Feldlinien

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- $\vec{E}(\vec{r})$ = Vektorfeld: Jedem Raumpunkt wird ein Vektor zugeordnet

Feldlinien

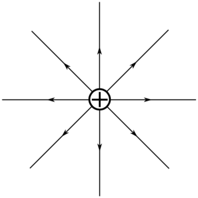
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

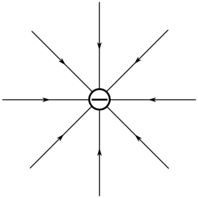
- $\vec{E}(\vec{r})$ = Vektorfeld: Jedem Raumpunkt wird ein Vektor zugeordnet
- Veranschaulichung: Feldlinien tangential zur Richtung von $\vec{E}(\vec{r})$

Feldlinien

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

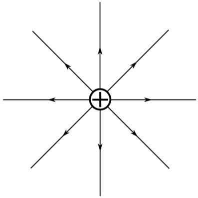
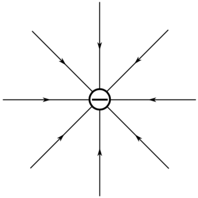
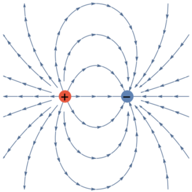
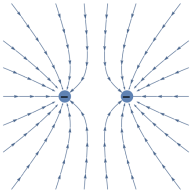
- $\vec{E}(\vec{r})$ = Vektorfeld: Jedem Raumpunkt wird ein Vektor zugeordnet
- Veranschaulichung: Feldlinien tangential zur Richtung von $\vec{E}(\vec{r})$
- Beispiele:





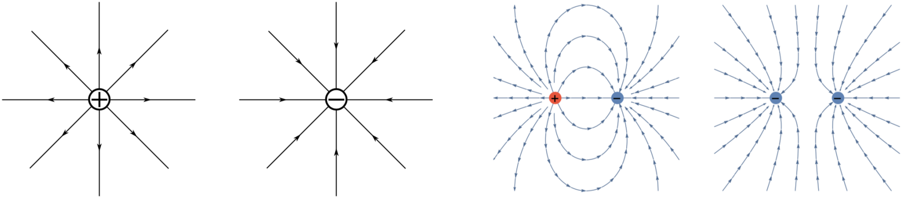
Feldlinien

- $\vec{E}(\vec{r})$ = Vektorfeld: Jedem Raumpunkt wird ein Vektor zugeordnet
- Veranschaulichung: Feldlinien tangential zur Richtung von $\vec{E}(\vec{r})$
- Beispiele:

Feldlinien

- $\vec{E}(\vec{r})$ = Vektorfeld: Jedem Raumpunkt wird ein Vektor zugeordnet
- Veranschaulichung: Feldlinien tangential zur Richtung von $\vec{E}(\vec{r})$
- Beispiele:



- Feld eindeutig (außer bei den Ladungen) $\Rightarrow$ Feldlinien schneiden sich nicht.

- N Punktladungen: $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \sum_{j=1}^{N} q_j \, \frac{\vec{r}-\vec{r}^{\,(j)}}{|\vec{r}-\vec{r}^{\,(j)}|^3}$

- N Punktladungen: $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \sum_{j=1}^{N} q_j \, \frac{\vec{r}-\vec{r}^{\,(j)}}{|\vec{r}-\vec{r}^{\,(j)}|^3}$

  → kontinuierliche Ladungsverteilung: $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \int d^3r' \, \rho(\vec{r}^{\,\prime}) \, \frac{\vec{r}-\vec{r}^{\,\prime}}{|\vec{r}-\vec{r}^{\,\prime}|^3}$

- N Punktladungen: $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \sum_{j=1}^{N} q_j \, \frac{\vec{r}-\vec{r}^{\,(j)}}{|\vec{r}-\vec{r}^{\,(j)}|^3}$

  $\to$ kontinuierliche Ladungsverteilung: $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \int d^3r' \, \rho(\vec{r}^{\,\prime}) \, \frac{\vec{r}-\vec{r}^{\,\prime}}{|\vec{r}-\vec{r}^{\,\prime}|^3}$

- Es gilt: $\frac{\vec{r}-\vec{r}^{\,\prime}}{|\vec{r}-\vec{r}^{\,\prime}|^3} = -\vec{\nabla}_{\vec{r}} \, \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}^{\,\prime}|}$ (zumindest für $\vec{r} \neq \vec{r}^{\,\prime}$)

- N Punktladungen: $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \sum_{j=1}^{N} q_j \, \frac{\vec{r}-\vec{r}^{\,(j)}}{|\vec{r}-\vec{r}^{\,(j)}|^3}$

  $\rightarrow$ kontinuierliche Ladungsverteilung: $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \int d^3r' \, \rho(\vec{r}\,') \, \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$

- Es gilt: $\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} = -\vec{\nabla}_{\vec{r}} \, \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$ (zumindest für $\vec{r} \neq \vec{r}'$)

  $\rightarrow$ $\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r})}$

  mit $\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \int d^3r' \, \rho(\vec{r}\,') \, \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$ „elektrostatisches Potenzial“

  (sauberer Beweis: Abschnitt 6.3)

- *N* Punktladungen: $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \sum_{j=1}^{N} q_j \, \frac{\vec{r}-\vec{r}^{\,(j)}}{|\vec{r}-\vec{r}^{\,(j)}|^3}$

  → kontinuierliche Ladungsverteilung: $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \int d^3r' \, \rho(\vec{r}\,') \, \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$

- Es gilt: $\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} = -\vec{\nabla}_{\vec{r}} \, \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$ (zumindest für $\vec{r} \neq \vec{r}\,'$)

  → $\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r})}$

  mit $\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \int d^3r' \, \rho(\vec{r}\,') \, \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$ „elektrostatisches Potenzial“

  (sauberer Beweis: Abschnitt 6.3)

- Kraftfeld: $\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r}) \quad \Rightarrow \quad \vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$ mit $V(\vec{r}) = q\phi(\vec{r})$

- *N* Punktladungen: $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \sum_{j=1}^{N} q_j \, \frac{\vec{r}-\vec{r}^{\,(j)}}{|\vec{r}-\vec{r}^{\,(j)}|^3}$

  → kontinuierliche Ladungsverteilung: $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \int d^3r' \, \rho(\vec{r}\,') \, \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$

- Es gilt: $\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} = -\vec{\nabla}_{\vec{r}} \, \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$ (zumindest für $\vec{r} \neq \vec{r}\,'$)

  → $\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r})}$

  mit $\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \int d^3r' \, \rho(\vec{r}\,') \, \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$ „elektrostatisches Potenzial“

  (sauberer Beweis: Abschnitt 6.3)

- Kraftfeld: $\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r}) \quad \Rightarrow \quad \vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r})$ mit $V(\vec{r}) = q\phi(\vec{r})$
  - V: potenzielle Energie
  - ϕ: Potenzial

- wie gehabt: $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r}) \;\Rightarrow\; \vec{\nabla} \times \vec{F} = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} V = \vec{0} \;\Rightarrow\;$ $\vec{F}$ konservativ

- wie gehabt: $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r}) \;\Rightarrow\; \vec{\nabla} \times \vec{F} = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} V = \vec{0} \;\Rightarrow\;$ $\vec{F}$ konservativ
- analog: $\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) \;\Rightarrow\; \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\phi = \vec{0}$

- wie gehabt: $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r}) \;\Rightarrow\; \vec{\nabla} \times \vec{F} = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} V = \vec{0} \;\Rightarrow\;$ $\vec{F}$ konservativ
- analog: $\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) \;\Rightarrow\; \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\phi = \vec{0}$

  $\Rightarrow \int\limits_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}\,' \cdot \vec{E}(\vec{r}\,') = -\big(\phi(\vec{r}) - \phi(\vec{r}_0)\big)$ wegunabhängig

- wie gehabt: $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r}) \;\Rightarrow\; \vec{\nabla} \times \vec{F} = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} V = \vec{0} \;\Rightarrow\;$ $\vec{F}$ konservativ
- analog: $\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) \;\Rightarrow\; \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\phi = \vec{0}$

$$\Rightarrow \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}\,' \cdot \vec{E}(\vec{r}\,') = -\big(\phi(\vec{r}) - \phi(\vec{r}_0)\big) = -U(\vec{r}, \vec{r}_0)$$ wegunabhängig

$U(\vec{r}, \vec{r}_0) \equiv \phi(\vec{r}) - \phi(\vec{r}_0)$ „Spannung“ $\quad [U] = 1\,\mathrm{V}$

- wie gehabt: $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r}) \;\Rightarrow\; \vec{\nabla} \times \vec{F} = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} V = \vec{0} \;\Rightarrow\;$ $\vec{F}$ konservativ
- analog: $\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) \;\Rightarrow\; \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\phi = \vec{0}$

  $$\Rightarrow \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}\,' \cdot \vec{E}(\vec{r}\,') = -\big(\phi(\vec{r}) - \phi(\vec{r}_0)\big) = -U(\vec{r}, \vec{r}_0)$$ wegunabhängig

  $U(\vec{r}, \vec{r}_0) \equiv \phi(\vec{r}) - \phi(\vec{r}_0)$ „Spannung“ $\quad [U] = 1\,\mathrm{V}$
- $\phi' = \phi + const \;\Rightarrow\; \vec{E}'(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi'(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r})$

  ➞ $\phi(\vec{r})$ ist nur bis auf eine Konstante eindeutig („Eichfreiheit“)

- wie gehabt: $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r}) \;\Rightarrow\; \vec{\nabla} \times \vec{F} = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} V = \vec{0} \;\Rightarrow\;$ $\vec{F}$ konservativ

- analog: $\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) \;\Rightarrow\; \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\phi = \vec{0}$

  $\Rightarrow \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}\,' \cdot \vec{E}(\vec{r}\,') = -\big(\phi(\vec{r}) - \phi(\vec{r}_0)\big) = -U(\vec{r}, \vec{r}_0)$ wegunabhängig

  $U(\vec{r}, \vec{r}_0) \equiv \phi(\vec{r}) - \phi(\vec{r}_0)$ „Spannung“ $[U] = 1\,\mathrm{V}$

- $\phi' = \phi + const \;\Rightarrow\; \vec{E}'(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi'(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r})$

  ➞ $\phi(\vec{r})$ ist nur bis auf eine Konstante eindeutig („Eichfreiheit“)

  $U'(\vec{r}, \vec{r}_0) = U(\vec{r}, \vec{r}_0)$ eindeutig!

6.3 Maxwell-Gleichungen der Elektrostatik

6.3 Maxwell-Gleichungen der Elektrostatik

Betrachte allgemeines Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$

6.3 Maxwell-Gleichungen der Elektrostatik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Betrachte allgemeines Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$

- Fluss des Feldes durch die Oberfläche $\partial\mathcal{V}$ eines Volumens $\mathcal{V}$:

$$\Phi \equiv \int\limits_{\partial\mathcal{V}} d\vec{\sigma} \cdot \vec{A}(\vec{r}) \stackrel{\text{Gauß}}{=} \int\limits_{\mathcal{V}} d^3r \,\mathrm{div}\, \vec{A}(\vec{r})$$

6.3 Maxwell-Gleichungen der Elektrostatik

Betrachte allgemeines Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$

- Fluss des Feldes durch die Oberfläche $\partial\mathcal{V}$ eines Volumens $\mathcal{V}$:

$$\Phi \equiv \int_{\partial\mathcal{V}} d\vec{\sigma} \cdot \vec{A}(\vec{r}) \overset{\text{Gauß}}{=} \int_{\mathcal{V}} d^3r \, \mathrm{div}\, \vec{A}(\vec{r})$$

$\Rightarrow$ $\mathrm{div}\, \vec{A}(\vec{r}) \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r})$ = Maß für die Quellstärke am Ort $\vec{r}$

6.3 Maxwell-Gleichungen der Elektrostatik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Betrachte allgemeines Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$

- Fluss des Feldes durch die Oberfläche $\partial\mathcal{V}$ eines Volumens $\mathcal{V}$:

  $$\Phi \equiv \int_{\partial\mathcal{V}} d\vec{\sigma} \cdot \vec{A}(\vec{r}) \overset{\text{Gauß}}{=} \int_{\mathcal{V}} d^3r \,\mathrm{div}\, \vec{A}(\vec{r})$$

  $\Rightarrow$ $\mathrm{div}\, \vec{A}(\vec{r}) \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r})$ = Maß für die Quellstärke am Ort $\vec{r}$

- Zirkulation des Feldes entlang eines geschlossenen Weges $\partial\mathcal{S}$ (= Rand einer Fläche $\mathcal{S}$):

  $$\Gamma \equiv \oint_{\partial\mathcal{S}} d\vec{r} \cdot \vec{A}(\vec{r}) \overset{\text{Stokes}}{=} \int_{\mathcal{S}} d\vec{\sigma} \cdot \mathrm{rot}\, \vec{A}(\vec{r})$$

6.3 Maxwell-Gleichungen der Elektrostatik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Betrachte allgemeines Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$

- Fluss des Feldes durch die Oberfläche $\partial\mathcal{V}$ eines Volumens $\mathcal{V}$:

  $$\Phi \equiv \int_{\partial\mathcal{V}} d\vec{\sigma} \cdot \vec{A}(\vec{r}) \overset{\text{Gauß}}{=} \int_{\mathcal{V}} d^3r \, \mathrm{div}\, \vec{A}(\vec{r})$$

  $\Rightarrow$ $\mathrm{div}\, \vec{A}(\vec{r}) \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r})$ = Maß für die Quellstärke am Ort $\vec{r}$

- Zirkulation des Feldes entlang eines geschlossenen Weges $\partial\mathcal{S}$ (= Rand einer Fläche $\mathcal{S}$):

  $$\Gamma \equiv \oint_{\partial\mathcal{S}} d\vec{r} \cdot \vec{A}(\vec{r}) \overset{\text{Stokes}}{=} \int_{\mathcal{S}} d\vec{\sigma} \cdot \mathrm{rot}\, \vec{A}(\vec{r})$$

  $\Rightarrow$ $\mathrm{rot}\, \vec{A}(\vec{r}) \equiv \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})$ = Maß für die Wirbelstärke am Ort $\vec{r}$

6.3 Maxwell-Gleichungen der Elektrostatik

Betrachte allgemeines Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$

- Fluss des Feldes durch die Oberfläche $\partial\mathcal{V}$ eines Volumens $\mathcal{V}$:

  $$\Phi \equiv \int_{\partial\mathcal{V}} d\vec{\sigma}\cdot\vec{A}(\vec{r}) \overset{\text{Gauß}}{=} \int_{\mathcal{V}} d^3r\,\mathrm{div}\,\vec{A}(\vec{r})$$

  $\Rightarrow$ $\mathrm{div}\,\vec{A}(\vec{r}) \equiv \vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{r})$ = Maß für die Quellstärke am Ort $\vec{r}$

- Zirkulation des Feldes entlang eines geschlossenen Weges $\partial\mathcal{S}$ (= Rand einer Fläche $\mathcal{S}$):

  $$\Gamma \equiv \oint_{\partial\mathcal{S}} d\vec{r}\cdot\vec{A}(\vec{r}) \overset{\text{Stokes}}{=} \int_{\mathcal{S}} d\vec{\sigma}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{A}(\vec{r})$$

  $\Rightarrow$ $\mathrm{rot}\,\vec{A}(\vec{r}) \equiv \vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r})$ = Maß für die Wirbelstärke am Ort $\vec{r}$

- Theorem: *Vektorfelder, die hinreichend schnell im Unendlichen verschwinden, lassen eindeutig aus ihren Quellen und Wirbeln rekonstruieren.*

Ziel: Bestimme div $\vec{E}$ und rot $\vec{E}$

Ziel: Bestimme div $\vec{E}$ und rot $\vec{E}$

- rot $\vec{E} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\phi = \vec{0}$

Ziel: Bestimme div $\vec{E}$ und rot $\vec{E}$

- rot $\vec{E} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\phi = \vec{0}$
- div $\vec{E} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\phi = -\triangle\,\phi$
  - Laplace-Operator: $\triangle = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

Ziel: Bestimme div $\vec{E}$ und rot $\vec{E}$

- rot $\vec{E} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\phi = \vec{0}$
- div $\vec{E} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\phi = -\triangle\,\phi$
  - Laplace-Operator: $\triangle = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\,\triangle \int d^3r'\,\rho(\vec{r}\,')\,\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -\frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\int d^3r'\,\rho(\vec{r}\,')\,\triangle_{\vec{r}}\,\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

Ziel: Bestimme div $\vec{E}$ und rot $\vec{E}$

- rot $\vec{E} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\phi = \vec{0}$
- div $\vec{E} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\phi = -\triangle\,\phi$
  - Laplace-Operator: $\triangle = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\,\triangle \int d^3r'\,\rho(\vec{r}\,')\,\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -\frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\int d^3r'\,\rho(\vec{r}\,')\,\triangle_{\vec{r}}\,\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

Beh.: $\triangle_{\vec{r}}\,\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -4\pi\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$

Ziel: Bestimme div $\vec{E}$ und rot $\vec{E}$

- rot $\vec{E} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\phi = \vec{0}$
- div $\vec{E} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\phi = -\triangle\,\phi$
  - Laplace-Operator: $\triangle = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\;\triangle \int d^3r'\,\rho(\vec{r}\,')\,\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -\frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\int d^3r'\,\rho(\vec{r}\,')\;\triangle_{\vec{r}}\;\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

Beh.: $\triangle_{\vec{r}}\,\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -4\pi\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$

Dazu zeigen wir

(i) $\triangle_{\vec{r}}\,\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = 0$, falls $\vec{r} \neq \vec{r}\,'$

(ii) $\int\limits_{\mathcal{V}} d^3r\;\triangle_{\vec{r}}\;\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -4\pi$, falls $\vec{r}\,' \in \mathcal{V}$

(i) $\underline{\vec{r} \neq \vec{r}\,'}$

(i) $\underline{\vec{r} \neq \vec{r}\,'}$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]^{-1/2}$$

(i) $\underline{\vec{r} \neq \vec{r}\,'}$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]^{-1/2}$$

$$= -\frac{1}{2} \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]^{-3/2} \begin{pmatrix} 2(x-x') \\ 2(y-y') \\ 2(z-z') \end{pmatrix}$$

(i) $\underline{\vec{r} \neq \vec{r}\,'}$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]^{-1/2}$$

$$= -\frac{1}{2} \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]^{-3/2} \begin{pmatrix} 2(x-x') \\ 2(y-y') \\ 2(z-z') \end{pmatrix} = -\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

(i) $\underline{\vec{r} \neq \vec{r}\,'}$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]^{-1/2}$$

$$= -\frac{1}{2} \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]^{-3/2} \begin{pmatrix} 2(x-x') \\ 2(y-y') \\ 2(z-z') \end{pmatrix} = -\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

$$\Rightarrow \quad \triangle_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \vec{\nabla}_{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial r_i} \frac{r_i - r_i'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

(i) $\underline{\vec{r} \neq \vec{r}\,'}$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla}_{\vec{r}}\, \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]^{-1/2}$$

$$= -\frac{1}{2}\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]^{-3/2} \begin{pmatrix} 2(x-x') \\ 2(y-y') \\ 2(z-z') \end{pmatrix} = -\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

$$\Rightarrow \quad \triangle_{\vec{r}}\, \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \vec{\nabla}_{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}}\, \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial r_i}\, \frac{r_i - r_i'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

$$= -\sum_{i=1}^{3} \left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} - 3\,\frac{(r_i - r_i')^2}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^5} \right)$$

(i) $\underline{\vec{r} \neq \vec{r}\,'}$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]^{-1/2}$$

$$= -\frac{1}{2}\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]^{-3/2} \begin{pmatrix} 2(x-x') \\ 2(y-y') \\ 2(z-z') \end{pmatrix} = -\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

$$\Rightarrow \quad \triangle_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \vec{\nabla}_{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial r_i} \frac{r_i - r_i'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

$$= -\sum_{i=1}^{3} \left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} - 3\frac{(r_i - r_i')^2}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^5} \right)$$

$$= -3\,\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} + 3\,\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')^2}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^5}$$

(i) $\underline{\vec{r} \neq \vec{r}\,'}$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]^{-1/2}$$

$$= -\frac{1}{2}\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]^{-3/2} \begin{pmatrix} 2(x-x') \\ 2(y-y') \\ 2(z-z') \end{pmatrix} = -\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

$$\Rightarrow \quad \triangle_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \vec{\nabla}_{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial r_i} \frac{r_i - r_i'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

$$= -\sum_{i=1}^{3} \left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} - 3\frac{(r_i - r_i')^2}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^5} \right)$$

$$= -3\,\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} + 3\,\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')^2}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^5} \qquad = 0 \quad \checkmark$$

(ii) $\underline{\vec{r}' \in \mathcal{V}}$ z.z.: $\int\limits_{\mathcal{V}} d^3r \, \triangle_{\vec{r}} \, \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -4\pi$

(ii) $\underline{\vec{r}' \in \mathcal{V}}$ z.z.: $\int\limits_{\mathcal{V}} d^3r \, \triangle_{\vec{r}} \, \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -4\pi$

Koordinatenwahl: $\vec{r}' = \vec{0}$, $\mathcal{V}$: Volumen, das $\vec{r} = \vec{0}$ enthält

(ii) $\underline{\vec{r}\,' \in \mathcal{V}}$ z.z.: $\int\limits_{\mathcal{V}} d^3r \; \triangle_{\vec{r}} \, \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = -4\pi$

Koordinatenwahl: $\vec{r}\,' = \vec{0}$, $\mathcal{V}$: Volumen, das $\vec{r} = \vec{0}$ enthält

$$\Rightarrow \int\limits_{\mathcal{V}} d^3r \; \triangle_{\vec{r}} \, \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = \int\limits_{\mathcal{V}} d^3r \; \triangle \, \frac{1}{r}$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

(ii) $\underline{\vec{r}' \in \mathcal{V}}$ z.z.: $\int\limits_{\mathcal{V}} d^3r \, \triangle_{\vec{r}} \, \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -4\pi$

Koordinatenwahl: $\vec{r}' = \vec{0}$, $\mathcal{V}$: Volumen, das $\vec{r} = \vec{0}$ enthält

$$\Rightarrow \int\limits_{\mathcal{V}} d^3r \, \triangle_{\vec{r}} \, \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \int\limits_{\mathcal{V}} d^3r \, \triangle \, \frac{1}{r} \overset{(i)}{=} \int\limits_{\mathcal{K}} d^3r \, \triangle \, \frac{1}{r}$$

mit $\mathcal{K} \subset \mathcal{V}$: Kugel mit Mittelpunkt $\vec{r} = 0$ und Radius R

(ii) $\underline{\vec{r}\,' \in \mathcal{V}}$ z.z.: $\int\limits_{\mathcal{V}} d^3r \, \triangle_{\vec{r}} \, \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -4\pi$

Koordinatenwahl: $\vec{r}\,' = \vec{0}$, $\mathcal{V}$: Volumen, das $\vec{r} = \vec{0}$ enthält

$$\Rightarrow \int\limits_{\mathcal{V}} d^3r \, \triangle_{\vec{r}} \, \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \int\limits_{\mathcal{V}} d^3r \, \triangle \, \frac{1}{r} \overset{(i)}{=} \int\limits_{\mathcal{K}} d^3r \, \triangle \, \frac{1}{r}$$

mit $\mathcal{K} \subset \mathcal{V}$: Kugel mit Mittelpunkt $\vec{r} = 0$ und Radius R

$$= \int\limits_{\mathcal{K}} d^3r \, \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \, \frac{1}{r} \overset{\text{Gauß}}{=} \int\limits_{\partial\mathcal{K}} d\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \, \frac{1}{r} = -\int\limits_{\partial\mathcal{K}} d\vec{\sigma} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}$$

(ii) $\underline{\vec{r}' \in \mathcal{V}}$ z.z.: $\int\limits_{\mathcal{V}} d^3r \, \triangle_{\vec{r}} \, \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -4\pi$

Koordinatenwahl: $\vec{r}' = \vec{0}$, $\mathcal{V}$: Volumen, das $\vec{r} = \vec{0}$ enthält

$$\Rightarrow \int\limits_{\mathcal{V}} d^3r \, \triangle_{\vec{r}} \, \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \int\limits_{\mathcal{V}} d^3r \, \triangle \, \frac{1}{r} \stackrel{(i)}{=} \int\limits_{\mathcal{K}} d^3r \, \triangle \, \frac{1}{r}$$

mit $\mathcal{K} \subset \mathcal{V}$: Kugel mit Mittelpunkt $\vec{r} = 0$ und Radius R

$$= \int\limits_{\mathcal{K}} d^3r \, \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \, \frac{1}{r} \stackrel{\text{Gauß}}{=} \int\limits_{\partial\mathcal{K}} d\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \, \frac{1}{r} = -\int\limits_{\partial\mathcal{K}} d\vec{\sigma} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}$$

Kugeloberfläche: $\vec{r} = R\vec{e}_r \quad \Rightarrow \quad \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{\vec{e}_r}{R^2}$

(ii) $\underline{\vec{r}\,' \in \mathcal{V}}$ z.z.: $\int\limits_{\mathcal{V}} d^3r \; \triangle_{\vec{r}} \; \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -4\pi$

Koordinatenwahl: $\vec{r}\,' = \vec{0}$, $\mathcal{V}$: Volumen, das $\vec{r} = \vec{0}$ enthält

$$\Rightarrow \int\limits_{\mathcal{V}} d^3r \; \triangle_{\vec{r}} \; \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \int\limits_{\mathcal{V}} d^3r \; \triangle \, \frac{1}{r} \stackrel{(i)}{=} \int\limits_{\mathcal{K}} d^3r \; \triangle \, \frac{1}{r}$$

mit $\mathcal{K} \subset \mathcal{V}$: Kugel mit Mittelpunkt $\vec{r} = 0$ und Radius R

$$= \int\limits_{\mathcal{K}} d^3r \, \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \, \frac{1}{r} \stackrel{\text{Gauß}}{=} \int\limits_{\partial\mathcal{K}} d\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \, \frac{1}{r} = - \int\limits_{\partial\mathcal{K}} d\vec{\sigma} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}$$

Kugeloberfläche: $\vec{r} = R\vec{e}_r \;\Rightarrow\; \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{\vec{e}_r}{R^2}$, $\quad d\vec{\sigma} = r^2 \, d\Omega \, \vec{e}_r = R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, \vec{e}_r$

(ii) $\underline{\vec{r}' \in \mathcal{V}}$ z.z.: $\int\limits_{\mathcal{V}} d^3r \, \triangle_{\vec{r}} \, \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -4\pi$

Koordinatenwahl: $\vec{r}' = \vec{0}$, $\mathcal{V}$: Volumen, das $\vec{r} = \vec{0}$ enthält

$$\Rightarrow \int\limits_{\mathcal{V}} d^3r \, \triangle_{\vec{r}} \, \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \int\limits_{\mathcal{V}} d^3r \, \triangle \, \frac{1}{r} \overset{(i)}{=} \int\limits_{\mathcal{K}} d^3r \, \triangle \, \frac{1}{r}$$

mit $\mathcal{K} \subset \mathcal{V}$: Kugel mit Mittelpunkt $\vec{r} = 0$ und Radius R

$$= \int\limits_{\mathcal{K}} d^3r \, \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \, \frac{1}{r} \overset{\text{Gauß}}{=} \int\limits_{\partial\mathcal{K}} d\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \, \frac{1}{r} = - \int\limits_{\partial\mathcal{K}} d\vec{\sigma} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}$$

Kugeloberfläche: $\vec{r} = R\vec{e}_r \;\Rightarrow\; \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{\vec{e}_r}{R^2}$, $\quad d\vec{\sigma} = r^2 \, d\Omega \, \vec{e}_r = R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, \vec{e}_r$

$$\Rightarrow \int\limits_{\mathcal{V}} d^3r \, \triangle \, \frac{1}{r} = - \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \, R^2 \, \vec{e}_r \cdot \frac{\vec{e}_r}{R^2}$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

(ii) $\underline{\vec{r}' \in \mathcal{V}}$ z.z.: $\int\limits_{\mathcal{V}} d^3r \; \triangle_{\vec{r}} \, \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -4\pi$

Koordinatenwahl: $\vec{r}' = \vec{0}$, $\mathcal{V}$: Volumen, das $\vec{r} = \vec{0}$ enthält

$$\Rightarrow \int\limits_{\mathcal{V}} d^3r \; \triangle_{\vec{r}} \, \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \int\limits_{\mathcal{V}} d^3r \; \triangle \, \frac{1}{r} \overset{(i)}{=} \int\limits_{\mathcal{K}} d^3r \; \triangle \, \frac{1}{r}$$

mit $\mathcal{K} \subset \mathcal{V}$: Kugel mit Mittelpunkt $\vec{r} = 0$ und Radius R

$$= \int\limits_{\mathcal{K}} d^3r \, \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \, \frac{1}{r} \overset{\text{Gauß}}{=} \int\limits_{\partial\mathcal{K}} d\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \, \frac{1}{r} = -\int\limits_{\partial\mathcal{K}} d\vec{\sigma} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}$$

Kugeloberfläche: $\vec{r} = R\vec{e}_r \;\Rightarrow\; \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{\vec{e}_r}{R^2}$, $\quad d\vec{\sigma} = r^2 \, d\Omega \, \vec{e}_r = R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, \vec{e}_r$

$$\Rightarrow \int\limits_{\mathcal{V}} d^3r \; \triangle \, \frac{1}{r} = -\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \, R^2 \, \vec{e}_r \cdot \frac{\vec{e}_r}{R^2} = -4\pi \qquad \checkmark$$

$$\Rightarrow \ \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \int d^3r'\, \rho(\vec{r}\,') \ \triangle_{\vec{r}} \ \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int d^3r'\, \rho(\vec{r}\,')\, \delta(\vec{r}-\vec{r}\,') = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \int d^3r'\,\rho(\vec{r}\,')\,\triangle_{\vec{r}}\,\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int d^3r'\,\rho(\vec{r}\,')\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

Maxwell-Gleichungen der Elektrostatik (differenzielle Darstellung):

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}, \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \int d^3r'\,\rho(\vec{r}\,')\ \triangle_{\vec{r}}\ \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int d^3r'\,\rho(\vec{r}\,')\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

Maxwell-Gleichungen der Elektrostatik (differenzielle Darstellung):

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}, \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}}$$

- $\int\limits_{\partial\mathcal{V}} d\vec{\sigma} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \int\limits_{\mathcal{V}} d^3r\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int\limits_{\mathcal{V}} d^3r\,\rho(\vec{r}) = \frac{Q}{\varepsilon_0}$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\int d^3r'\,\rho(\vec{r}\,')\,\triangle_{\vec{r}}\,\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int d^3r'\,\rho(\vec{r}\,')\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

Maxwell-Gleichungen der Elektrostatik (differenzielle Darstellung):

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}, \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}}$$

- $\displaystyle\int_{\partial\mathcal{V}} d\vec{\sigma}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = \int_{\mathcal{V}} d^3r\,\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{\mathcal{V}} d^3r\,\rho(\vec{r}) = \frac{Q}{\varepsilon_0}$

  „physikalischer Gauß'scher Satz“(Gauß'sches Gesetz):

  Der elektrische Fluss durch die Oberfläche eines Volumens $\mathcal{V}$ ist proportional zur im Volumen enthaltenen Gesamtladung.

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\int d^3r'\,\rho(\vec{r}\,')\;\triangle_{\vec{r}}\;\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int d^3r'\,\rho(\vec{r}\,')\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

Maxwell-Gleichungen der Elektrostatik (differenzielle Darstellung):

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}, \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}}$$

- $\int\limits_{\partial\mathcal{V}} d\vec{\sigma}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = \int\limits_{\mathcal{V}} d^3r\;\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int\limits_{\mathcal{V}} d^3r\,\rho(\vec{r}) = \frac{Q}{\varepsilon_0}$

  „physikalischer Gauß'scher Satz"(Gauß'sches Gesetz):

  Der elektrische Fluss durch die Oberfläche eines Volumens $\mathcal{V}$ ist proportional zur im Volumen enthaltenen Gesamtladung.

- $\oint\limits_{\partial\mathcal{S}} d\vec{r}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = \int\limits_{\mathcal{S}} d\vec{\sigma}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{E}(\vec{r})) = 0$

Maxwell-Gleichungen der Elektrostatik (differenzielle Darstellung):

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}, \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}}$$

- $\int\limits_{\partial\mathcal{V}} d\vec{\sigma} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \int\limits_{\mathcal{V}} d^3r\, \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int\limits_{\mathcal{V}} d^3r\, \rho(\vec{r}) = \frac{Q}{\varepsilon_0}$

  „physikalischer Gauß'scher Satz“(Gauß'sches Gesetz):

  Der elektrische Fluss durch die Oberfläche eines Volumens $\mathcal{V}$ ist proportional zur im Volumen enthaltenen Gesamtladung.

- $\oint\limits_{\partial\mathcal{S}} d\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \int\limits_{\mathcal{S}} d\vec{\sigma} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r})) = 0$

  Maxwell-Gleichungen der Elektrostatik (integrale Darstellung):

$$\boxed{\int_{\partial\mathcal{V}} d\vec{\sigma} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{\varepsilon_0}, \qquad \oint_{\partial\mathcal{S}} d\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = 0}$$

- $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\phi = -\triangle\, \phi$

- $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \;\Rightarrow\; \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\phi = -\triangle\,\phi$

$$\Rightarrow \boxed{\triangle\,\phi(\vec{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\,\rho(\vec{r})}$$ „Poisson-Gleichung“

- $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \;\Rightarrow\; \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\phi = -\triangle\,\phi$

  $\Rightarrow \boxed{\triangle\,\phi(\vec{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\,\rho(\vec{r})}$ „Poisson-Gleichung“

- ladungsfreie Raumbereiche ($\rho(\vec{r}) = 0$): $\triangle\,\phi(\vec{r}) = 0$ „Laplace-Gleichung“

- $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \;\Rightarrow\; \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\phi = -\triangle\,\phi$

  $\Rightarrow \boxed{\triangle\,\phi(\vec{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\,\rho(\vec{r})}$ „Poisson-Gleichung“

- ladungsfreie Raumbereiche ($\rho(\vec{r}) = 0$): $\triangle\,\phi(\vec{r}) = 0$ „Laplace-Gleichung“

- allgemeine Lösung der Poisson-Gleichung
  = spezielle Lösung der Poisson-Gl. + allgemeine Lösung der Laplace-Gl.

- $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\phi = -\triangle\,\phi$

  $\Rightarrow \quad \boxed{\triangle\,\phi(\vec{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\,\rho(\vec{r})}$ „Poisson-Gleichung“

- ladungsfreie Raumbereiche ($\rho(\vec{r}) = 0$): $\triangle\,\phi(\vec{r}) = 0$ „Laplace-Gleichung“

- allgemeine Lösung der Poisson-Gleichung
  = spezielle Lösung der Poisson-Gl. + allgemeine Lösung der Laplace-Gl.

- spezielle Lösung (s. Abschnitt 6.2): $\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\int d^3r'\,\rho(\vec{r}\,')\,\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$ $(*)$

- $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\phi = -\triangle\,\phi$

  $$\Rightarrow \quad \boxed{\triangle\,\phi(\vec{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\,\rho(\vec{r})}$$ „Poisson-Gleichung“

- ladungsfreie Raumbereiche ($\rho(\vec{r}) = 0$): $\triangle\,\phi(\vec{r}) = 0$ „Laplace-Gleichung“

- allgemeine Lösung der Poisson-Gleichung
  = spezielle Lösung der Poisson-Gl. + allgemeine Lösung der Laplace-Gl.

- spezielle Lösung (s. Abschnitt 6.2): $\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \int d^3r'\,\rho(\vec{r}\,')\,\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \qquad (*)$

  $$\Rightarrow \quad \triangle\,\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \int d^3r'\,\rho(\vec{r}\,')\,\left(-4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\right) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\,\rho(\vec{r}) \qquad \checkmark$$

- $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\phi = -\triangle\,\phi$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\triangle\,\phi(\vec{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\,\rho(\vec{r})} \qquad \text{„Poisson-Gleichung“}$$

- ladungsfreie Raumbereiche ($\rho(\vec{r}) = 0$): $\triangle\,\phi(\vec{r}) = 0$ „Laplace-Gleichung“
- allgemeine Lösung der Poisson-Gleichung
  = spezielle Lösung der Poisson-Gl. + allgemeine Lösung der Laplace-Gl.
- spezielle Lösung (s. Abschnitt 6.2): $\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\int d^3r'\,\rho(\vec{r}\,')\,\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \qquad (*)$

$$\Rightarrow \quad \triangle\,\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\int d^3r'\,\rho(\vec{r}\,')\,\big(-4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\big) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\,\rho(\vec{r}) \qquad \checkmark$$

- Poisson-Gleichung = partielle Differenzialgl.

  $\rightarrow$ Lösungen nur eindeutig nach Festlegung von Randbedingungen

- $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\phi = -\triangle\,\phi$

  $$\Rightarrow \quad \boxed{\triangle\,\phi(\vec{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\,\rho(\vec{r})} \qquad \text{„Poisson-Gleichung“}$$

- ladungsfreie Raumbereiche ($\rho(\vec{r}) = 0$): $\triangle\,\phi(\vec{r}) = 0$ „Laplace-Gleichung“
- allgemeine Lösung der Poisson-Gleichung
  = spezielle Lösung der Poisson-Gl. + allgemeine Lösung der Laplace-Gl.
- spezielle Lösung (s. Abschnitt 6.2): $\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\int d^3r'\,\rho(\vec{r}\,')\,\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \qquad (*)$

  $$\Rightarrow \quad \triangle\,\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\int d^3r'\,\rho(\vec{r}\,')\,\left(-4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\right) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\,\rho(\vec{r}) \qquad \checkmark$$

- Poisson-Gleichung = partielle Differenzialgl.

  ➞ Lösungen nur eindeutig nach Festlegung von Randbedingungen

  $(*)$ korrekte Lösung, wenn keine Randbedingungen im Endlichen vorliegen.

6.4 Feldverhalten an Grenzflächen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

6.4 Feldverhalten an Grenzflächen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Grenzfläche zweier Medien:

  Ladungen sammeln sich oft in einer dünnen Schicht an.

  → Flächenladungsdichte: $\sigma = \frac{dQ}{dA}$ (dA = Flächenelement)

6.4 Feldverhalten an Grenzflächen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Grenzfläche zweier Medien:

  Ladungen sammeln sich oft in einer dünnen Schicht an.

  → Flächenladungsdichte: $\sigma = \frac{dQ}{dA}$ (dA = Flächenelement)

  Wie ändert sich das $\vec{E}$-Feld an einer solchen Schicht?

6.4 Feldverhalten an Grenzflächen

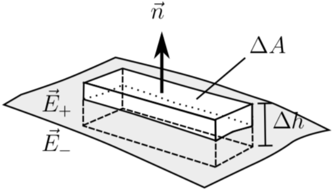
- Grenzfläche zweier Medien:

  Ladungen sammeln sich oft in einer dünnen Schicht an.

  → Flächenladungsdichte: $\sigma = \frac{dQ}{dA}$ (dA = Flächenelement)

  Wie ändert sich das $\vec{E}$-Feld an einer solchen Schicht?

- Normalkomponente:



$$\Delta V = \Delta A \, \Delta h$$

6.4 Feldverhalten an Grenzflächen

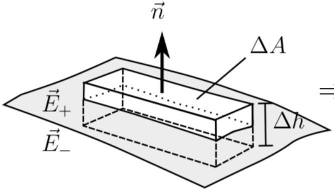
- Grenzfläche zweier Medien:

  Ladungen sammeln sich oft in einer dünnen Schicht an.

  $\longrightarrow$ Flächenladungsdichte: $\sigma = \frac{dQ}{dA}$ (dA = Flächenelement)

  Wie ändert sich das $\vec{E}$-Feld an einer solchen Schicht?

- Normalkomponente:



$$\Delta V = \Delta A \, \Delta h$$

$$\Rightarrow \int_{\Delta V} d^3r \, \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \int_{\partial \Delta V} d\vec{S} \cdot \vec{E}(\vec{r})$$

6.4 Feldverhalten an Grenzflächen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

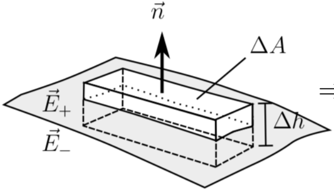
- Grenzfläche zweier Medien:

  Ladungen sammeln sich oft in einer dünnen Schicht an.

  → Flächenladungsdichte: $\sigma = \frac{dQ}{dA}$ $(dA =$ Flächenelement$)$

  Wie ändert sich das $\vec{E}$-Feld an einer solchen Schicht?

- Normalkomponente:



$$\Delta V = \Delta A \, \Delta h$$

$$\Rightarrow \int_{\Delta V} d^3r \, \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \int_{\partial \Delta V} d\vec{S} \cdot \vec{E}(\vec{r})$$

$$\parallel$$

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\Delta V} d^3r \, \rho(\vec{r}) = \frac{\Delta Q}{\varepsilon_0}$$

6.4 Feldverhalten an Grenzflächen

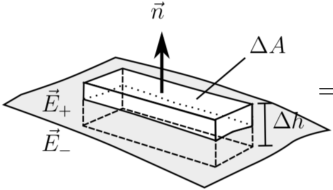
- Grenzfläche zweier Medien:

  Ladungen sammeln sich oft in einer dünnen Schicht an.

  → Flächenladungsdichte: $\sigma = \frac{dQ}{dA}$ $\quad$ (dA = Flächenelement)

  Wie ändert sich das $\vec{E}$-Feld an einer solchen Schicht?

- Normalkomponente:



$$\Delta V = \Delta A \, \Delta h$$

$$\Rightarrow \int_{\Delta V} d^3r \, \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \int_{\partial \Delta V} d\vec{S} \cdot \vec{E}(\vec{r}) \xrightarrow{\Delta h \to 0} \Delta A \, \vec{n} \cdot \left(\vec{E}_+ - \vec{E}_- \right)$$

$$\parallel$$

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\Delta V} d^3r \, \rho(\vec{r}) = \frac{\Delta Q}{\varepsilon_0} \xrightarrow{\Delta h \to 0} \frac{\sigma \Delta A}{\varepsilon_0}$$

6.4 Feldverhalten an Grenzflächen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

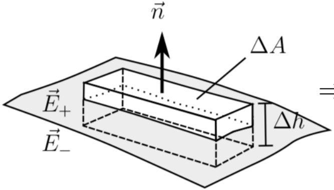
- Grenzfläche zweier Medien:

  Ladungen sammeln sich oft in einer dünnen Schicht an.

  → Flächenladungsdichte: $\sigma = \frac{dQ}{dA}$ (dA = Flächenelement)

  Wie ändert sich das $\vec{E}$-Feld an einer solchen Schicht?

- Normalkomponente:



$$\Delta V = \Delta A \, \Delta h$$

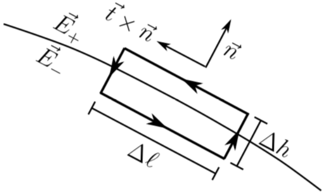
$$\Rightarrow \int_{\Delta V} d^3r \, \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \int_{\partial \Delta V} d\vec{S} \cdot \vec{E}(\vec{r}) \xrightarrow{\Delta h \to 0} \Delta A \, \vec{n} \cdot \left(\vec{E}_+ - \vec{E}_- \right)$$

$$\parallel$$

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\Delta V} d^3r \, \rho(\vec{r}) = \frac{\Delta Q}{\varepsilon_0} \xrightarrow{\Delta h \to 0} \frac{\sigma \Delta A}{\varepsilon_0}$$

$\Rightarrow \vec{n} \cdot (\vec{E}_+ - \vec{E}_-) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ Die Normalkomponente des $\vec{E}$-Feldes ist unstetig.

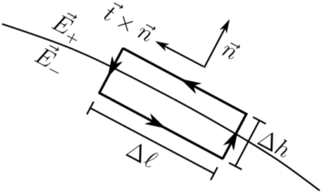
- Tangentialkomponente:



$\Delta \mathcal{F} = \Delta h \, \Delta \ell$

- $\vec{t}$: Einheitsvektor $\perp \Delta \mathcal{F}$
- $\vec{n}$: Einheitsvektor $\perp$ Grenzfläche

- Tangentialkomponente:

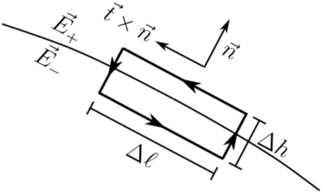


$\Delta\mathcal{F} = \Delta h\,\Delta\ell$

- $\vec{t}$: Einheitsvektor $\perp$ $\Delta\mathcal{F}$
- $\vec{n}$: Einheitsvektor $\perp$ Grenzfläche

$$\Rightarrow\ 0 = \int_{\Delta\mathcal{F}} d\vec{S}\cdot\underbrace{\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)}_{=\vec{0}} \overset{\text{Stokes}}{=} \oint_{\partial\Delta\mathcal{F}} d\vec{r}\cdot\vec{E}$$

- Tangentialkomponente:



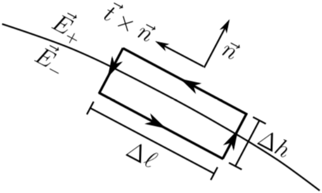
$$\Delta\mathcal{F} = \Delta h\,\Delta\ell$$

- $\vec{t}$: Einheitsvektor $\perp$ $\Delta\mathcal{F}$
- $\vec{n}$: Einheitsvektor $\perp$ Grenzfläche

$$\Rightarrow\ 0 = \int_{\Delta\mathcal{F}} d\vec{S}\cdot\underbrace{\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)}_{=\vec{0}} \overset{\text{Stokes}}{=} \oint_{\partial\Delta\mathcal{F}} d\vec{r}\cdot\vec{E}$$

$$\xrightarrow{\Delta h\to 0} \Delta\ell\ \left(\vec{t}\times\vec{n}\right)\cdot\left(\vec{E}_+ - \vec{E}_-\right)$$

- Tangentialkomponente:



$$\Delta\mathcal{F} = \Delta h\,\Delta\ell$$

- $\vec{t}$: Einheitsvektor $\perp$ $\Delta\mathcal{F}$
- $\vec{n}$: Einheitsvektor $\perp$ Grenzfläche

$$\Rightarrow\ 0 = \int_{\Delta\mathcal{F}} d\vec{S}\cdot\underbrace{\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)}_{=\vec{0}} \overset{\text{Stokes}}{=} \oint_{\partial\Delta\mathcal{F}} d\vec{r}\cdot\vec{E}$$

$$\xrightarrow{\Delta h\to 0} \Delta\ell\ \left(\vec{t}\times\vec{n}\right)\cdot\left(\vec{E}_+ - \vec{E}_-\right)$$

$$\Rightarrow\ \left(\vec{t}\times\vec{n}\right)\cdot\left(\vec{E}_+ - \vec{E}_-\right) = 0$$

Die Tangentialkomponente des $\vec{E}$-Feldes ist an der Grenzfläche stetig.

6.5 Elektrostatische Feldenergie

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

6.5 Elektrostatische Feldenergie

- Kraft auf eine Punktladung im $\vec{E}$-Feld: $\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r}) = -q\vec{\nabla}\phi(\vec{r})$

6.5 Elektrostatische Feldenergie

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Kraft auf eine Punktladung im $\vec{E}$-Feld: $\quad \vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r}) = -q\vec{\nabla}\phi(\vec{r})$
- Arbeit, die man leisten muss, um q von $\vec{r}_0$ nach $\vec{r}$ zu verschieben:

$$\Delta W = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}\,' \cdot \vec{F}(\vec{r}\,') = q\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}\,' \cdot \vec{\nabla}\phi(\vec{r}\,') = q\left(\phi(\vec{r}) - \phi(\vec{r}_0)\right) \equiv qU(\vec{r}, \vec{r}_0)$$

6.5 Elektrostatische Feldenergie

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Kraft auf eine Punktladung im $\vec{E}$-Feld: $\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r}) = -q\vec{\nabla}\phi(\vec{r})$
- Arbeit, die man leisten muss, um q von $\vec{r}_0$ nach $\vec{r}$ zu verschieben:

$$\Delta W = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}\,' \cdot \vec{F}(\vec{r}\,') = q\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}\,' \cdot \vec{\nabla}\phi(\vec{r}\,') = q\left(\phi(\vec{r}) - \phi(\vec{r}_0)\right) \equiv qU(\vec{r}, \vec{r}_0)$$

- Setze $\phi(r \to \infty) = 0$

  ➞ Energie einer Ladungsverteilung
  = Arbeit, die geleistet werden muss, alle Ladungen aus dem Unendlichen an die jeweiligen Orte zu verschieben.

6.5 Elektrostatische Feldenergie

- Kraft auf eine Punktladung im $\vec{E}$-Feld: $\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r}) = -q\vec{\nabla}\phi(\vec{r})$
- Arbeit, die man leisten muss, um q von $\vec{r}_0$ nach $\vec{r}$ zu verschieben:

$$\Delta W = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}\,' \cdot \vec{F}(\vec{r}\,') = q \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}\,' \cdot \vec{\nabla}\phi(\vec{r}\,') = q\left(\phi(\vec{r}) - \phi(\vec{r}_0)\right) \equiv qU(\vec{r}, \vec{r}_0)$$

- Setze $\phi(r \to \infty) = 0$

  → Energie einer Ladungsverteilung
  = Arbeit, die geleistet werden muss, alle Ladungen aus dem Unendlichen an die jeweiligen Orte zu verschieben.

  - 1. Punktladung: $W^{(1)} = 0$

6.5 Elektrostatische Feldenergie

- Kraft auf eine Punktladung im $\vec{E}$-Feld: $\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r}) = -q\vec{\nabla}\phi(\vec{r})$
- Arbeit, die man leisten muss, um q von $\vec{r}_0$ nach $\vec{r}$ zu verschieben:

$$\Delta W = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}\,' \cdot \vec{F}(\vec{r}\,') = q\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}\,' \cdot \vec{\nabla}\phi(\vec{r}\,') = q\left(\phi(\vec{r}) - \phi(\vec{r}_0)\right) \equiv qU(\vec{r}, \vec{r}_0)$$

- Setze $\phi(r \to \infty) = 0$

  → Energie einer Ladungsverteilung
  = Arbeit, die geleistet werden muss, alle Ladungen aus dem Unendlichen an die jeweiligen Orte zu verschieben.

  - 1. Punktladung: $W^{(1)} = 0$
  - $i-1$ Ladungen an $\vec{r}^{\,(1)}, \dots, \vec{r}^{\,(i-1)}$ $\Rightarrow$ $\phi^{(<i)}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{j=1}^{i-1}\frac{q_j}{|\vec{r}-\vec{r}^{\,(j)}|}$

6.5 Elektrostatische Feldenergie

- Kraft auf eine Punktladung im $\vec{E}$-Feld: $\quad \vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r}) = -q\vec{\nabla}\phi(\vec{r})$
- Arbeit, die man leisten muss, um q von $\vec{r}_0$ nach $\vec{r}$ zu verschieben:

$$\Delta W = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}\,' \cdot \vec{F}(\vec{r}\,') = q\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}\,' \cdot \vec{\nabla}\phi(\vec{r}\,') = q\left(\phi(\vec{r}) - \phi(\vec{r}_0)\right) \equiv qU(\vec{r}, \vec{r}_0)$$

- Setze $\phi(r \to \infty) = 0$

  ➞ Energie einer Ladungsverteilung
  = Arbeit, die geleistet werden muss, alle Ladungen aus dem Unendlichen an die jeweiligen Orte zu verschieben.

  - 1. Punktladung: $W^{(1)} = 0$
  - $i-1$ Ladungen an $\vec{r}^{\,(1)}, \dots, \vec{r}^{\,(i-1)}$ $\quad \Rightarrow \quad \phi^{(<i)}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{j=1}^{i-1}\frac{q_j}{|\vec{r}-\vec{r}^{\,(j)}|}$

    i-te Ladung nach $\vec{r}^{\,(i)}$: $\quad W^{(i)} = q_i\,\phi^{(<i)}(\vec{r}^{\,(i)})$

⇒ Energie von N statischen Punktladungen:

$$W = \sum_{i=1}^{N} W^{(i)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=2}^{N} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}^{\,(i)} - \vec{r}^{\,(j)}|} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{N} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}^{\,(i)} - \vec{r}^{\,(j)}|}$$

⇒ Energie von N statischen Punktladungen:

$$W = \sum_{i=1}^{N} W^{(i)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=2}^{N} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}^{\,(i)} - \vec{r}^{\,(j)}|} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{N} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}^{\,(i)} - \vec{r}^{\,(j)}|}$$

- kontinuierliche Ladungsverteilung:

$$W = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \int d^3r \int d^3r' \, \frac{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

$\Rightarrow$ Energie von N statischen Punktladungen:

$$W = \sum_{i=1}^{N} W^{(i)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=2}^{N} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}^{\,(i)} - \vec{r}^{\,(j)}|} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}^{\,(i)} - \vec{r}^{\,(j)}|}$$

- kontinuierliche Ladungsverteilung:

$$W = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \int d^3r \int d^3r' \, \frac{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \qquad \text{(enthält aber auch } \vec{r} = \vec{r}\,'\text{!)}$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$\Rightarrow$ Energie von N statischen Punktladungen:

$$W = \sum_{i=1}^{N} W^{(i)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=2}^{N} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}^{\,(i)} - \vec{r}^{\,(j)}|} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}^{\,(i)} - \vec{r}^{\,(j)}|}$$

- kontinuierliche Ladungsverteilung:

$$W = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \int d^3r \int d^3r' \, \frac{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \qquad \text{(enthält aber auch } \vec{r} = \vec{r}\,'\text{!)}$$

$$= \frac{1}{2} \int d^3r \, \rho(\vec{r})\phi(\vec{r})$$

$\Rightarrow$ Energie von N statischen Punktladungen:

$$W = \sum_{i=1}^{N} W^{(i)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=2}^{N} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}^{\,(i)} - \vec{r}^{\,(j)}|} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}^{\,(i)} - \vec{r}^{\,(j)}|}$$

- kontinuierliche Ladungsverteilung:

$$W = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \int d^3r \int d^3r' \, \frac{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \qquad \text{(enthält aber auch } \vec{r} = \vec{r}\,' \text{!)}$$

$$= \frac{1}{2} \int d^3r \, \rho(\vec{r})\phi(\vec{r}) \quad \overset{\text{Poisson}}{=} \; = -\frac{\varepsilon_0}{2} \int d^3r \, \phi(\vec{r}) \triangle \phi(\vec{r})$$

⇒ Energie von N statischen Punktladungen:

$$W = \sum_{i=1}^{N} W^{(i)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=2}^{N} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}^{\,(i)} - \vec{r}^{\,(j)}|} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}^{\,(i)} - \vec{r}^{\,(j)}|}$$

- kontinuierliche Ladungsverteilung:

$$W = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \int d^3r \int d^3r' \, \frac{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \qquad \text{(enthält aber auch } \vec{r} = \vec{r}\,' \text{!)}$$

$$= \frac{1}{2} \int d^3r \, \rho(\vec{r})\phi(\vec{r}) \quad \overset{\text{Poisson}}{=} \quad = -\frac{\varepsilon_0}{2} \int d^3r \, \phi(\vec{r}) \triangle \phi(\vec{r})$$

- Produktregel: $\vec{\nabla} \cdot \left(\phi \vec{\nabla} \phi\right) = (\vec{\nabla}\phi) \cdot (\vec{\nabla}\phi) + \phi \triangle \phi$

$\Rightarrow$ Energie von N statischen Punktladungen:

$$W = \sum_{i=1}^{N} W^{(i)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=2}^{N} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}^{\,(i)} - \vec{r}^{\,(j)}|} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}^{\,(i)} - \vec{r}^{\,(j)}|}$$

- kontinuierliche Ladungsverteilung:

$$W = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \int d^3r \int d^3r' \, \frac{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \qquad \text{(enthält aber auch } \vec{r} = \vec{r}\,' \text{!)}$$

$$= \frac{1}{2} \int d^3r \, \rho(\vec{r})\phi(\vec{r}) \overset{\text{Poisson}}{=} = -\frac{\varepsilon_0}{2} \int d^3r \, \phi(\vec{r}) \, \triangle \, \phi(\vec{r})$$

- Produktregel: $\vec{\nabla} \cdot \left(\phi \vec{\nabla} \phi\right) = (\vec{\nabla}\phi) \cdot (\vec{\nabla}\phi) + \phi \, \triangle \, \phi$

$$\Rightarrow \quad W = -\frac{\varepsilon_0}{2} \int d^3r \, \vec{\nabla} \cdot \left(\phi(\vec{r}) \vec{\nabla} \phi(\vec{r})\right) + \frac{\varepsilon_0}{2} \int d^3r \, \underbrace{\left(\vec{\nabla}\phi(\vec{r})\right)^2}_{=\vec{E}^{\,2}}$$

$\Rightarrow$ Energie von N statischen Punktladungen:

$$W = \sum_{i=1}^{N} W^{(i)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=2}^{N} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}^{\,(i)} - \vec{r}^{\,(j)}|} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{N} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}^{\,(i)} - \vec{r}^{\,(j)}|}$$

- kontinuierliche Ladungsverteilung:

$$W = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \int d^3r \int d^3r' \, \frac{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \qquad \text{(enthält aber auch } \vec{r} = \vec{r}\,' \text{!)}$$

$$= \frac{1}{2} \int d^3r \, \rho(\vec{r})\phi(\vec{r}) \quad \overset{\text{Poisson}}{=} \; = -\frac{\varepsilon_0}{2} \int d^3r \, \phi(\vec{r}) \triangle \phi(\vec{r})$$

- Produktregel: $\vec{\nabla} \cdot \left(\phi \vec{\nabla} \phi\right) = (\vec{\nabla}\phi) \cdot (\vec{\nabla}\phi) + \phi \triangle \phi$

$$\Rightarrow \quad W = -\frac{\varepsilon_0}{2} \int d^3r \, \vec{\nabla} \cdot \left(\phi(\vec{r}) \vec{\nabla} \phi(\vec{r})\right) + \frac{\varepsilon_0}{2} \int d^3r \, \underbrace{\left(\vec{\nabla}\phi(\vec{r})\right)^2}_{=\vec{E}^{\,2}}$$

$$\int_{\mathcal{V}} d^3r \, \vec{\nabla} \cdot \left(\phi(\vec{r}) \vec{\nabla} \phi(\vec{r})\right) = \int_{\partial\mathcal{V}} d\vec{\sigma} \cdot \left(\phi(\vec{r}) \vec{\nabla} \phi(\vec{r})\right) \overset{\mathcal{V}\to\mathbb{R}^3}{=} 0$$

für räumlich lokalisierte Ladungsverteilungen

$\Rightarrow$ $$\boxed{W = \frac{\varepsilon_0}{2} \int d^3r\, \vec{E}^{\,2}(\vec{r})}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{W = \frac{\varepsilon_0}{2} \int d^3r\, \vec{E}^{\,2}(\vec{r})} \; = \int d^3r\, w(\vec{r}),$$

$w(\vec{r}) = \frac{\varepsilon_0}{2} \vec{E}^{\,2}(\vec{r})$ Energiedichte des elektrostatischen Feldes