1.4.2 Drehimpulssatz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

1.4.2 Drehimpulssatz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Definitionen:

- Gesamtdrehimpuls: $\vec{L} \equiv \sum_{i=1}^{N} \vec{L}^{(i)} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}^{(i)} \times \vec{p}^{(i)}$
- gesamtes äußeres Drehmoment: $\vec{N}_{ex} \equiv \sum_{i=1}^{N} \vec{r}^{(i)} \times \vec{F}_{ex}^{(i)}$

1.4.2 Drehimpulssatz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Definitionen:

- Gesamtdrehimpuls: $$\vec{L} \equiv \sum_{i=1}^{N} \vec{L}^{(i)} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}^{(i)} \times \vec{p}^{(i)}$$
- gesamtes äußeres Drehmoment: $$\vec{N}_{ex} \equiv \sum_{i=1}^{N} \vec{r}^{(i)} \times \vec{F}_{ex}^{(i)}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\vec{L}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt} \left(\vec{r}^{(i)} \times \vec{p}^{(i)} \right) = \sum_{i=1}^{N} \Big(\underbrace{\dot{\vec{r}}^{(i)} \times \vec{p}^{(i)}}_{\dot{\vec{r}}^{(i)} \times m_i \dot{\vec{r}}^{(i)} = \vec{0}} + \vec{r}^{(i)} \times \underbrace{\dot{\vec{p}}^{(i)}}_{\vec{F}^{(i)}} \Big)$$

1.4.2 Drehimpulssatz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Definitionen:

- Gesamtdrehimpuls: $\vec{L} \equiv \sum_{i=1}^{N} \vec{L}^{(i)} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}^{\,(i)} \times \vec{p}^{\,(i)}$
- gesamtes äußeres Drehmoment: $\vec{N}_{ex} \equiv \sum_{i=1}^{N} \vec{r}^{\,(i)} \times \vec{F}^{(i)}_{ex}$

$$\Rightarrow \quad \dot{\vec{L}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt}\left(\vec{r}^{\,(i)} \times \vec{p}^{\,(i)}\right) = \sum_{i=1}^{N} \Bigg(\underbrace{\dot{\vec{r}}^{\,(i)} \times \vec{p}^{\,(i)}}_{\dot{\vec{r}}^{\,(i)} \times m_i \dot{\vec{r}}^{\,(i)} = \vec{0}} + \vec{r}^{\,(i)} \times \underbrace{\dot{\vec{p}}^{\,(i)}}_{\vec{F}^{(i)}} \Bigg)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \vec{r}^{\,(i)} \times \Big(\vec{F}^{(i)}_{ex} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \vec{F}^{(ij)}\Big) = \vec{N}_{ex} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N} \vec{r}^{\,(i)} \times \vec{F}^{(ij)}$$

1.4.2 Drehimpulssatz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Definitionen:

- Gesamtdrehimpuls: $\vec{L} \equiv \sum_{i=1}^{N} \vec{L}^{(i)} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}^{\,(i)} \times \vec{p}^{\,(i)}$
- gesamtes äußeres Drehmoment: $\vec{N}_{ex} \equiv \sum_{i=1}^{N} \vec{r}^{\,(i)} \times \vec{F}_{ex}^{(i)}$

$$\Rightarrow \quad \dot{\vec{L}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt} \left(\vec{r}^{\,(i)} \times \vec{p}^{\,(i)} \right) = \sum_{i=1}^{N} \Bigg(\underbrace{\dot{\vec{r}}^{\,(i)} \times \vec{p}^{\,(i)}}_{\dot{\vec{r}}^{\,(i)} \times m_i \dot{\vec{r}}^{\,(i)} = \vec{0}} + \vec{r}^{\,(i)} \times \underbrace{\dot{\vec{p}}^{\,(i)}}_{\vec{F}^{(i)}} \Bigg)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \vec{r}^{\,(i)} \times \Big(\vec{F}_{ex}^{(i)} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \vec{F}^{(ij)} \Big) = \vec{N}_{ex} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N} \vec{r}^{\,(i)} \times \vec{F}^{(ij)}$$

$$= \vec{N}_{ex} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{N} \vec{r}^{\,(i)} \times \vec{F}^{(ij)} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^{N} \vec{r}^{\,(i)} \times \vec{F}^{(ij)}$$

1.4.2 Drehimpulssatz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Definitionen:

- Gesamtdrehimpuls: $\vec{L} \equiv \sum_{i=1}^{N} \vec{L}^{(i)} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}^{(i)} \times \vec{p}^{(i)}$
- gesamtes äußeres Drehmoment: $\vec{N}_{ex} \equiv \sum_{i=1}^{N} \vec{r}^{(i)} \times \vec{F}_{ex}^{(i)}$

$$\Rightarrow \quad \dot{\vec{L}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt}\left(\vec{r}^{(i)} \times \vec{p}^{(i)}\right) = \sum_{i=1}^{N}\Bigg(\underbrace{\dot{\vec{r}}^{(i)} \times \vec{p}^{(i)}}_{\dot{\vec{r}}^{(i)} \times m_i \dot{\vec{r}}^{(i)} = \vec{0}} + \vec{r}^{(i)} \times \underbrace{\dot{\vec{p}}^{(i)}}_{\vec{F}^{(i)}}\Bigg)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \vec{r}^{(i)} \times \Big(\vec{F}_{ex}^{(i)} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \vec{F}^{(ij)}\Big) = \vec{N}_{ex} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{N} \vec{r}^{(i)} \times \vec{F}^{(ij)}$$

$$= \vec{N}_{ex} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{N} \vec{r}^{(i)} \times \vec{F}^{(ij)} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^{N} \vec{r}^{(i)} \times \vec{F}^{(ij)} = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{N} \left(\vec{r}^{(i)} \times \vec{F}^{(ij)} + \vec{r}^{(j)} \times \vec{F}^{(ji)}\right)$$

$$\dot{\vec{L}} = \vec{N}_{ex} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{N} \left(\vec{r}^{\,(i)} \times \vec{F}^{(ij)} + \vec{r}^{\,(j)} \times \vec{F}^{(ji)} \right)$$

$$\dot{\vec{L}} = \vec{N}_{ex} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{N} \left(\vec{r}^{\,(i)} \times \vec{F}^{(ij)} + \vec{r}^{\,(j)} \times \vec{F}^{(ji)} \right) \overset{N3}{=} \vec{N}_{ex} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{N} \left(\vec{r}^{\,(i)} - \vec{r}^{\,(j)} \right) \times \vec{F}^{(ij)}$$

$$\dot{\vec{L}} = \vec{N}_{ex} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{N} \left(\vec{r}^{\,(i)} \times \vec{F}^{(ij)} + \vec{r}^{\,(j)} \times \vec{F}^{(ji)}\right) \overset{N3}{=} \vec{N}_{ex} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{N} \left(\vec{r}^{\,(i)} - \vec{r}^{\,(j)}\right) \times \vec{F}^{(ij)}$$

zentrale Zweiteilchen-Kräfte: $\vec{F}^{(ij)} \propto (\vec{r}^{\,(i)} - \vec{r}^{\,(i)})$

$$\dot{\vec{L}} = \vec{N}_{ex} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{N} \left(\vec{r}^{\,(i)} \times \vec{F}^{(ij)} + \vec{r}^{\,(j)} \times \vec{F}^{(ji)} \right) \overset{N3}{=} \vec{N}_{ex} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{N} \left(\vec{r}^{\,(i)} - \vec{r}^{\,(j)} \right) \times \vec{F}^{(ij)}$$

zentrale Zweiteilchen-Kräfte: $\vec{F}^{(ij)} \propto (\vec{r}^{\,(i)} - \vec{r}^{\,(i)})$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\dot{\vec{L}} = \vec{N}_{ex}}$$ für zentrale Zweiteilchen-Kräfte

Zerlegung der Ortsvektoren in Schwerpunktsvektor + Rest: $\vec{r}^{(i)} = \vec{R} + \vec{r}^{\,(i)\,\prime}$

Zerlegung der Ortsvektoren in Schwerpunktsvektor + Rest: $\vec{r}^{(i)} = \vec{R} + \vec{r}^{(i)\,\prime}$

$$\Rightarrow \; \vec{L} = \sum_i \left(\vec{R} + \vec{r}^{(i)\,\prime} \right) \times \vec{p}^{\,(i)}$$

Zerlegung der Ortsvektoren in Schwerpunktsvektor + Rest: $\vec{r}^{(i)} = \vec{R} + \vec{r}^{(i)\,\prime}$

$$\Rightarrow \vec{L} = \sum_i \left(\vec{R} + \vec{r}^{(i)\,\prime}\right) \times \vec{p}^{\,(i)}$$

$$= \vec{R} \times \sum_i \vec{p}^{\,(i)} + \sum_i \vec{r}^{\,(i)\,\prime} \times m_i \left(\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}^{\,(i)\,\prime}\right)$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Zerlegung der Ortsvektoren in Schwerpunktsvektor + Rest: $\vec{r}^{(i)} = \vec{R} + \vec{r}^{\,(i)\,\prime}$

$$\Rightarrow \vec{L} = \sum_i \left(\vec{R} + \vec{r}^{(i)\,\prime}\right) \times \vec{p}^{\,(i)}$$

$$= \vec{R} \times \sum_i \vec{p}^{\,(i)} + \sum_i \vec{r}^{\,(i)\,\prime} \times m_i \left(\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}^{\,(i)\,\prime}\right)$$

$$= \vec{R} \times \vec{P} + \left(\sum_i m_i \vec{r}^{\,(i)\,\prime}\right) \times \dot{\vec{R}} + \sum_i \vec{r}^{\,(i)\,\prime} \times m_i \dot{\vec{r}}^{\,(i)\,\prime}$$

Zerlegung der Ortsvektoren in Schwerpunktsvektor + Rest: $\vec{r}^{(i)} = \vec{R} + \vec{r}^{(i)\,\prime}$

$$\Rightarrow \vec{L} = \sum_i \left(\vec{R} + \vec{r}^{(i)\,\prime}\right) \times \vec{p}^{\,(i)}$$

$$= \vec{R} \times \sum_i \vec{p}^{\,(i)} + \sum_i \vec{r}^{\,(i)\,\prime} \times m_i \left(\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}^{\,(i)\,\prime}\right)$$

$$= \vec{R} \times \vec{P} + \left(\sum_i m_i \vec{r}^{\,(i)\,\prime}\right) \times \dot{\vec{R}} + \sum_i \vec{r}^{\,(i)\,\prime} \times m_i \dot{\vec{r}}^{\,(i)\,\prime}$$

$$M\vec{R} = \sum_i m_i \vec{r}^{\,(i)} = \sum_i m_i \vec{R} + \sum_i m_i \vec{r}^{\,(i)\,\prime} = M\vec{R} + \sum_i m_i \vec{r}^{\,(i)\,\prime} \quad \Rightarrow \quad \sum_i m_i \vec{r}^{\,(i)\,\prime} = \vec{0}$$

Zerlegung der Ortsvektoren in Schwerpunktsvektor + Rest: $\vec{r}^{(i)} = \vec{R} + \vec{r}^{(i)\,\prime}$

$$\Rightarrow \vec{L} = \sum_i \left(\vec{R} + \vec{r}^{(i)\,\prime}\right) \times \vec{p}^{\,(i)}$$

$$= \vec{R} \times \sum_i \vec{p}^{\,(i)} + \sum_i \vec{r}^{\,(i)\,\prime} \times m_i \left(\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}^{\,(i)\,\prime}\right)$$

$$= \vec{R} \times \vec{P} + \left(\sum_i m_i \vec{r}^{\,(i)\,\prime}\right) \times \dot{\vec{R}} + \sum_i \vec{r}^{\,(i)\,\prime} \times m_i \dot{\vec{r}}^{\,(i)\,\prime}$$

$$M\vec{R} = \sum_i m_i \vec{r}^{\,(i)} = \sum_i m_i \vec{R} + \sum_i m_i \vec{r}^{\,(i)\,\prime} = M\vec{R} + \sum_i m_i \vec{r}^{\,(i)\,\prime} \quad \Rightarrow \quad \sum_i m_i \vec{r}^{\,(i)\,\prime} = \vec{0}$$

Def: $\vec{p}^{\,(i)\,\prime} \equiv m_i \dot{\vec{r}}^{\,(i)\,\prime}$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Zerlegung der Ortsvektoren in Schwerpunktsvektor + Rest: $\vec{r}^{(i)} = \vec{R} + \vec{r}^{(i)\,\prime}$

$$\Rightarrow \vec{L} = \sum_i \left(\vec{R} + \vec{r}^{(i)\,\prime}\right) \times \vec{p}^{\,(i)}$$

$$= \vec{R} \times \sum_i \vec{p}^{\,(i)} + \sum_i \vec{r}^{\,(i)\,\prime} \times m_i \left(\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}^{\,(i)\,\prime}\right)$$

$$= \vec{R} \times \vec{P} + \left(\sum_i m_i \vec{r}^{\,(i)\,\prime}\right) \times \dot{\vec{R}} + \sum_i \vec{r}^{\,(i)\,\prime} \times m_i \dot{\vec{r}}^{\,(i)\,\prime}$$

$$M\vec{R} = \sum_i m_i \vec{r}^{\,(i)} = \sum_i m_i \vec{R} + \sum_i m_i \vec{r}^{\,(i)\,\prime} = M\vec{R} + \sum_i m_i \vec{r}^{\,(i)\,\prime} \quad \Rightarrow \quad \sum_i m_i \vec{r}^{\,(i)\,\prime} = \vec{0}$$

Def: $\vec{p}^{\,(i)\,\prime} \equiv m_i \dot{\vec{r}}^{\,(i)\,\prime}$

$$\Rightarrow \quad \vec{L} = \underbrace{\vec{R} \times \vec{P}}_{\text{„Bahn-Drehimpuls“}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \vec{r}^{\,(i)\,\prime} \times \vec{p}^{\,(i)\,\prime}}_{\text{„innerer Drehimpuls“, „Eigendrehimpuls“}}$$

1.4.3 Energiesatz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

1.4.3 Energiesatz

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Annahme: zentrale Zweiteilchenkäfte

$$\vec{F}^{(ij)} = f^{ij}(r_{ij})\,\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}, \quad \vec{r}_{ij} = \vec{r}^{\,(i)} - \vec{r}^{\,(j)}, \quad r_{ij} = \left|\vec{r}_{ij}\right|, \quad f^{ij}(r) = f^{ji}(r)$$

1.4.3 Energiesatz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Annahme: zentrale Zweiteilchenkäfte

$$\vec{F}^{(ij)} = f^{ij}(r_{ij})\,\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}, \quad \vec{r}_{ij} = \vec{r}^{\,(i)} - \vec{r}^{\,(j)}, \quad r_{ij} = |\vec{r}_{ij}|, \quad f^{ij}(r) = f^{ji}(r)$$

- $\vec{F}^{(ji)} = f^{ji}(r_{ji})\,\frac{\vec{r}_{ji}}{r_{ji}} = -f^{ij}(r_{ij})\,\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}} = -\vec{F}^{(ij)} \quad \checkmark$

1.4.3 Energiesatz

Annahme: zentrale Zweiteilchenkäfte

$$\vec{F}^{(ij)} = f^{ij}(r_{ij})\,\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}, \quad \vec{r}_{ij} = \vec{r}^{\,(i)} - \vec{r}^{\,(j)}, \quad r_{ij} = |\vec{r}_{ij}|, \quad f^{ij}(r) = f^{ji}(r)$$

- $\vec{F}^{(ji)} = f^{ji}(r_{ji})\,\frac{\vec{r}_{ji}}{r_{ji}} = -f^{ij}(r_{ij})\,\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}} = -\vec{F}^{(ij)} \quad \checkmark$
- lassen sich aus einem Potenzial ableiten, das nur vom Abstand abhängt:

$$\vec{F}^{(ij)} = -\vec{\nabla}^{(i)}\,V^{(ij)}, \quad V^{(ij)} = V^{(ij)}(r_{ij}) = V^{(ji)}(r_{ij}), \quad \vec{\nabla}^{(i)} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^{(i)}} \\ \frac{\partial}{\partial y^{(i)}} \\ \frac{\partial}{\partial z^{(i)}} \end{pmatrix} = \sum_k \vec{e}_k\,\frac{\partial}{\partial r_k^{(i)}}$$

1.4.3 Energiesatz

Annahme: zentrale Zweiteilchenkäfte

$$\vec{F}^{(ij)} = f^{ij}(r_{ij})\,\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}, \quad \vec{r}_{ij} = \vec{r}^{\,(i)} - \vec{r}^{\,(j)}, \quad r_{ij} = |\vec{r}_{ij}|, \quad f^{ij}(r) = f^{ji}(r)$$

- $\vec{F}^{(ji)} = f^{ji}(r_{ji})\,\frac{\vec{r}_{ji}}{r_{ji}} = -f^{ij}(r_{ij})\,\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}} = -\vec{F}^{(ij)} \quad \checkmark$
- lassen sich aus einem Potenzial ableiten, das nur vom Abstand abhängt:

$$\vec{F}^{(ij)} = -\vec{\nabla}^{(i)}\,V^{(ij)}, \quad V^{(ij)} = V^{(ij)}(r_{ij}) = V^{(ji)}(r_{ij}), \quad \vec{\nabla}^{(i)} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^{(i)}} \\ \frac{\partial}{\partial y^{(i)}} \\ \frac{\partial}{\partial z^{(i)}} \end{pmatrix} = \sum_k \vec{e}_k\,\frac{\partial}{\partial r_k^{(i)}}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}^{(ij)} = -\sum_k \vec{e}_k\,\frac{\partial}{\partial r_k^{(i)}}\,V^{(ij)}(r_{ij})$$

1.4.3 Energiesatz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Annahme: zentrale Zweiteilchenkäfte

$$\vec{F}^{(ij)} = f^{ij}(r_{ij})\,\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}, \quad \vec{r}_{ij} = \vec{r}^{\,(i)} - \vec{r}^{\,(j)}, \quad r_{ij} = |\vec{r}_{ij}|, \quad f^{ij}(r) = f^{ji}(r)$$

- $\vec{F}^{(ji)} = f^{ji}(r_{ji})\,\frac{\vec{r}_{ji}}{r_{ji}} = -f^{ij}(r_{ij})\,\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}} = -\vec{F}^{(ij)} \quad \checkmark$
- lassen sich aus einem Potenzial ableiten, das nur vom Abstand abhängt:

$$\vec{F}^{(ij)} = -\vec{\nabla}^{(i)}\,V^{(ij)}, \quad V^{(ij)} = V^{(ij)}(r_{ij}) = V^{(ji)}(r_{ij}), \quad \vec{\nabla}^{(i)} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^{(i)}} \\ \frac{\partial}{\partial y^{(i)}} \\ \frac{\partial}{\partial z^{(i)}} \end{pmatrix} = \sum_k \vec{e}_k\,\frac{\partial}{\partial r_k^{(i)}}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}^{(ij)} = -\sum_k \vec{e}_k\,\frac{\partial}{\partial r_k^{(i)}}\,V^{(ij)}(r_{ij}) = -\sum_k \vec{e}_k\,\frac{dV^{(ij)}(r_{ij})}{dr_{ij}}\,\frac{\partial r_{ij}}{\partial r_k^{(i)}} \equiv -V^{(ij)\prime}(r_{ij})\sum_k \vec{e}_k\,\frac{\partial r_{ij}}{\partial r_k^{(i)}}$$

1.4.3 Energiesatz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Annahme: zentrale Zweiteilchenkäfte

$$\vec{F}^{(ij)} = f^{ij}(r_{ij})\,\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}, \quad \vec{r}_{ij} = \vec{r}^{\,(i)} - \vec{r}^{\,(j)}, \quad r_{ij} = |\vec{r}_{ij}|, \quad f^{ij}(r) = f^{ji}(r)$$

- $\vec{F}^{(ji)} = f^{ji}(r_{ji})\,\frac{\vec{r}_{ji}}{r_{ji}} = -f^{ij}(r_{ij})\,\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}} = -\vec{F}^{(ij)} \quad \checkmark$
- lassen sich aus einem Potenzial ableiten, das nur vom Abstand abhängt:

$$\vec{F}^{(ij)} = -\vec{\nabla}^{(i)}\,V^{(ij)}, \quad V^{(ij)} = V^{(ij)}(r_{ij}) = V^{(ji)}(r_{ij}), \quad \vec{\nabla}^{(i)} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^{(i)}} \\ \frac{\partial}{\partial y^{(i)}} \\ \frac{\partial}{\partial z^{(i)}} \end{pmatrix} = \sum_k \vec{e}_k\,\frac{\partial}{\partial r_k^{(i)}}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}^{(ij)} = -\sum_k \vec{e}_k\,\frac{\partial}{\partial r_k^{(i)}}\,V^{(ij)}(r_{ij}) = -\sum_k \vec{e}_k\,\frac{dV^{(ij)}(r_{ij})}{dr_{ij}}\,\frac{\partial r_{ij}}{\partial r_k^{(i)}} \equiv -V^{(ij)\prime}(r_{ij})\sum_k \vec{e}_k\,\frac{\partial r_{ij}}{\partial r_k^{(i)}}$$

$$\frac{\partial r_{ij}}{\partial r_k^{(i)}} = \frac{\partial}{\partial r_k^{(i)}}\left(\sum_\ell \left(r_\ell^{(i)} - r_\ell^{(j)}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{r_k^{(i)} - r_k^{(j)}}{r_{ij}}$$

1.4.3 Energiesatz

Annahme: zentrale Zweiteilchenkäfte

$$\vec{F}^{(ij)} = f^{ij}(r_{ij})\,\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}, \quad \vec{r}_{ij} = \vec{r}^{\,(i)} - \vec{r}^{\,(j)}, \quad r_{ij} = \left|\vec{r}_{ij}\right|, \quad f^{ij}(r) = f^{ji}(r)$$

- $\vec{F}^{(ji)} = f^{ji}(r_{ji})\,\frac{\vec{r}_{ji}}{r_{ji}} = -f^{ij}(r_{ij})\,\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}} = -\vec{F}^{(ij)} \quad \checkmark$
- lassen sich aus einem Potenzial ableiten, das nur vom Abstand abhängt:

$$\vec{F}^{(ij)} = -\vec{\nabla}^{(i)}\,V^{(ij)}, \quad V^{(ij)} = V^{(ij)}(r_{ij}) = V^{(ji)}(r_{ij}), \quad \vec{\nabla}^{(i)} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^{(i)}} \\ \frac{\partial}{\partial y^{(i)}} \\ \frac{\partial}{\partial z^{(i)}} \end{pmatrix} = \sum_k \vec{e}_k\,\frac{\partial}{\partial r_k^{(i)}}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}^{(ij)} = -\sum_k \vec{e}_k\,\frac{\partial}{\partial r_k^{(i)}}\,V^{(ij)}(r_{ij}) \;=\; -\sum_k \vec{e}_k\,\frac{dV^{(ij)}(r_{ij})}{dr_{ij}}\,\frac{\partial r_{ij}}{\partial r_k^{(i)}} \equiv -V^{(ij)\prime}(r_{ij})\sum_k \vec{e}_k\,\frac{\partial r_{ij}}{\partial r_k^{(i)}}$$

$$\frac{\partial r_{ij}}{\partial r_k^{(i)}} = \frac{\partial}{\partial r_k^{(i)}}\left(\sum_\ell \left(r_\ell^{(i)} - r_\ell^{(j)}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{r_k^{(i)} - r_k^{(j)}}{r_{ij}}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}^{(ij)} = -V^{(ij)\prime}(r_{ij})\sum_k \vec{e}_k\,\frac{r_k^{(i)} - r_k^{(j)}}{r_{ij}} = -V^{(ij)\prime}(r_{ij})\,\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}$$

1.4.3 Energiesatz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Annahme: zentrale Zweiteilchenkäfte

$$\vec{F}^{(ij)} = f^{ij}(r_{ij})\,\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}, \quad \vec{r}_{ij} = \vec{r}^{\,(i)} - \vec{r}^{\,(j)}, \quad r_{ij} = |\vec{r}_{ij}|, \quad f^{ij}(r) = f^{ji}(r)$$

- $\vec{F}^{(ji)} = f^{ji}(r_{ji})\,\frac{\vec{r}_{ji}}{r_{ji}} = -f^{ij}(r_{ij})\,\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}} = -\vec{F}^{(ij)} \quad \checkmark$
- lassen sich aus einem Potenzial ableiten, das nur vom Abstand abhängt:

$$\vec{F}^{(ij)} = -\vec{\nabla}^{(i)}\,V^{(ij)}, \quad V^{(ij)} = V^{(ij)}(r_{ij}) = V^{(ji)}(r_{ij}), \quad \vec{\nabla}^{(i)} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^{(i)}} \\ \frac{\partial}{\partial y^{(i)}} \\ \frac{\partial}{\partial z^{(i)}} \end{pmatrix} = \sum_k \vec{e}_k\,\frac{\partial}{\partial r_k^{(i)}}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}^{(ij)} = -\sum_k \vec{e}_k\,\frac{\partial}{\partial r_k^{(i)}}\,V^{(ij)}(r_{ij}) = -\sum_k \vec{e}_k\,\frac{dV^{(ij)}(r_{ij})}{dr_{ij}}\,\frac{\partial r_{ij}}{\partial r_k^{(i)}} \equiv -V^{(ij)\prime}(r_{ij})\sum_k \vec{e}_k\,\frac{\partial r_{ij}}{\partial r_k^{(i)}}$$

$$\frac{\partial r_{ij}}{\partial r_k^{(i)}} = \frac{\partial}{\partial r_k^{(i)}}\left(\sum_\ell \left(r_\ell^{(i)} - r_\ell^{(j)}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{r_k^{(i)} - r_k^{(j)}}{r_{ij}}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}^{(ij)} = -V^{(ij)\prime}(r_{ij})\sum_k \vec{e}_k\,\frac{r_k^{(i)} - r_k^{(j)}}{r_{ij}} = -V^{(ij)\prime}(r_{ij})\,\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}} \qquad \Rightarrow \quad f^{ij}(r) = -V^{(ij)\prime}(r) \quad \checkmark$$

- zentrale Zweiteilchenkräfte + externe Kräfte:

$$m_i \ddot{\vec{r}}^{(i)} \overset{\text{N2}}{=} \sum_{j \neq i} \left(-\vec{\nabla}^{(i)} V^{(ij)} \right) + \vec{F}_{ex}^{(i)}$$

- zentrale Zweiteilchenkräfte + externe Kräfte:

$$m_i \ddot{\vec{r}}^{(i)} \overset{\text{N2}}{=} \sum_{j \neq i} \left(-\vec{\nabla}^{(i)} V^{(ij)} \right) + \vec{F}_{ex}^{(i)} \qquad \Big| \sum_i \dot{\vec{r}}^{(i)} \cdot$$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}^{(i)} \cdot \ddot{\vec{r}}^{(i)} = -\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N} \dot{\vec{r}}^{(i)} \cdot \vec{\nabla}^{(i)} V^{(ij)} + \sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{r}}^{(i)} \cdot \vec{F}_{ex}^{(i)}$$

- zentrale Zweiteilchenkräfte + externe Kräfte:

$$m_i \, \ddot{\vec{r}}^{(i)} \overset{\text{N2}}{=} \sum_{j \neq i} \left(-\vec{\nabla}^{(i)} V^{(ij)} \right) + \vec{F}_{ex}^{(i)} \qquad \Big| \sum_i \dot{\vec{r}}^{(i)} \cdot$$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \, \dot{\vec{r}}^{(i)} \cdot \ddot{\vec{r}}^{(i)} = -\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N} \dot{\vec{r}}^{(i)} \cdot \vec{\nabla}^{(i)} V^{(ij)} + \sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{r}}^{(i)} \cdot \vec{F}_{ex}^{(i)}$$

  - $m_i \, \dot{\vec{r}}^{(i)} \cdot \ddot{\vec{r}}^{(i)} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_i}{2} \vec{v}^{(i)2} \right)$

- zentrale Zweiteilchenkräfte + externe Kräfte:

$$m_i \ddot{\vec{r}}^{(i)} \overset{N2}{=} \sum_{j \neq i} \left(-\vec{\nabla}^{(i)} V^{(ij)} \right) + \vec{F}_{ex}^{(i)} \qquad \Big| \sum_i \dot{\vec{r}}^{(i)} \cdot$$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}^{(i)} \cdot \ddot{\vec{r}}^{(i)} = -\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N} \dot{\vec{r}}^{(i)} \cdot \vec{\nabla}^{(i)} V^{(ij)} + \sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{r}}^{(i)} \cdot \vec{F}_{ex}^{(i)}$$

  - $m_i \dot{\vec{r}}^{(i)} \cdot \ddot{\vec{r}}^{(i)} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_i}{2} \vec{v}^{(i)2} \right)$
  - $-\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N} \dot{\vec{r}}^{(i)} \cdot \vec{\nabla}^{(i)} V^{(ij)} = -\sum_{i<j} \left(\dot{\vec{r}}^{(i)} \cdot \vec{\nabla}^{(i)} + \dot{\vec{r}}^{(j)} \cdot \vec{\nabla}^{(j)} \right) V^{(ij)} = -\sum_{i<j} \frac{d}{dt} V^{(ij)}$

- zentrale Zweiteilchenkräfte + externe Kräfte:

$$m_i \ddot{\vec{r}}^{(i)} \overset{\text{N2}}{=} \sum_{j \neq i} \left(-\vec{\nabla}^{(i)} V^{(ij)} \right) + \vec{F}_{ex}^{(i)} \qquad \Big| \sum_i \dot{\vec{r}}^{(i)} \cdot$$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}^{(i)} \cdot \ddot{\vec{r}}^{(i)} = -\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N} \dot{\vec{r}}^{(i)} \cdot \vec{\nabla}^{(i)} V^{(ij)} + \sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{r}}^{(i)} \cdot \vec{F}_{ex}^{(i)}$$

  - $m_i \dot{\vec{r}}^{(i)} \cdot \ddot{\vec{r}}^{(i)} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_i}{2} \vec{v}^{(i)2} \right)$
  - $-\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N} \dot{\vec{r}}^{(i)} \cdot \vec{\nabla}^{(i)} V^{(ij)} = -\sum_{i<j} \left(\dot{\vec{r}}^{(i)} \cdot \vec{\nabla}^{(i)} + \dot{\vec{r}}^{(j)} \cdot \vec{\nabla}^{(j)} \right) V^{(ij)} = -\sum_{i<j} \frac{d}{dt} V^{(ij)}$

    denn: $\frac{d}{dt} V^{(ij)} = \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\partial V^{(ij)}}{\partial r_k^{(i)}} \dot{r}_k^{(i)} + \frac{\partial V^{(ij)}}{\partial r_k^{(j)}} \dot{r}_k^{(j)} \right) = \left(\dot{\vec{r}}^{(i)} \cdot \vec{\nabla}^{(i)} + \dot{\vec{r}}^{(j)} \cdot \vec{\nabla}^{(j)} \right) V^{(ij)}$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{m_i}{2} \vec{v}^{\,(i)^2} \right) = -\frac{d}{dt} \sum_{i<j} V^{(ij)} + \sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{r}}^{\,(i)} \cdot \vec{F}_{ex}^{(i)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{m_i}{2} \vec{v}^{\,(i)2} \right) = -\frac{d}{dt} \sum_{i<j} V^{(ij)} + \sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{r}}^{\,(i)} \cdot \vec{F}_{ex}^{(i)}$$

→ Energiesatz:

$$\boxed{\frac{dE}{dt} \equiv \frac{d}{dt}(T + V) = \sum_{i=1}^{N} \vec{v}^{\,(i)} \cdot \vec{F}_{ex}^{(i)}}$$

- $T = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{m_i}{2} \vec{v}^{\,(i)2} \right)$ kinetische Energie des Gesamtsystems
- $V = \sum_{i<j} V^{(ij)}$ innere potenzielle Energie
- $E = T + V$ „innere Energie“

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{m_i}{2}\vec{v}^{\,(i)2}\right) = -\frac{d}{dt}\sum_{i<j} V^{(ij)} + \sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{r}}^{\,(i)} \cdot \vec{F}_{ex}^{(i)}$$

→ Energiesatz: $$\boxed{\frac{dE}{dt} \equiv \frac{d}{dt}(T+V) = \sum_{i=1}^{N} \vec{v}^{\,(i)} \cdot \vec{F}_{ex}^{(i)}}$$

- $T = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{m_i}{2}\vec{v}^{\,(i)2}\right)$ kinetische Energie des Gesamtsystems
- $V = \sum_{i<j} V^{(ij)}$ innere potenzielle Energie
- $E = T + V$ „innere Energie“
- $\sum_{i=1}^{N} \vec{v}^{\,(i)} \cdot \vec{F}_{ex}^{(i)}$ Leistung (Arbeit pro Zeit) der externen Kräfte

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{m_i}{2}\vec{v}^{\,(i)^2}\right) = -\frac{d}{dt}\sum_{i<j}V^{(ij)} + \sum_{i=1}^{N}\dot{\vec{r}}^{\,(i)}\cdot\vec{F}_{ex}^{(i)}$$

→ Energiesatz:

$$\boxed{\frac{dE}{dt} \equiv \frac{d}{dt}(T+V) = \sum_{i=1}^{N}\vec{v}^{\,(i)}\cdot\vec{F}_{ex}^{(i)}}$$

- $T = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{m_i}{2}\vec{v}^{\,(i)^2}\right)$ kinetische Energie des Gesamtsystems
- $V = \sum_{i<j}V^{(ij)}$ innere potenzielle Energie
- $E = T + V$ „innere Energie“
- $\sum_{i=1}^{N}\vec{v}^{\,(i)}\cdot\vec{F}_{ex}^{(i)}$ Leistung (Arbeit pro Zeit) der externen Kräfte

$$\left(dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{dW}{dt} = \vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}\right)$$

1.4.4 Abgeschlossene Systeme

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

1.4.4 Abgeschlossene Systeme

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

abgeschlossen: $F_{ex}^{(i)} = \vec{0} \quad \Rightarrow \ \vec{N}_{ex} = \vec{0}$

zusätzliche Annnahme: zentrale innere Zweiteilchenkräfte

1.4.4 Abgeschlossene Systeme

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

abgeschlossen: $\vec{F}_{ex}^{(i)} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{N}_{ex} = \vec{0}$

zusätzliche Annnahme: zentrale innere Zweiteilchenkräfte

→ Erhaltungsgrößen:

- Gesamtimpuls: $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = const.$
- Gesamtdrehimpuls: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = const.$
- innere Energie: $\frac{d}{dt}(T + V) = 0 \quad \Rightarrow \quad E = T + V = const.$

1.4.4 Abgeschlossene Systeme

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Erhaltungsgrößen:

- Gesamtimpuls: $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = const.$
- Gesamtdrehimpuls: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = const.$
- innere Energie: $\frac{d}{dt}\,(T + V) = 0 \quad \Rightarrow \quad E = T + V = const.$

1.4.4 Abgeschlossene Systeme

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Erhaltungsgrößen:

- Gesamtimpuls: $$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = const.$$
  $$\vec{P} = M\dot{\vec{R}} \quad \Rightarrow \quad \vec{R}(t) = \vec{R}_0 + \tfrac{1}{M}\vec{P}t$$
- Gesamtdrehimpuls: $$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = const.$$
- innere Energie: $$\frac{d}{dt}\,(T + V) = 0 \quad \Rightarrow \quad E = T + V = const.$$

1.4.4 Abgeschlossene Systeme

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Erhaltungsgrößen:

- Gesamtimpuls: $$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = const.$$
$$\vec{P} = M\dot{\vec{R}} \quad \Rightarrow \quad \vec{R}(t) = \vec{R}_0 + \tfrac{1}{M}\vec{P}t$$

- Gesamtdrehimpuls: $$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = const.$$
$$\vec{L} = \vec{R} \times \vec{P} + \vec{L}_{in} \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \underbrace{\vec{R}_0 \times \vec{P}}_{=const.} + \tfrac{1}{M}t\,\underbrace{\vec{P} \times \vec{P}}_{=\vec{0}} + \vec{L}_{in} = const. \quad \Rightarrow \quad \vec{L}_{in} = const.$$

- innere Energie: $$\frac{d}{dt}\,(T + V) = 0 \quad \Rightarrow \quad E = T + V = const.$$

1.4.4 Abgeschlossene Systeme

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Erhaltungsgrößen:

- Gesamtimpuls: $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = const.$

$$\vec{P} = M\dot{\vec{R}} \quad \Rightarrow \quad \vec{R}(t) = \vec{R}_0 + \tfrac{1}{M}\vec{P}t$$

- Gesamtdrehimpuls: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = const.$

$$\vec{L} = \vec{R} \times \vec{P} + \vec{L}_{in} \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \underbrace{\vec{R}_0 \times \vec{P}}_{=const.} + \tfrac{1}{M}t\,\underbrace{\vec{P} \times \vec{P}}_{=\vec{0}} + \vec{L}_{in} = const. \quad \Rightarrow \quad \vec{L}_{in} = const.$$

- innere Energie: $\frac{d}{dt}(T + V) = 0 \quad \Rightarrow \quad E = T + V = const.$

→ 10 Erhaltungsgrößen: $\underbrace{\vec{R}_0,\ \vec{P},\ \vec{L}\,(\text{oder } \vec{L}_{in}),}_{\text{jeweils 3 Komponenten}}\ E$