Teil I: Klassische Mechanik

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

1. Newton'sche Mechanik
2. Kepler-Problem
3. Der starre Körper
4. Lagrange-Mechanik
5. Schwingungen

1. Newton'sche Mechanik

1.1 Kinematische Grundlagen

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

1.1 Kinematische Grundlagen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- **Gegenstand der Mechanik:**

  Bewegung von Körpern im Raum als Funktion der Zeit unter dem Einfluss von Kräften

1.1 Kinematische Grundlagen

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

- **Gegenstand der Mechanik:**

  Bewegung von Körpern im Raum als Funktion der Zeit unter dem Einfluss von Kräften

- **Grundannahmen der Newton'schen Mechanik:**

  3-dim. euklidischer Raum + davon unabhängige absolute Zeit

1.1 Kinematische Grundlagen

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

- **Gegenstand der Mechanik:**

  Bewegung von Körpern im Raum als Funktion der Zeit unter dem Einfluss von Kräften

- **Grundannahmen der Newton'schen Mechanik:**

  3-dim. euklidischer Raum + davon unabhängige absolute Zeit

- **Idealisierung:**

  Punktmassen (= Massepunkte, Massenpunkte, „Teilchen”)

  Die gesamte Masse eines Körpers ist in einem Punkt vereinigt.

  (Beispiel Planetenbewegung: Ausdehnung von Sonne und Planeten gegenüber den Abständen vernachlässigbar)

1.1 Kinematische Grundlagen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- **Gegenstand der Mechanik:**

  Bewegung von Körpern im Raum als Funktion der Zeit unter dem Einfluss von Kräften

- **Grundannahmen der Newton'schen Mechanik:**

  3-dim. euklidischer Raum + davon unabhängige absolute Zeit

- **Idealisierung:**

  Punktmassen (= Massepunkte, Massenpunkte, „Teilchen")

  Die gesamte Masse eines Körpers ist in einem Punkt vereinigt.

  (Beispiel Planetenbewegung: Ausdehnung von Sonne und Planeten gegenüber den Abständen vernachlässigbar)

  $\rightarrow$ Bewegungsablauf eines Teilchens: Ort $\vec{r}$ als Funktion der Zeit t

- **Ortsvektor:** $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \equiv \sum_{i=1}^{3} r_i(t)\,\vec{e}_i$

  kartesische Orthonormalbasis:

  $$\vec{e}_1 \equiv \vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 \equiv \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 \equiv \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  kartesische Koordinaten: $r_1 \equiv x, \quad r_2 \equiv y, \quad r_3 \equiv z$

- **Ortsvektor:** $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \equiv \sum_{i=1}^{3} r_i(t)\,\vec{e}_i$

  kartesische Orthonormalbasis:

  $$\vec{e}_1 \equiv \vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 \equiv \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 \equiv \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  kartesische Koordinaten: $r_1 \equiv x, \quad r_2 \equiv y, \quad r_3 \equiv z$

- **Momentangeschwindigkeit:** $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \equiv \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{3} \dot{r}_i(t)\,\vec{e}_i$

- **Ortsvektor:** $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \equiv \sum_{i=1}^{3} r_i(t)\,\vec{e}_i$

  kartesische Orthonormalbasis:

  $$\vec{e}_1 \equiv \vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 \equiv \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 \equiv \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  kartesische Koordinaten: $r_1 \equiv x, \quad r_2 \equiv y, \quad r_3 \equiv z$

- **Momentangeschwindigkeit:** $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \equiv \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{3} \dot{r}_i(t)\,\vec{e}_i$

- **Momentanbeschleunigung:**

  $$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} \equiv \ddot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{3} \ddot{r}_i(t)\,\vec{e}_i$$

- **Ortsvektor:** $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \equiv \sum_{i=1}^{3} r_i(t)\, \vec{e}_i$

  kartesische Orthonormalbasis:

  $$\vec{e}_1 \equiv \vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 \equiv \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 \equiv \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  kartesische Koordinaten: $r_1 \equiv x, \quad r_2 \equiv y, \quad r_3 \equiv z$

- **Momentangeschwindigkeit:** $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \equiv \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{3} \dot{r}_i(t)\, \vec{e}_i$

- **Momentanbeschleunigung:**

  $$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} \equiv \ddot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{3} \ddot{r}_i(t)\, \vec{e}_i$$

- **krummlinige Koordinaten:** i.A. t-abh. Basisvektoren $\rightarrow$ Produktregel!

1.2 Die Newton'schen Gesetze (1687)

1.2 Die Newton'schen Gesetze (1687)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

N1: *Ein Teilchen verharrt in Ruhe oder gleichförmiger Bewegung, solange keine Kräfte auf ihn einwirken.*
(Trägheitsgesetz, Galilei 1638)

N2: *Wirkt auf ein Teilchen mit Masse m die Kraft $\vec{F}$, dann gilt für seinen Impuls $\vec{p} = m\dot{\vec{r}}$:* $\quad \dot{\vec{\mathbf{p}}} = \vec{\mathbf{F}}$.

N3: *Übt ein Teilchen j auf ein Teilchen i die Kraft $\vec{F}^{(ij)}$ aus, dann übt das Teilchen i auf das Teilchen j die Kraft* $\quad \vec{\mathbf{F}}^{(\mathbf{ji})} = -\vec{\mathbf{F}}^{(\mathbf{ij})} \quad$ *aus.*
(„actio = reactio")

1.2 Die Newton'schen Gesetze (1687)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

N1: *Ein Teilchen verharrt in Ruhe oder gleichförmiger Bewegung, solange keine Kräfte auf ihn einwirken.*
(Trägheitsgesetz, Galilei 1638)

N2: *Wirkt auf ein Teilchen mit Masse m die Kraft $\vec{F}$, dann gilt für seinen Impuls $\vec{p} = m\dot{\vec{r}}$:* $\quad \dot{\vec{\mathbf{p}}} = \vec{\mathbf{F}}$.

N3: *Übt ein Teilchen j auf ein Teilchen i die Kraft $\vec{F}^{(ij)}$ aus, dann übt das Teilchen i auf das Teilchen j die Kraft* $\quad \vec{\mathbf{F}}^{(\mathbf{ji})} = -\vec{\mathbf{F}}^{(\mathbf{ij})} \quad$ *aus.*
(„actio = reactio")

Superpositionsprinzip:

N4: *Wirken auf ein Teilchen mehrere Kräfte $\vec{F}_i$, so ist die resultierende Gesamtkraft durch die Vektorsumme* $\quad \vec{\mathbf{F}}_{ges} = \sum_{\mathbf{i}} \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{i}} \quad$ *gegeben.*

Bemerkungen:

- Annahme: $m = const.$ (gilt ab jetzt immer, wenn nicht anders gesagt)

$$\overset{\textbf{N2}}{\Rightarrow} \quad \vec{F} = \frac{d}{dt}(m\dot{\vec{r}}) = m\ddot{\vec{r}} = m\vec{a}$$

Bemerkungen:

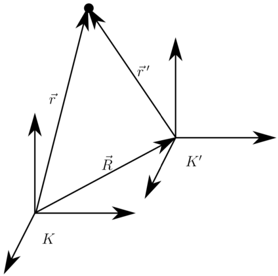
- Annahme: $m = const.$ (gilt ab jetzt immer, wenn nicht anders gesagt)

  $$\overset{\mathbf{N2}}{\Rightarrow} \quad \vec{F} = \frac{d}{dt}(m\dot{\vec{r}}) = m\ddot{\vec{r}} = m\vec{a}$$

- $\vec{F} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad m\vec{a} = m\dot{\vec{v}} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = const.$

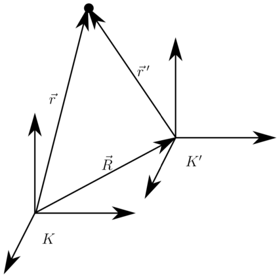
  ➞ N1 ist Spezialfall von N2

- **zwei Koordinatensysteme:**



$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{R} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\vec{r}}\,' = \ddot{\vec{r}} - \ddot{\vec{R}}$$

- **zwei Koordinatensysteme:**

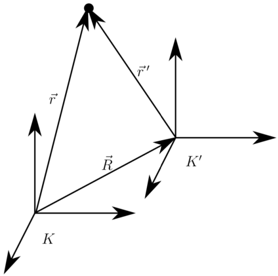


$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{R} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\vec{r}}\,' = \ddot{\vec{r}} - \ddot{\vec{R}}$$

- Annahme: $\ddot{\vec{r}} = \vec{0}$

  $\Rightarrow \quad \ddot{\vec{r}}\,' = -\ddot{\vec{R}} \neq \vec{0}$, falls $\ddot{\vec{R}} \neq \vec{0}$

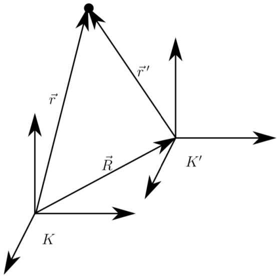
- **zwei Koordinatensysteme:**



$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{R} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\vec{r}}\,' = \ddot{\vec{r}} - \ddot{\vec{R}}$$

- Annahme: $\ddot{\vec{r}} = \vec{0}$
  $\Rightarrow \quad \ddot{\vec{r}}\,' = -\ddot{\vec{R}} \neq \vec{0}$, falls $\ddot{\vec{R}} \neq \vec{0}$
- Welches ist das „richtige“ Koordinatensystem?

- **zwei Koordinatensysteme:**



$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{R} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\vec{r}}\,' = \ddot{\vec{r}} - \ddot{\vec{R}}$$

- Annahme: $\ddot{\vec{r}} = \vec{0}$
  $\Rightarrow \quad \ddot{\vec{r}}\,' = -\ddot{\vec{R}} \neq \vec{0}$, falls $\ddot{\vec{R}} \neq \vec{0}$
- Welches ist das „richtige“ Koordinatensystem?

- Koordinatensysteme, in denen N1 gilt, heißen Inertialsysteme.
- Galilei und Newton postulieren implizit, dass es solche Systeme gibt und dass man eindeutig feststellen kann, ob Kräfte wirken.

1.3 Erhaltungssätze für Einteilchen-Systeme

1.3 Erhaltungssätze für Einteilchen-Systeme

- **1. Impulserhaltung**

1.3 Erhaltungssätze für Einteilchen-Systeme

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- **1. Impulserhaltung**

N2: $\dot{\vec{p}} = \vec{F} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{p} = const., \quad \text{falls} \quad \vec{F} = \vec{0}}$

1.3 Erhaltungssätze für Einteilchen-Systeme

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- **1. Impulserhaltung**

N2: $\dot{\vec{p}} = \vec{F} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{p} = const., \quad \text{falls} \quad \vec{F} = \vec{0}}$

- **2. Drehimpulserhaltung**

1.3 Erhaltungssätze für Einteilchen-Systeme

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- **1. Impulserhaltung**

N2: $\dot{\vec{p}} = \vec{F} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{p} = const., \quad \text{falls} \quad \vec{F} = \vec{0}}$

- **2. Drehimpulserhaltung**

Drehimpuls: $\vec{L} \equiv \vec{r} \times \vec{p}$ (hängt vom Koordinatensystem ab!)

- **1. Impulserhaltung**

N2: $\dot{\vec{p}} = \vec{F} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{p} = const., \quad \text{falls} \quad \vec{F} = \vec{0}}$

- **2. Drehimpulserhaltung**

Drehimpuls: $\vec{L} \equiv \vec{r} \times \vec{p}$ (hängt vom Koordinatensystem ab!)

$$\Rightarrow \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times \vec{p}\right) = \underbrace{\dot{\vec{r}} \times \vec{p}}_{=\vec{v} \times m\vec{v} = \vec{0}} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}} \overset{N2}{=} \vec{r} \times \vec{F}$$

1.3 Erhaltungssätze für Einteilchen-Systeme

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- **1. Impulserhaltung**

N2: $\dot{\vec{p}} = \vec{F} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{p} = const., \quad \text{falls} \quad \vec{F} = \vec{0}}$

- **2. Drehimpulserhaltung**

Drehimpuls: $\vec{L} \equiv \vec{r} \times \vec{p}$ (hängt vom Koordinatensystem ab!)

$$\Rightarrow \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times \vec{p}\right) = \underbrace{\dot{\vec{r}} \times \vec{p}}_{=\vec{v} \times m\vec{v} = \vec{0}} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}} \overset{N2}{=} \vec{r} \times \vec{F} \equiv \vec{N} \quad \text{(Drehmoment)}$$

- **1. Impulserhaltung**

N2: $\dot{\vec{p}} = \vec{F} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{p} = const., \quad \text{falls} \quad \vec{F} = \vec{0}}$

- **2. Drehimpulserhaltung**

Drehimpuls: $\vec{L} \equiv \vec{r} \times \vec{p}$ (hängt vom Koordinatensystem ab!)

$$\Rightarrow \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times \vec{p}\right) = \underbrace{\dot{\vec{r}} \times \vec{p}}_{=\vec{v} \times m\vec{v} = \vec{0}} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}} \overset{N2}{=} \vec{r} \times \vec{F} \equiv \vec{N} \quad \text{(Drehmoment)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{L} = const., \quad \text{falls} \quad \vec{N} = \vec{0}}$$

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

▶ 3. Energieerhaltung

3. Energieerhaltung

- entlang eines infinitesimalen Wegstücks $d\vec{r}$ geleistete Arbeit:

  $$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}, \qquad \vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$$

- **3. Energieerhaltung**
  - entlang eines infinitesimalen Wegstücks $d\vec{r}$ geleistete Arbeit:

    $$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}, \qquad \vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$$

  - endlicher Weg $\mathcal{C}$: $\quad W_{\mathcal{C}} = \int\limits_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot \vec{F}$

3. Energieerhaltung

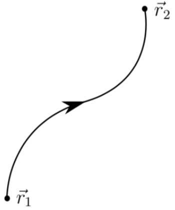
- entlang eines infinitesimalen Wegstücks $d\vec{r}$ geleistete Arbeit:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}, \qquad \vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$$

- endlicher Weg $\mathcal{C}$: $\quad W_{\mathcal{C}} = \int_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot \vec{F}$

Parametrisierung:

$$\mathcal{C}: \quad t \in [t_1, t_2] \mapsto \vec{r}(t), \quad \vec{r}(t_1) = \vec{r}_1, \quad \vec{r}(t_2) = \vec{r}_2$$

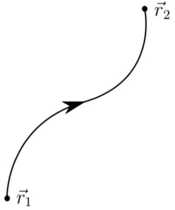


3. Energieerhaltung

- entlang eines infinitesimalen Wegstücks $d\vec{r}$ geleistete Arbeit:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}, \qquad \vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$$

- endlicher Weg $\mathcal{C}$: $\quad W_{\mathcal{C}} = \int\limits_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot \vec{F}$



Parametrisierung:

$$\mathcal{C}: \quad t \in [t_1, t_2] \mapsto \vec{r}(t), \quad \vec{r}(t_1) = \vec{r}_1, \quad \vec{r}(t_2) = \vec{r}_2$$

$$d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \vec{v}\, dt$$

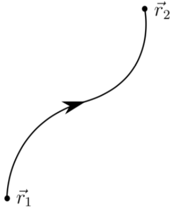
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

3. Energieerhaltung

- entlang eines infinitesimalen Wegstücks $d\vec{r}$ geleistete Arbeit:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}, \qquad \vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$$

- endlicher Weg $\mathcal{C}$: $\quad W_{\mathcal{C}} = \int_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot \vec{F}$



Parametrisierung:

$$\mathcal{C}: \quad t \in [t_1, t_2] \mapsto \vec{r}(t), \quad \vec{r}(t_1) = \vec{r}_1, \quad \vec{r}(t_2) = \vec{r}_2$$

$$d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \vec{v}\, dt$$

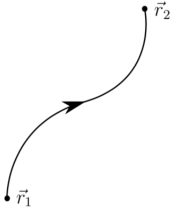
$$\Rightarrow \quad W_{\mathcal{C}} = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \vec{v}(t) \cdot \vec{F}\left(\vec{r}(t), \vec{v}(t), t\right)$$

▸ 3. Energieerhaltung

- entlang eines infinitesimalen Wegstücks $d\vec{r}$ geleistete Arbeit:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}, \qquad \vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$$

- endlicher Weg $\mathcal{C}$: $\quad W_{\mathcal{C}} = \int\limits_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot \vec{F}$



Parametrisierung:

$$\mathcal{C}: \quad t \in [t_1, t_2] \mapsto \vec{r}(t), \quad \vec{r}(t_1) = \vec{r}_1, \quad \vec{r}(t_2) = \vec{r}_2$$

$$d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \vec{v}\, dt$$

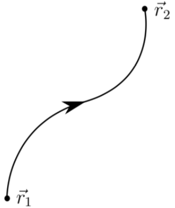
$$\Rightarrow \quad W_{\mathcal{C}} = \int\limits_{t_1}^{t_2} dt\, \vec{v}(t) \cdot \vec{F}\left(\vec{r}(t), \vec{v}(t), t\right) \overset{\mathbf{N2}}{=} \int\limits_{t_1}^{t_2} dt\, \vec{v}(t) \cdot m\dot{\vec{v}}(t)$$

3. Energieerhaltung

- entlang eines infinitesimalen Wegstücks $d\vec{r}$ geleistete Arbeit:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}, \qquad \vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$$

- endlicher Weg $\mathcal{C}$: $\quad W_{\mathcal{C}} = \int\limits_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot \vec{F}$



Parametrisierung:

$$\mathcal{C}: \quad t \in [t_1, t_2] \mapsto \vec{r}(t), \quad \vec{r}(t_1) = \vec{r}_1, \quad \vec{r}(t_2) = \vec{r}_2$$

$$d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \vec{v}\, dt$$

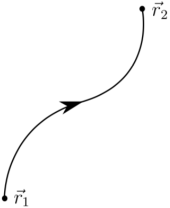
$$\Rightarrow \quad W_{\mathcal{C}} = \int\limits_{t_1}^{t_2} dt\, \vec{v}(t) \cdot \vec{F}\left(\vec{r}(t), \vec{v}(t), t\right) \overset{\textbf{N2}}{=} \int\limits_{t_1}^{t_2} dt\, \vec{v}(t) \cdot m\dot{\vec{v}}(t) = \int\limits_{t_1}^{t_2} dt\, \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\vec{v}^{\,2}(t)\right)$$

3. Energieerhaltung

- entlang eines infinitesimalen Wegstücks $d\vec{r}$ geleistete Arbeit:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}, \qquad \vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$$

- endlicher Weg $\mathcal{C}$: $\quad W_{\mathcal{C}} = \int\limits_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot \vec{F}$



Parametrisierung:

$$\mathcal{C}: \quad t \in [t_1, t_2] \mapsto \vec{r}(t), \quad \vec{r}(t_1) = \vec{r}_1, \quad \vec{r}(t_2) = \vec{r}_2$$

$$d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \vec{v}\, dt$$

$$\Rightarrow \quad W_{\mathcal{C}} = \int\limits_{t_1}^{t_2} dt\, \vec{v}(t) \cdot \vec{F}\left(\vec{r}(t), \vec{v}(t), t\right) \stackrel{\textbf{N2}}{=} \int\limits_{t_1}^{t_2} dt\, \vec{v}(t) \cdot m\dot{\vec{v}}(t) = \int\limits_{t_1}^{t_2} dt\, \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2} \vec{v}^{\,2}(t)\right)$$

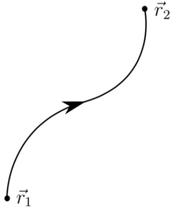
$$= \frac{m}{2} \vec{v}^{\,2}(t)\Big|_{t_1}^{t_2} = \frac{m}{2}\left(\vec{v}^{\,2}(t_2) - \vec{v}^{\,2}(t_1)\right)$$

▸ 3. Energieerhaltung

- entlang eines infinitesimalen Wegstücks $d\vec{r}$ geleistete Arbeit:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}, \qquad \vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$$

- endlicher Weg $\mathcal{C}$: $\quad W_\mathcal{C} = \int\limits_\mathcal{C} d\vec{r} \cdot \vec{F}$



Parametrisierung:

$$\mathcal{C}: \quad t \in [t_1, t_2] \mapsto \vec{r}(t), \quad \vec{r}(t_1) = \vec{r}_1, \quad \vec{r}(t_2) = \vec{r}_2$$

$$d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \vec{v}\, dt$$

$$\Rightarrow \quad W_\mathcal{C} = \int\limits_{t_1}^{t_2} dt\, \vec{v}(t) \cdot \vec{F}\left(\vec{r}(t), \vec{v}(t), t\right) \overset{\textbf{N2}}{=} \int\limits_{t_1}^{t_2} dt\, \vec{v}(t) \cdot m\dot{\vec{v}}(t) = \int\limits_{t_1}^{t_2} dt\, \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\vec{v}^{\,2}(t)\right)$$

$$= \frac{m}{2}\vec{v}^{\,2}(t)\Big|_{t_1}^{t_2} = \frac{m}{2}\left(\vec{v}^{\,2}(t_2) - \vec{v}^{\,2}(t_1)\right) \quad \longrightarrow \text{ kinetische Energie!}$$

kinetische Energie: $T = \frac{m}{2}\vec{v}^{\,2}$

$$\Rightarrow \quad W_{\mathcal{C}} = \underbrace{\int_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot \vec{F}}_{\uparrow} = \underbrace{T_2 - T_1}_{\uparrow}$$

durch die Kraft $\vec{F}$ entlang des Wegs $\mathcal{C}$ am Teilchen geleistete Arbeit	Differenz der kinetischen Energien des Teilchens am End- und Anfangspunkt von $\mathcal{C}$