Einheit der Ladung

1. Variante

- Setze $k = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left|\vec{F}^{\,(ij)}\right| = \frac{q_i\, q_j}{r_{ij}^2}$ und definiere so die Einheit der Ladung

  $\Rightarrow \quad [q^2] = [F\, r^2] = 1\,\mathrm{N\,m^2} = 1\,\mathrm{kg\,m^3\,s^{-2}} \quad \Rightarrow \quad [q] = 1\,\mathrm{kg^{1/2}\,m^{3/2}\,s^{-1}}$

1. Variante

- Setze $k = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left|\vec{F}^{\,(ij)}\right| = \frac{q_i\, q_j}{r_{ij}^2}$ und definiere so die Einheit der Ladung

  $\Rightarrow \quad [q^2] = [F\, r^2] = 1\,\mathrm{N\,m^2} = 1\,\mathrm{kg\,m^3\,s^{-2}} \quad \Rightarrow \quad [q] = 1\,\mathrm{kg^{1/2}\,m^{3/2}\,s^{-1}}$

→ Zwei Ladungen $q = 1\,\mathrm{kg^{1/2}\,m^{3/2}\,s^{-1}}$ üben im Abstand 1 m auf einander die Kraft 1 N aus.

1. Variante

- Setze $k = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |\vec{F}^{\,(ij)}| = \frac{q_i\, q_j}{r_{ij}^2}$ und definiere so die Einheit der Ladung

  $\Rightarrow \quad [q^2] = [F\, r^2] = 1\,\mathrm{N\,m^2} = 1\,\mathrm{kg\,m^3\,s^{-2}} \quad \Rightarrow \quad [q] = 1\,\mathrm{kg^{1/2}\,m^{3/2}\,s^{-1}}$

→ Zwei Ladungen $q = 1\,\mathrm{kg^{1/2}\,m^{3/2}\,s^{-1}}$ üben im Abstand 1 m auf einander die Kraft 1 N aus.

- Gauß'sches Einheitensystem: analog mit g und cm

  (beliebt in der Theoretischen Physik)

2. Variante: SI-Einheiten (werden in dieser Vorlesung verwendet)

2. Variante: SI-Einheiten (werden in dieser Vorlesung verwendet)

- Definiere zunächst die Ladung und bestimme *k* durch Messung der Kraft

2. Variante: SI-Einheiten (werden in dieser Vorlesung verwendet)

- Definiere zunächst die Ladung und bestimme k durch Messung der Kraft
- $[q] = 1\,\mathrm{C}$ (Coulomb)

2. Variante: SI-Einheiten (werden in dieser Vorlesung verwendet)

- Definiere zunächst die Ladung und bestimme k durch Messung der Kraft
- $[q] = 1\,\mathrm{C}$ (Coulomb)
- seit 20. Mai 2019: über die Elementarladung

$$e = 1{,}602176634 \cdot 10^{-19}\mathrm{C} \qquad \text{(exakt festgelegt)}$$

2. Variante: SI-Einheiten (werden in dieser Vorlesung verwendet)

- Definiere zunächst die Ladung und bestimme k durch Messung der Kraft
- $[q] = 1\,\mathrm{C}$ (Coulomb)
- seit 20. Mai 2019: über die Elementarladung

  $$e = 1,602176634 \cdot 10^{-19}\mathrm{C} \qquad \text{(exakt festgelegt)}$$

- davor: indirekt über die Stromstärke
  - $1\,\mathrm{C} = 1\,\mathrm{A} \cdot \mathrm{s}$
  - 1 A (Ampere) = Stromstärke, bei der zwei parallel im Abstand 1 m angeordnete geradlinige, unendlich lange, unendlich dünne Leiter im Vakuum auf einander pro Meter Leiterlänge die magnetische Kraft $2 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{N}$ ausüben.

- Messung der Coulomb-Kraft: $k = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}$

mit $\varepsilon_0 = 8,854\ldots \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{Nm}^2}$ (elektr. Feldkonstante, Influenzkonstante)

- Messung der Coulomb-Kraft: $k = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}$

mit $\varepsilon_0 = 8,854\ldots \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{Nm}^2}$ (elektr. Feldkonstante, Influenzkonstante)

$\Rightarrow$ Coulomb-Gesetz: $\boxed{\vec{F}^{\,(ij)} = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{q_i\,q_j}{r_{ij}^2}\,\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}}$

- Messung der Coulomb-Kraft: $k = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}$

  mit $\varepsilon_0 = 8,854\ldots \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{Nm}^2}$ (elektr. Feldkonstante, Influenzkonstante)

  $\Rightarrow$ Coulomb-Gesetz: $$\boxed{\vec{F}^{\,(ij)} = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{q_i\,q_j}{r_{ij}^2}\,\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}}$$

- Vergleich mit Gravitationsgesetz: $-Gm_1\,m_2 \leftrightarrow \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}q_1\,q_2$

- Messung der Coulomb-Kraft: $k = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}$

  mit $\varepsilon_0 = 8,854\ldots \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{Nm}^2}$ (elektr. Feldkonstante, Influenzkonstante)

  $\Rightarrow$ Coulomb-Gesetz: $$\boxed{\vec{F}^{(ij)} = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{q_i\,q_j}{r_{ij}^2}\,\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}}$$

- Vergleich mit Gravitationsgesetz: $-Gm_1\,m_2 \leftrightarrow \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}q_1\,q_2$
  - Unterschiede:
    - positive und negative Ladungen
    - gilt nur für ruhende Ladungen!

- Messung der Coulomb-Kraft: $k = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}$

  mit $\varepsilon_0 = 8,854\ldots \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{Nm}^2}$ (elektr. Feldkonstante, Influenzkonstante)

  $\Rightarrow$ Coulomb-Gesetz: $\boxed{\vec{F}^{(ij)} = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{q_i\,q_j}{r_{ij}^2}\,\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}}$

- Vergleich mit Gravitationsgesetz: $-Gm_1\,m_2 \leftrightarrow \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\,q_1\,q_2$
  - Unterschiede:
    - positive und negative Ladungen
    - gilt nur für ruhende Ladungen!
  - weitere Gemeinsamkeit: Superpositionsprinzip

    $\rightarrow$ mehrere Ladungen: $\vec{F}^{(i)} = \sum_{j\neq i}\vec{F}^{(ij)} = \frac{q_i}{4\pi\,\varepsilon_0}\sum_{j\neq i}\frac{q_j}{r_{ij}^2}\,\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}$

6.2 Das elektrische Feld

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

6.2 Das elektrische Feld

- Coulomb-Gesetz: $\vec{F}^{\,(i)} = \frac{q_i}{4\pi\,\varepsilon_0} \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{r_{ij}^2} \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}$

6.2 Das elektrische Feld

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Coulomb-Gesetz: $\vec{F}^{(i)} = \frac{q_i}{4\pi\,\varepsilon_0} \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{r_{ij}^2} \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}} \equiv q_i\, \vec{E}^{(\hat{i})}(\vec{r}^{\,(i)})$

mit $\vec{E}^{(\hat{i})}(\vec{r}^{\,(i)}) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{r_{ij}^2} \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}$

= von allen anderen Ladungen am Ort $\vec{r}^{\,(i)}$ erzeugtes elektrisches Feld

6.2 Das elektrische Feld

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Coulomb-Gesetz: $\vec{F}^{\,(i)} = \frac{q_i}{4\pi\,\varepsilon_0} \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{r_{ij}^2} \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}} \equiv q_i\,\vec{E}^{\,(\hat{i})}(\vec{r}^{\,(i)})$

  mit $\quad \vec{E}^{\,(\hat{i})}(\vec{r}^{\,(i)}) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{r_{ij}^2} \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}$

  = von allen anderen Ladungen am Ort $\vec{r}^{\,(i)}$ erzeugtes elektrisches Feld

- Interpretation:

  Die Ladungen q_j erzeugen im gesamten Raum unabhängig von q_i ein Feld, auf das die Ladung q_i am Ort $\vec{r}^{\,(i)}$ lokal reagiert.

6.2 Das elektrische Feld

- Coulomb-Gesetz: $\vec{F}^{(i)} = \frac{q_i}{4\pi\,\varepsilon_0} \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{r_{ij}^2} \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}} \equiv q_i\, \vec{E}^{(\hat{i})}(\vec{r}^{\,(i)})$

  mit $\vec{E}^{(\hat{i})}(\vec{r}^{\,(i)}) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{r_{ij}^2} \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}$

  = von allen anderen Ladungen am Ort $\vec{r}^{\,(i)}$ erzeugtes elektrisches Feld

- Interpretation:

  Die Ladungen q_j erzeugen im gesamten Raum unabhängig von q_i ein Feld, auf das die Ladung q_i am Ort $\vec{r}^{\,(i)}$ lokal reagiert.

- von q_j erzeugtes elektrisches Feld: $\vec{E}_j(\vec{r}) = \frac{q_j}{4\pi\,\varepsilon_0} \frac{\vec{r}-\vec{r}^{\,(j)}}{|\vec{r}-\vec{r}^{\,(j)}|^3}$

6.2 Das elektrische Feld

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Coulomb-Gesetz: $\vec{F}^{(i)} = \frac{q_i}{4\pi\,\varepsilon_0} \sum_{j\neq i} \frac{q_j}{r_{ij}^2}\,\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}} \equiv q_i\,\vec{E}^{(\hat{\imath})}(\vec{r}^{\,(i)})$

  mit $\vec{E}^{(\hat{\imath})}(\vec{r}^{\,(i)}) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \sum_{j\neq i} \frac{q_j}{r_{ij}^2}\,\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}$

  = von allen anderen Ladungen am Ort $\vec{r}^{\,(i)}$ erzeugtes elektrisches Feld

- Interpretation:

  Die Ladungen q_j erzeugen im gesamten Raum unabhängig von q_i ein Feld, auf das die Ladung q_i am Ort $\vec{r}^{\,(i)}$ lokal reagiert.

- von q_j erzeugtes elektrisches Feld: $\vec{E}_j(\vec{r}) = \frac{q_j}{4\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{\vec{r}-\vec{r}^{\,(j)}}{|\vec{r}-\vec{r}^{\,(j)}|^3}$

  $\Rightarrow$ Gesamtfeld: $\vec{E}(\vec{r}) = \sum_j \vec{E}_j(\vec{r})$ (einschließlich q_i)

6.2 Das elektrische Feld

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Coulomb-Gesetz: $\vec{F}^{(i)} = \frac{q_i}{4\pi\,\varepsilon_0} \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{r_{ij}^2} \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}} \equiv q_i\, \vec{E}^{(\hat{i})}(\vec{r}^{(i)})$

  mit $\vec{E}^{(\hat{i})}(\vec{r}^{(i)}) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{r_{ij}^2} \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}$

  = von allen anderen Ladungen am Ort $\vec{r}^{(i)}$ erzeugtes elektrisches Feld

- Interpretation:

  Die Ladungen q_j erzeugen im gesamten Raum unabhängig von q_i ein Feld, auf das die Ladung q_i am Ort $\vec{r}^{(i)}$ lokal reagiert.

- von q_j erzeugtes elektrisches Feld: $\vec{E}_j(\vec{r}) = \frac{q_j}{4\pi\,\varepsilon_0} \frac{\vec{r}-\vec{r}^{(j)}}{|\vec{r}-\vec{r}^{(j)}|^3}$

  $\Rightarrow$ Gesamtfeld: $\vec{E}(\vec{r}) = \sum_j \vec{E}_j(\vec{r})$ (einschließlich q_i)

- mathematisch sauberer: infinitesimale „Testladung“ $q > 0$ $\rightarrow$ $\vec{E}(\vec{r}) = \lim_{q \to 0} \frac{\vec{F}}{q}$

6.2 Das elektrische Feld

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Coulomb-Gesetz: $\vec{F}^{\,(i)} = \frac{q_i}{4\pi\,\varepsilon_0} \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{r_{ij}^2} \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}} \equiv q_i\, \vec{E}^{\,(\hat{i})}(\vec{r}^{\,(i)})$

  mit $\vec{E}^{\,(\hat{i})}(\vec{r}^{\,(i)}) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{r_{ij}^2} \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}$

  = von allen anderen Ladungen am Ort $\vec{r}^{\,(i)}$ erzeugtes elektrisches Feld

- Interpretation:

  Die Ladungen q_j erzeugen im gesamten Raum unabhängig von q_i ein Feld, auf das die Ladung q_i am Ort $\vec{r}^{\,(i)}$ lokal reagiert.

- von q_j erzeugtes elektrisches Feld: $\vec{E}_j(\vec{r}) = \frac{q_j}{4\pi\,\varepsilon_0} \frac{\vec{r}-\vec{r}^{\,(j)}}{|\vec{r}-\vec{r}^{\,(j)}|^3}$

  $\Rightarrow$ Gesamtfeld: $\vec{E}(\vec{r}) = \sum_j \vec{E}_j(\vec{r})$ (einschließlich q_i)

- mathematisch sauberer: infinitesimale „Testladung“ $q > 0 \rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \lim_{q \to 0} \frac{\vec{F}}{q}$

- Dimension: $[\vec{E}] = 1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$

6.2 Das elektrische Feld

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Coulomb-Gesetz: $\vec{F}^{(i)} = \frac{q_i}{4\pi\,\varepsilon_0} \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{r_{ij}^2} \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}} \equiv q_i\,\vec{E}^{(\hat{i})}(\vec{r}^{(i)})$

  mit $\vec{E}^{(\hat{i})}(\vec{r}^{(i)}) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{r_{ij}^2} \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}$

  = von allen anderen Ladungen am Ort $\vec{r}^{(i)}$ erzeugtes elektrisches Feld

- Interpretation:

  Die Ladungen q_j erzeugen im gesamten Raum unabhängig von q_i ein Feld, auf das die Ladung q_i am Ort $\vec{r}^{(i)}$ lokal reagiert.

- von q_j erzeugtes elektrisches Feld: $\vec{E}_j(\vec{r}) = \frac{q_j}{4\pi\,\varepsilon_0} \frac{\vec{r}-\vec{r}^{(j)}}{|\vec{r}-\vec{r}^{(j)}|^3}$

  $\Rightarrow$ Gesamtfeld: $\vec{E}(\vec{r}) = \sum_j \vec{E}_j(\vec{r})$ (einschließlich q_i)

- mathematisch sauberer: infinitesimale „Testladung“ $q > 0$ $\rightarrow$ $\vec{E}(\vec{r}) = \lim_{q \to 0} \frac{\vec{F}}{q}$

- Dimension: $[\vec{E}] = 1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} = 1\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$, $\quad 1\,\mathrm{V} = \frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{C}}$ (Volt)