- große Halbachse (s. vorige Seite): $a = \frac{p}{1-\varepsilon^2}$

- große Halbachse (s. vorige Seite): $a = \frac{p}{1-\varepsilon^2}$
- kleine Halbachse (s. Übung): $b^2 = ap$

- große Halbachse (s. vorige Seite): $a = \frac{p}{1-\varepsilon^2}$
- kleine Halbachse (s. Übung): $b^2 = ap$
- Flächeninhalt einer Ellipse: $A = \pi ab$

- große Halbachse (s. vorige Seite): $a = \frac{p}{1-\varepsilon^2}$
- kleine Halbachse (s. Übung): $b^2 = ap$
- Flächeninhalt einer Ellipse: $A = \pi ab$
- 2. Kepler'sches Gesetz: $\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} \quad \Rightarrow \quad dA = \frac{L}{2m} dt$

- große Halbachse (s. vorige Seite): $a = \frac{p}{1-\varepsilon^2}$
- kleine Halbachse (s. Übung): $b^2 = ap$
- Flächeninhalt einer Ellipse: $A = \pi ab$
- 2. Kepler'sches Gesetz: $\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} \quad \Rightarrow \quad dA = \frac{L}{2m} dt$

  Integration über einen Umlauf:

$$A = \int_{\text{Ellipse}} dA = \int_0^T dt\, \frac{L}{2m} = \frac{L}{2m}\, T \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2m}{L}\, A$$

- große Halbachse (s. vorige Seite): $a = \frac{p}{1-\varepsilon^2}$
- kleine Halbachse (s. Übung): $b^2 = ap$
- Flächeninhalt einer Ellipse: $A = \pi ab$
- 2. Kepler'sches Gesetz: $\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} \quad \Rightarrow \quad dA = \frac{L}{2m} dt$

  Integration über einen Umlauf:

$$A = \int\limits_{\text{Ellipse}} dA = \int_0^T dt \, \frac{L}{2m} = \frac{L}{2m} T \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2m}{L} A = \frac{2m}{L} \pi ab = \frac{2m}{L} \pi \sqrt{p} \, a^{3/2}$$

- große Halbachse (s. vorige Seite): $a = \frac{p}{1-\varepsilon^2}$
- kleine Halbachse (s. Übung): $b^2 = ap$
- Flächeninhalt einer Ellipse: $A = \pi ab$
- 2. Kepler'sches Gesetz: $\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} \quad \Rightarrow \quad dA = \frac{L}{2m} dt$

  Integration über einen Umlauf:

$$A = \int_{\text{Ellipse}} dA = \int_0^T dt \, \frac{L}{2m} = \frac{L}{2m} T \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2m}{L} A = \frac{2m}{L} \pi ab = \frac{2m}{L} \pi \sqrt{p} \, a^{3/2}$$

- $p = \frac{L^2}{m\kappa} = \frac{L^2}{GMm^2}$

- große Halbachse (s. vorige Seite): $a = \frac{p}{1-\varepsilon^2}$
- kleine Halbachse (s. Übung): $b^2 = ap$
- Flächeninhalt einer Ellipse: $A = \pi ab$
- 2. Kepler'sches Gesetz: $\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} \quad \Rightarrow \quad dA = \frac{L}{2m} dt$

  Integration über einen Umlauf:

$$A = \int_{\text{Ellipse}} dA = \int_0^T dt \, \frac{L}{2m} = \frac{L}{2m} T \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2m}{L} A = \frac{2m}{L} \pi ab = \frac{2m}{L} \pi \sqrt{p} \, a^{3/2}$$

- $p = \frac{L^2}{m\kappa} = \frac{L^2}{GMm^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} a^{3/2}}$

- große Halbachse (s. vorige Seite): $a = \frac{p}{1-\varepsilon^2}$
- kleine Halbachse (s. Übung): $b^2 = ap$
- Flächeninhalt einer Ellipse: $A = \pi ab$
- 2. Kepler'sches Gesetz: $\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} \quad \Rightarrow \quad dA = \frac{L}{2m} dt$

  Integration über einen Umlauf:

$$A = \int_{\text{Ellipse}} dA = \int_0^T dt \, \frac{L}{2m} = \frac{L}{2m} T \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2m}{L} A = \frac{2m}{L} \pi ab = \frac{2m}{L} \pi \sqrt{p}\, a^{3/2}$$

- $p = \frac{L^2}{m\kappa} = \frac{L^2}{GMm^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} a^{3/2}}$ hängt nur von $M \approx M_\odot$ ab!

- große Halbachse (s. vorige Seite): $a = \frac{p}{1-\varepsilon^2}$
- kleine Halbachse (s. Übung): $b^2 = ap$
- Flächeninhalt einer Ellipse: $A = \pi ab$
- 2. Kepler'sches Gesetz: $\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} \quad \Rightarrow \quad dA = \frac{L}{2m} dt$

  Integration über einen Umlauf:

$$A = \int_{\text{Ellipse}} dA = \int_0^T dt \, \frac{L}{2m} = \frac{L}{2m} T \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2m}{L} A = \frac{2m}{L} \pi ab = \frac{2m}{L} \pi \sqrt{p}\, a^{3/2}$$

- $p = \frac{L^2}{m\kappa} = \frac{L^2}{GMm^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} a^{3/2}}$ hängt nur von $M \approx M_\odot$ ab!

→ 3. Kepler'sches Gesetz:

Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen der großen Halbachsen ihrer Ellipsenbahnen.

2.5 Streuung im Zentralkraftfeld

2.5 Streuung im Zentralkraftfeld

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Streuexperiment:

  Teilchenstrahl („Projektil“) wird auf andere Teilchen („Target“) gerichtet und durch die Wechselwirkung abgelenkt.

2.5 Streuung im Zentralkraftfeld

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Streuexperiment:

  Teilchenstrahl („Projektil“) wird auf andere Teilchen („Target“) gerichtet und durch die Wechselwirkung abgelenkt.

- Winkelverteilung der gestreuten Teilchen

  $\rightarrow$ Rückschlüsse über die Wechselwirkung

2.5 Streuung im Zentralkraftfeld

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Streuexperiment:

  Teilchenstrahl („Projektil“) wird auf andere Teilchen („Target“) gerichtet und durch die Wechselwirkung abgelenkt.

- Winkelverteilung der gestreuten Teilchen

  → Rückschlüsse über die Wechselwirkung

- Vereinfachende Annahme:

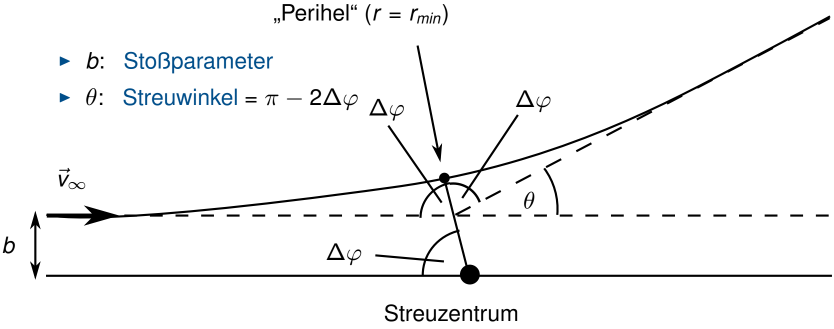
  1 Projektil- + 1 Target-Teilchen mit zentraler Zweiteilchenkraft

  → Streuung eines Teilchens mit reduzierter Masse μ am Zentralpotenzial $V(r)$

- weitere Annahmen:
  - Kraft für $r \to \infty$ vernachlässigbar

    $\Rightarrow$ Teilchen läuft geradlinig gleichförmig ein und aus
  - Anfangsgeschwindigkeit: $\vec{v}_\infty$

- b: Stoßparameter
- θ: Streuwinkel $= \pi - 2\Delta\varphi$



- Wähle $V(r \to \infty) = 0 \quad \Rightarrow$ Energie: $E = T_\infty = \frac{1}{2}\mu v_\infty^2$

- Wähle $V(r \to \infty) = 0 \quad \Rightarrow$ Energie: $E = T_\infty = \frac{1}{2}\mu v_\infty^2$
- Drehimpuls: $L = |\vec{r} \times \mu\vec{v}| \underset{\uparrow}{=} b\mu v_\infty$

  Auswertung für $r \to \infty$, nur $\vec{r}$-Komponente $\perp$ $\vec{v}$ trägt bei

- Wähle $V(r \to \infty) = 0 \quad \Rightarrow$ Energie: $E = T_\infty = \frac{1}{2}\mu v_\infty^2$
- Drehimpuls: $L = |\vec{r} \times \mu\vec{v}| \underset{\uparrow}{=} b\mu v_\infty = b\sqrt{2\mu E}$

  Auswertung für $r \to \infty$, nur $\vec{r}$-Komponente $\perp$ $\vec{v}$ trägt bei

- Wähle $V(r \to \infty) = 0 \quad \Rightarrow$ Energie: $E = T_\infty = \frac{1}{2}\mu v_\infty^2$
- Drehimpuls: $L = |\vec{r} \times \mu\vec{v}| \underset{\uparrow}{=} b\mu v_\infty = b\sqrt{2\mu E}$

  Auswertung für $r \to \infty$, nur $\vec{r}$-Komponente $\perp$ $\vec{v}$ trägt bei

- Winkeländerung:

  $$\Delta\varphi = |\varphi(r_{min}) - \varphi(r \to \infty)|$$

- Wähle $V(r \to \infty) = 0 \quad \Rightarrow$ Energie: $E = T_\infty = \frac{1}{2}\mu v_\infty^2$
- Drehimpuls: $L = |\vec{r} \times \mu\vec{v}| = b\mu v_\infty = b\sqrt{2\mu E}$

  $\uparrow$

  Auswertung für $r \to \infty$, nur $\vec{r}$-Komponente $\perp$ $\vec{v}$ trägt bei

- Winkeländerung:

$$\Delta\varphi = |\varphi(r_{min}) - \varphi(r \to \infty)| \overset{\text{Abschnitt 2.3}}{=} \frac{L}{\sqrt{2\mu}} \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2\sqrt{E - V_{eff}(r)}} = b \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2\sqrt{1 - \frac{V_{eff}(r)}{E}}}$$

- Wähle $V(r \to \infty) = 0 \quad \Rightarrow$ Energie: $E = T_\infty = \frac{1}{2}\mu v_\infty^2$
- Drehimpuls: $L = |\vec{r} \times \mu\vec{v}| \underset{\uparrow}{=} b\mu v_\infty = b\sqrt{2\mu E}$

  Auswertung für $r \to \infty$, nur $\vec{r}$-Komponente $\perp$ $\vec{v}$ trägt bei

- Winkeländerung:

$$\Delta\varphi = |\varphi(r_{min}) - \varphi(r \to \infty)| \overset{\text{Abschnitt 2.3}}{=} \frac{L}{\sqrt{2\mu}} \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2\sqrt{E - V_{eff}(r)}} = b \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2\sqrt{1 - \frac{V_{eff}(r)}{E}}}$$

$$V_{eff} = V + \frac{L^2}{2\mu r^2} = V + \frac{Eb^2}{r^2}$$

- Wähle $V(r \to \infty) = 0 \quad \Rightarrow$ Energie: $E = T_\infty = \frac{1}{2}\mu v_\infty^2$
- Drehimpuls: $L = |\vec{r} \times \mu \vec{v}| = b\mu v_\infty = b\sqrt{2\mu E}$

  $\uparrow$

  Auswertung für $r \to \infty$, nur $\vec{r}$-Komponente $\perp$ $\vec{v}$ trägt bei

- Winkeländerung:

$$\Delta\varphi = |\varphi(r_{min}) - \varphi(r \to \infty)| \overset{\text{Abschnitt 2.3}}{=} \frac{L}{\sqrt{2\mu}} \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2\sqrt{E - V_{eff}(r)}} = b \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2\sqrt{1 - \frac{V_{eff}(r)}{E}}}$$

$$V_{eff} = V + \frac{L^2}{2\mu r^2} = V + \frac{Eb^2}{r^2}$$

$\longrightarrow$ Streuwinkel: $\theta(b) = \pi - 2b \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2\sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{V(r)}{E}}}$ (beachte: $r_{min} = r_{min}(E, b)$)

- Wähle $V(r \to \infty) = 0 \quad \Rightarrow$ Energie: $E = T_\infty = \frac{1}{2}\mu v_\infty^2$
- Drehimpuls: $L = |\vec{r} \times \mu\vec{v}| \underset{\uparrow}{=} b\mu v_\infty = b\sqrt{2\mu E}$

  Auswertung für $r \to \infty$, nur $\vec{r}$-Komponente $\perp$ $\vec{v}$ trägt bei

- Winkeländerung:

$$\Delta\varphi = |\varphi(r_{min}) - \varphi(r \to \infty)| \overset{\text{Abschnitt 2.3}}{=} \frac{L}{\sqrt{2\mu}} \int\limits_{r_{min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2\sqrt{E - V_{eff}(r)}} = b \int\limits_{r_{min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2\sqrt{1 - \frac{V_{eff}(r)}{E}}}$$

$$V_{eff} = V + \frac{L^2}{2\mu r^2} = V + \frac{Eb^2}{r^2}$$

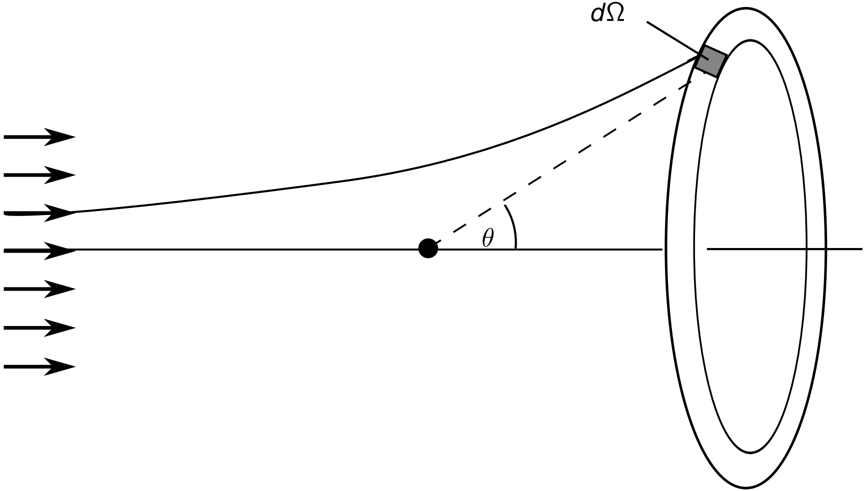
$\to$ Streuwinkel: $\theta(b) = \pi - 2b \int\limits_{r_{min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2\sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{V(r)}{E}}}$ (beachte: $r_{min} = r_{min}(E, b)$)

- bekanntes $V(r)$ und E, b vorgegeben $\to$ Vorhersage für θ
- E, b vorgegeben, θ gemessen $\to$ Rückschlüsse über V

- reale Streuexperimente an mikroskopischen Teilchen:
  Mittelung über Teilchenstrahl mit gleichem $\vec{v}_\infty$

- reale Streuexperimente an mikroskopischen Teilchen:
  Mittelung über Teilchenstrahl mit gleichem $\vec{v}_\infty$
- Teilchenstromdichte: $j = \frac{\text{Zahl der einlaufenden Teilchen}}{\text{Fläche} \cdot \text{Zeit}}$

- reale Streuexperimente an mikroskopischen Teilchen:
  Mittelung über Teilchenstrahl mit gleichem $\vec{v}_\infty$
- Teilchenstromdichte: $j = \frac{\text{Zahl der einlaufenden Teilchen}}{\text{Fläche}\cdot\text{Zeit}}$
- Man misst: $dN = \frac{\text{Zahl der in das Raumwinkelelement } d\Omega \text{ gestreuten Teilchen}}{\text{Zeit}}$


$d\Omega$
θ

- reale Streuexperimente an mikroskopischen Teilchen:
  Mittelung über Teilchenstrahl mit gleichem $\vec{v}_\infty$
- Teilchenstromdichte: $j = \frac{\text{Zahl der einlaufenden Teilchen}}{\text{Fläche}\cdot\text{Zeit}}$
- Man misst: $dN = \frac{\text{Zahl der in das Raumwinkelelement } d\Omega \text{ gestreuten Teilchen}}{\text{Zeit}}$

- reale Streuexperimente an mikroskopischen Teilchen:
  Mittelung über Teilchenstrahl mit gleichem $\vec{v}_\infty$

- Teilchenstromdichte: $j = \frac{\text{Zahl der einlaufenden Teilchen}}{\text{Fläche}\cdot\text{Zeit}}$

- Man misst: $dN = \frac{\text{Zahl der in das Raumwinkelelement } d\Omega \text{ gestreuten Teilchen}}{\text{Zeit}}$

  und definiert:

$$d\sigma = \frac{dN}{j} = \frac{\text{Zahl der in das Raumwinkelelement } d\Omega \text{ gestreuten Teilchen pro Zeit}}{\text{Zahl der einlaufenden Teilchen pro Fläche und Zeit}}\,, \qquad [d\sigma] = \text{Fläche}$$

- reale Streuexperimente an mikroskopischen Teilchen:
  Mittelung über Teilchenstrahl mit gleichem $\vec{v}_\infty$

- Teilchenstromdichte: $j = \dfrac{\text{Zahl der einlaufenden Teilchen}}{\text{Fläche}\cdot\text{Zeit}}$

- Man misst: $dN = \dfrac{\text{Zahl der in das Raumwinkelelement } d\Omega \text{ gestreuten Teilchen}}{\text{Zeit}}$

  und definiert:

$$d\sigma = \frac{dN}{j} = \frac{\text{Zahl der in das Raumwinkelelement } d\Omega \text{ gestreuten Teilchen pro Zeit}}{\text{Zahl der einlaufenden Teilchen pro Fläche und Zeit}}\,, \qquad [d\sigma] = \text{Fläche}$$

$$= \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega, \qquad \frac{d\sigma}{d\Omega} : \text{„differenzieller Wirkungsquerschnitt“}$$

- reale Streuexperimente an mikroskopischen Teilchen:
  Mittelung über Teilchenstrahl mit gleichem $\vec{v}_\infty$

- Teilchenstromdichte: $j = \frac{\text{Zahl der einlaufenden Teilchen}}{\text{Fläche}\cdot\text{Zeit}}$

- Man misst: $dN = \frac{\text{Zahl der in das Raumwinkelelement } d\Omega \text{ gestreuten Teilchen}}{\text{Zeit}}$

  und definiert:

$$d\sigma = \frac{dN}{j} = \frac{\text{Zahl der in das Raumwinkelelement } d\Omega \text{ gestreuten Teilchen pro Zeit}}{\text{Zahl der einlaufenden Teilchen pro Fläche und Zeit}}\,, \qquad [d\sigma] = \text{Fläche}$$

$$= \frac{d\sigma}{d\Omega}d\Omega, \qquad \frac{d\sigma}{d\Omega} : \text{„differenzieller Wirkungsquerschnitt“}$$

- totaler Wirkungsquerschnitt: $\sigma = \int d\Omega \, \frac{d\sigma}{d\Omega}$

Wirkungsquerschnitt

- (differenzieller) Wirkungsquerschnitt = $\dfrac{\text{„interessante" Ereignisse pro Zeit}}{\text{einlaufende Projektilteilchen pro Zeit und Fläche}}$

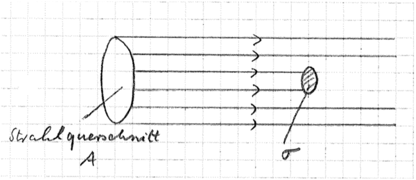
  → Dimension = Fläche

Wirkungsquerschnitt

- (differenzieller) Wirkungsquerschnitt = $\dfrac{\text{„interessante" Ereignisse pro Zeit}}{\text{einlaufende Projektilteilchen pro Zeit und Fläche}}$

  $\rightarrow$ Dimension = Fläche

- anschaulich:



Zahl der „Ereignisse":

$N_{\text{abs}} = \frac{\sigma}{A} N_{\text{einl}}$

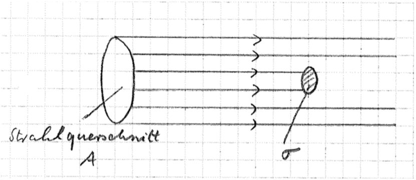
$\Leftrightarrow \quad \sigma = \dfrac{N_{\text{abs}}}{N_{\text{einl}}/A}$

Wirkungsquerschnitt

- (differenzieller) Wirkungsquerschnitt = $\dfrac{\text{„interessante" Ereignisse pro Zeit}}{\text{einlaufende Projektilteilchen pro Zeit und Fläche}}$

  → Dimension = Fläche

- anschaulich:



Zahl der „Ereignisse":

$$N_{\text{abs}} = \frac{\sigma}{A} N_{\text{einl}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sigma = \frac{N_{\text{abs}}}{N_{\text{einl}}/A}$$

- häufig verwendete Einheit: 1b = 1 barn („Scheune")

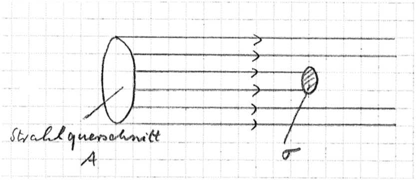
Wirkungsquerschnitt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- (differenzieller) Wirkungsquerschnitt = $\dfrac{\text{„interessante" Ereignisse pro Zeit}}{\text{einlaufende Projektilteilchen pro Zeit und Fläche}}$

  $\rightarrow$ Dimension = Fläche

- anschaulich:



Zahl der „Ereignisse":

$$N_{\text{abs}} = \frac{\sigma}{A} N_{\text{einl}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sigma = \frac{N_{\text{abs}}}{N_{\text{einl}}/A}$$

- häufig verwendete Einheit: 1 b = 1 barn („Scheune")

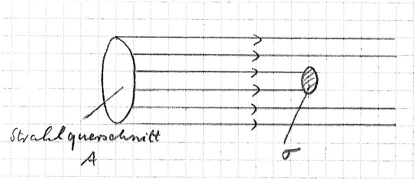
  $= 10^{-24}\text{cm}^2 = 100\,\text{fm}^2$

Wirkungsquerschnitt

- (differenzieller) Wirkungsquerschnitt = $\dfrac{\text{„interessante" Ereignisse pro Zeit}}{\text{einlaufende Projektilteilchen pro Zeit und Fläche}}$

  $\rightarrow$ Dimension = Fläche

- anschaulich:



Zahl der „Ereignisse":

$$N_{\text{abs}} = \frac{\sigma}{A} N_{\text{einl}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sigma = \frac{N_{\text{abs}}}{N_{\text{einl}}/A}$$

- häufig verwendete Einheit: 1b = 1 barn („Scheune")

  $= 10^{-24}\text{cm}^2 = 100\,\text{fm}^2 \quad = \pi R^2 \rightarrow R = 5.6$ fm (größerer Atomkern)

- Kugelsymmetrie von $V(r) \quad \Rightarrow \quad$ Axialsymmetrie um die Strahlachse

- Kugelsymmetrie von $V(r)$ $\Rightarrow$ Axialsymmetrie um die Strahlachse
  - → Fasse Raumwinkel mit gleichem θ zusammen:

$$d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \, \sin\theta \, d\theta = 2\pi \, \sin\theta \, d\theta$$

- Kugelsymmetrie von $V(r)$ $\Rightarrow$ Axialsymmetrie um die Strahlachse

  → Fasse Raumwinkel mit gleichem θ zusammen:

$$d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \, \sin\theta \, d\theta = 2\pi \, \sin\theta \, d\theta$$

- Achtung: Wechsel des Koordinatensystems!
  - effektives Einteilchenproblem: Polarkoordinaten in der xy-Ebene
  - Teilchenstrahl: dreidim. Koordinaten, Strahlrichtung = z-Richtung

    Kugelkoordinaten: $\theta \equiv$ Streuwinkel, $\varphi \neq \varphi(2D)$

- Kugelsymmetrie von $V(r) \quad \Rightarrow \quad$ Axialsymmetrie um die Strahlachse

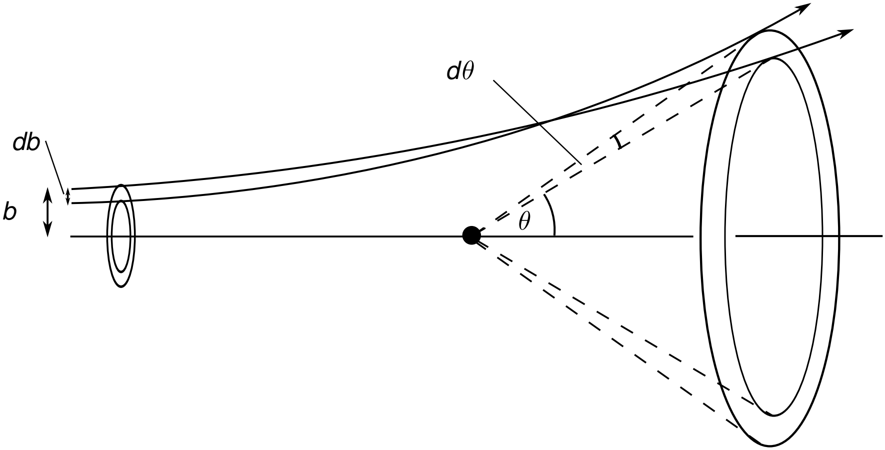
  → Fasse Raumwinkel mit gleichem θ zusammen:

$$d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \, \sin\theta \, d\theta = 2\pi \, \sin\theta \, d\theta$$

- Achtung: Wechsel des Koordinatensystems!
  - effektives Einteilchenproblem: Polarkoordinaten in der xy-Ebene
  - Teilchenstrahl: dreidim. Koordinaten, Strahlrichtung = z-Richtung
    Kugelkoordinaten: $\theta \equiv$ Streuwinkel, $\varphi \neq \varphi(2D)$

- Wie gesehen: $\theta = \theta(b)$ (für festes E)

  $\Rightarrow$ Teilchen, die in das Winkelintervall $[\theta, \theta + d\theta]$ gestreut werden,
  sind vorher durch einen Ring $[b, b + db]$ eingelaufen.



dθ
db
b
θ
r

$\Rightarrow$ dN = in das Winkelintervall $[\theta, \theta + d\theta]$ gestreute Teilchen pro Zeit

= durch den Ring $[b, b + db]$ eingelaufene Teilchen pro Zeit

$$\begin{aligned}\Rightarrow \quad dN &= \text{in das Winkelintervall } [\theta, \theta + d\theta] \text{ gestreute Teilchen pro Zeit} \\ &= \text{durch den Ring } [b, b + db] \text{ eingelaufene Teilchen pro Zeit} \\ &= \text{einlaufender Teilchenstrom} \times \text{Fläche des Rings} \\ &= j \cdot 2\pi b |db|\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ dN = in das Winkelintervall $[\theta, \theta + d\theta]$ gestreute Teilchen pro Zeit

= durch den Ring $[b, b + db]$ eingelaufene Teilchen pro Zeit

= einlaufender Teilchenstrom $\times$ Fläche des Rings

$= j \cdot 2\pi b |db|$

$\Rightarrow$ $d\sigma = \frac{dN}{j} = 2\pi\, b\, |db|$

$\Rightarrow$ dN = in das Winkelintervall $[\theta, \theta + d\theta]$ gestreute Teilchen pro Zeit

= durch den Ring $[b, b + db]$ eingelaufene Teilchen pro Zeit

= einlaufender Teilchenstrom $\times$ Fläche des Rings

$= j \cdot 2\pi b|db|$

$\Rightarrow$ $d\sigma = \frac{dN}{j} = 2\pi\, b\,|db|$

$\Rightarrow$ differenzieller Wirkungsquerschnitt: $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{2\pi\, b\,|db|}{2\pi\ \sin\theta\, d\theta} = \frac{b}{\sin\theta}\ \left|\frac{db}{d\theta}\right|$

$\Rightarrow$ dN = in das Winkelintervall $[\theta, \theta + d\theta]$ gestreute Teilchen pro Zeit

= durch den Ring $[b, b + db]$ eingelaufene Teilchen pro Zeit

= einlaufender Teilchenstrom $\times$ Fläche des Rings

$= j \cdot 2\pi b |db|$

$\Rightarrow$ $d\sigma = \frac{dN}{j} = 2\pi\, b\, |db|$

$\Rightarrow$ differenzieller Wirkungsquerschnitt: $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{2\pi\, b\, |db|}{2\pi\, \sin\theta\, d\theta} = \frac{b}{\sin\theta} \left|\frac{db}{d\theta}\right|$

- Vorgehensweise: $\theta = \theta(b) \xrightarrow{\text{Umkehrfkt.}} b(\theta) \rightarrow \frac{db}{d\theta} \rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega}$

$$\Rightarrow \; dN = \text{in das Winkelintervall } [\theta, \theta + d\theta] \text{ gestreute Teilchen pro Zeit}$$
$$= \text{durch den Ring } [b, b + db] \text{ eingelaufene Teilchen pro Zeit}$$
$$= \text{einlaufender Teilchenstrom} \times \text{Fläche des Rings}$$
$$= j \cdot 2\pi b |db|$$

$$\Rightarrow \; d\sigma = \frac{dN}{j} = 2\pi\, b\, |db|$$

$\Rightarrow$ differenzieller Wirkungsquerschnitt: $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{2\pi\, b\, |db|}{2\pi \, \sin\theta \, d\theta} = \frac{b}{\sin\theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right|$

- Vorgehensweise: $\theta = \theta(b) \xrightarrow{\text{Umkehrfkt.}} b(\theta) \rightarrow \frac{db}{d\theta} \rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega}$
- **Beispiel:** Rutherford-Streuung

Coulomb-Potenzial $V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r} \equiv -\frac{\kappa}{r}, \qquad \kappa = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}$

$\xrightarrow{\text{längere Rechnung}} \quad \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) = \frac{\kappa^2}{16E^2 \, \sin^4(\theta/2)}$ *(Rutherford'sche Streuformel)*

3. Der starre Körper

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

3.1 Definition und Freiheitsgrade des starren Körpers

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

3.1 Definition und Freiheitsgrade des starren Körpers

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- ausgedehnte Körper:
  - mikroskopische Beschreibung: $N \sim 10^{23}$ Atome oder Moleküle
  - oft zweckmäßiger: kontinuierliche Dichteverteilung

Beispiel: $M = \sum_{i=1}^{N} m_i \quad \xrightarrow{\text{kontin.}} \quad \int d^3r\, \rho(\vec{r})$

3.1 Definition und Freiheitsgrade des starren Körpers

- ausgedehnte Körper:
  - mikroskopische Beschreibung: $N \sim 10^{23}$ Atome oder Moleküle
  - oft zweckmäßiger: kontinuierliche Dichteverteilung

Beispiel: $M = \sum_{i=1}^{N} m_i \quad \xrightarrow{\text{kontin.}} \quad \int d^3r\, \rho(\vec{r})$

- Zahl der Freiheitsgrade:

  (= Angaben, um die Lage des Körpers im Raum vollständig zu beschreiben)
  - $3N$ (3 Koordinaten pro Punktteilchen)
  - unendlich für kontinuierliche Dichteverteilungen

- starrer Körper:

  Abstände zwischen den einzelnen Punkten bleiben zeitlich konstant

  $$r_{ij}(t) = \left|\vec{r}^{\,(i)}(t) - \vec{r}^{\,(j)}(t)\right| = c_{ij} = const.$$

- starrer Körper:

  Abstände zwischen den einzelnen Punkten bleiben zeitlich konstant

  $$r_{ij}(t) = \left|\vec{r}^{\,(i)}(t) - \vec{r}^{\,(j)}(t)\right| = c_{ij} = const.$$

- Zahl der Freiheitsgrade?

- starrer Körper:

  Abstände zwischen den einzelnen Punkten bleiben zeitlich konstant

  $r_{ij}(t) = \left|\vec{r}^{\,(i)}(t) - \vec{r}^{\,(j)}(t)\right| = c_{ij} = const.$

- Zahl der Freiheitsgrade?
  - 1. Punkt: $\vec{r}^{\,(1)}$ $\rightarrow$ 3 unabhängige Koordinaten

- starrer Körper:

  Abstände zwischen den einzelnen Punkten bleiben zeitlich konstant

  $$r_{ij}(t) = \left|\vec{r}^{\,(i)}(t) - \vec{r}^{\,(j)}(t)\right| = c_{ij} = const.$$

- Zahl der Freiheitsgrade?
  - 1. Punkt: $\vec{r}^{\,(1)}$ $\rightarrow$ 3 unabhängige Koordinaten
  - 2. Punkt: $\vec{r}^{\,(2)}$ auf Kugelschale mit Radius c_{12} um $\vec{r}^{\,(1)}$
    $\rightarrow$ 2 unabh. Koordinaten (z.B. zwei Winkel)

- starrer Körper:

  Abstände zwischen den einzelnen Punkten bleiben zeitlich konstant

  $$r_{ij}(t) = \left|\vec{r}^{\,(i)}(t) - \vec{r}^{\,(j)}(t)\right| = c_{ij} = const.$$

- Zahl der Freiheitsgrade?

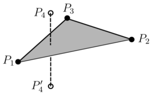
  - 1. Punkt: $\vec{r}^{\,(1)}$ → 3 unabhängige Koordinaten
  - 2. Punkt: $\vec{r}^{\,(2)}$ auf Kugelschale mit Radius c_{12} um $\vec{r}^{\,(1)}$
    → 2 unabh. Koordinaten (z.B. zwei Winkel)
  - 3. Punkt: $\vec{r}^{\,(3)}$ auf Schnittlinie zweier Kugelschalen = Kreis
    → 1 unabh. Koordinate (Winkel)

- starrer Körper:

  Abstände zwischen den einzelnen Punkten bleiben zeitlich konstant

  $$r_{ij}(t) = \left|\vec{r}^{\,(i)}(t) - \vec{r}^{\,(j)}(t)\right| = c_{ij} = const.$$

- Zahl der Freiheitsgrade?
  - 1. Punkt: $\vec{r}^{\,(1)}$ $\rightarrow$ 3 unabhängige Koordinaten
  - 2. Punkt: $\vec{r}^{\,(2)}$ auf Kugelschale mit Radius c_{12} um $\vec{r}^{\,(1)}$
    $\rightarrow$ 2 unabh. Koordinaten (z.B. zwei Winkel)
  - 3. Punkt: $\vec{r}^{\,(3)}$ auf Schnittlinie zweier Kugelschalen = Kreis
    $\rightarrow$ 1 unabh. Koordinate (Winkel)
  - 4. Punkt: zwei Möglichkeiten,
    eindeutig, wenn man die Orientierung festlegt
    (Vorzeichen von $\vec{r}_{14} \cdot (\vec{r}_{12} \times \vec{r}_{13})$)



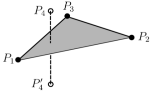
- starrer Körper:

  Abstände zwischen den einzelnen Punkten bleiben zeitlich konstant

  $$r_{ij}(t) = \left|\vec{r}^{\,(i)}(t) - \vec{r}^{\,(j)}(t)\right| = c_{ij} = const.$$

- Zahl der Freiheitsgrade?

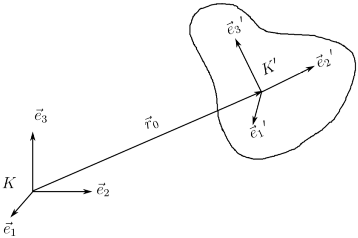
  - 1. Punkt: $\vec{r}^{\,(1)}$ → 3 unabhängige Koordinaten
  - 2. Punkt: $\vec{r}^{\,(2)}$ auf Kugelschale mit Radius c_{12} um $\vec{r}^{\,(1)}$
    → 2 unabh. Koordinaten (z.B. zwei Winkel)
  - 3. Punkt: $\vec{r}^{\,(3)}$ auf Schnittlinie zweier Kugelschalen = Kreis
    → 1 unabh. Koordinate (Winkel)
  - 4. Punkt: zwei Möglichkeiten,
    eindeutig, wenn man die Orientierung festlegt
    (Vorzeichen von $\vec{r}_{14} \cdot (\vec{r}_{12} \times \vec{r}_{13})$)



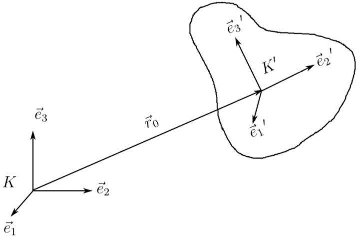
→ $3 + 2 + 1 =$ 6 Freiheitgrade

- Alternative Beschreibung:
  - raumfestes Koordinatensystem K (= Inertialsystem)
  - körperfestes Koordinatensystem K' fest im Körper verankert

    $\Rightarrow$ Koordinaten aller Körperpunkte sind in K' zeitlich konstant

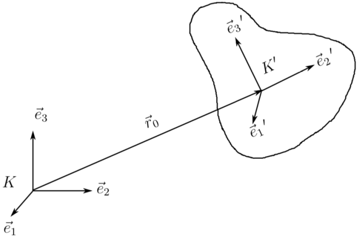


- Alternative Beschreibung:
  - raumfestes Koordinatensystem K (= Inertialsystem)
  - körperfestes Koordinatensystem K' fest im Körper verankert
    $\Rightarrow$ Koordinaten aller Körperpunkte sind in K' zeitlich konstant



- Eindeutige Festlegung der Lage des Körpers bzgl. K:
  - Ortsvektor $\vec{r}_0(t)$ des Ursprungs von K' (= 3 Koordinaten)
  - Richtungen der Einheitsvektoren $\vec{e}_1{}'(t)$ (2 Winkel) und $\vec{e}_2{}'(t)$ (1 Winkel)

- Alternative Beschreibung:
  - raumfestes Koordinatensystem K (= Inertialsystem)
  - körperfestes Koordinatensystem K' fest im Körper verankert
    $\Rightarrow$ Koordinaten aller Körperpunkte sind in K' zeitlich konstant



- Eindeutige Festlegung der Lage des Körpers bzgl. K:
  - Ortsvektor $\vec{r}_0(t)$ des Ursprungs von K' (= 3 Koordinaten)
  - Richtungen der Einheitsvektoren $\vec{e}_1{}'(t)$ (2 Winkel) und $\vec{e}_2{}'(t)$ (1 Winkel)

$\hat{=}$ 3 Translations- + 3 Rotationsfreiheitsgrade
  - Translation: Verschiebung des Ursprungs von K'
  - Rotation: Richtungsänderung der Koordinatenachsen von K'

3.2 Rotation um eine körperfeste Achse

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

3.2 Rotation um eine körperfeste Achse

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- allgemeine Bewegung:

  Rotationsachse des starren Körpers kann sich mit der Zeit ändern

3.2 Rotation um eine körperfeste Achse

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

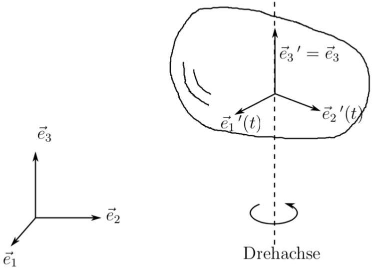
- allgemeine Bewegung:

  Rotationsachse des starren Körpers kann sich mit der Zeit ändern

- Vereinfachte Situation:

  Nach Abzug der Translationsbewegung rotiert K' um eine feste Achse.

  - keine Translationsbewegung
    → raumfeste Achse
  - zusätzliche Translationsbewegung
    → z.B. Rollbewegung mit fester Achsrichtung



- oft zweckmäßige Koordinatenwahl:

  Drehachse = $\vec{e}_3{}' = \vec{e}_3$

3.2.1 Raumfeste Achse

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- keine Translationsbewegung

  $\Rightarrow$ nur 1 Freiheitsgrad: Drehwinkel φ

3.2.1 Raumfeste Achse

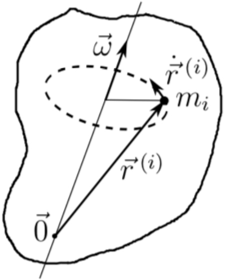
- keine Translationsbewegung

  $\Rightarrow$ nur 1 Freiheitsgrad: Drehwinkel φ

- Koordinatenwahl:

  Drehachse mit Richtung $\vec{n}$ durch den Ursprung von K

  ➞ Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \omega\vec{n}, \quad \omega \equiv \dot{\varphi}$



3.2.1 Raumfeste Achse

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- keine Translationsbewegung

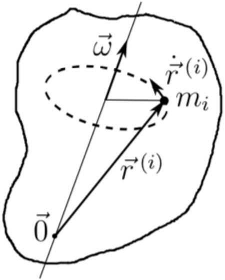
  $\Rightarrow$ nur 1 Freiheitsgrad: Drehwinkel φ

- Koordinatenwahl:

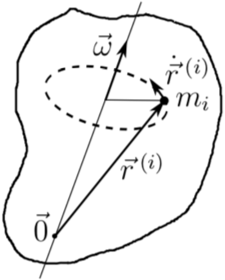
  Drehachse mit Richtung $\vec{n}$ durch den Ursprung von K

  $\rightarrow$ Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \omega\vec{n}, \quad \omega \equiv \dot{\varphi}$

- Welche Geschwindigkeit hat ein Punkt am Ort $\vec{r}^{(i)}$?



3.2.1 Raumfeste Achse



- keine Translationsbewegung

  $\Rightarrow$ nur 1 Freiheitsgrad: Drehwinkel φ

- Koordinatenwahl:

  Drehachse mit Richtung $\vec{n}$ durch den Ursprung von K

  $\rightarrow$ Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \omega\vec{n}, \quad \omega \equiv \dot{\varphi}$

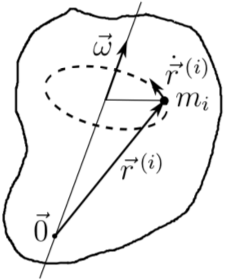
- Welche Geschwindigkeit hat ein Punkt am Ort $\vec{r}^{(i)}$?

- Wähle Koordinatensystem mit $\vec{n} = \vec{e}_3$

  $\rightarrow$ Zylinderkoordinaten: $\vec{r}^{\,(i)} = \rho^{(i)}\,\vec{e}_\rho + z^{(i)}\vec{e}_z$

  $\Rightarrow \quad \dot{\vec{r}}^{\,(i)} = \dot{\rho}^{(i)}\,\vec{e}_\rho + \rho^{(i)}\,\dot{\vec{e}}_\rho + \dot{z}^{(i)}\vec{e}_z = \dot{\rho}^{(i)}\,\vec{e}_\rho + \rho^{(i)}\,\dot{\varphi}^{(i)}\,\vec{e}_\varphi + \dot{z}^{(i)}\vec{e}_z$

3.2.1 Raumfeste Achse



- keine Translationsbewegung

  $\Rightarrow$ nur 1 Freiheitsgrad: Drehwinkel φ

- Koordinatenwahl:

  Drehachse mit Richtung $\vec{n}$ durch den Ursprung von K

  ➞ Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \omega\vec{n}, \quad \omega \equiv \dot{\varphi}$

- Welche Geschwindigkeit hat ein Punkt am Ort $\vec{r}^{(i)}$?

- Wähle Koordinatensystem mit $\vec{n} = \vec{e}_3$

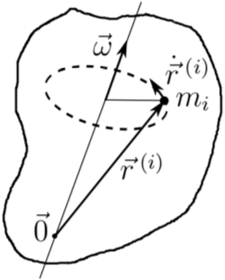
  ➞ Zylinderkoordinaten: $\vec{r}^{\,(i)} = \rho^{(i)}\,\vec{e}_\rho + z^{(i)}\vec{e}_z$

  $$\Rightarrow \quad \dot{\vec{r}}^{\,(i)} = \dot{\rho}^{(i)}\,\vec{e}_\rho + \rho^{(i)}\,\dot{\vec{e}}_\rho + \dot{z}^{(i)}\vec{e}_z = \dot{\rho}^{(i)}\,\vec{e}_\rho + \rho^{(i)}\,\dot{\varphi}^{(i)}\,\vec{e}_\varphi + \dot{z}^{(i)}\vec{e}_z$$

  hier: $\dot{\rho}^{(i)} = \dot{z}^{(i)} = 0 \qquad \dot{\varphi}^{(i)} = \omega$

3.2.1 Raumfeste Achse

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT



- keine Translationsbewegung

  $\Rightarrow$ nur 1 Freiheitsgrad: Drehwinkel φ

- Koordinatenwahl:

  Drehachse mit Richtung $\vec{n}$ durch den Ursprung von K

  $\rightarrow$ Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \omega\vec{n}$, $\omega \equiv \dot{\varphi}$

- Welche Geschwindigkeit hat ein Punkt am Ort $\vec{r}^{(i)}$?

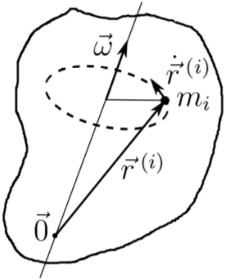
- Wähle Koordinatensystem mit $\vec{n} = \vec{e}_3$

  $\rightarrow$ Zylinderkoordinaten: $\vec{r}^{(i)} = \rho^{(i)}\,\vec{e}_\rho + z^{(i)}\vec{e}_z$

  $$\Rightarrow \quad \dot{\vec{r}}^{(i)} = \dot{\rho}^{(i)}\,\vec{e}_\rho + \rho^{(i)}\,\dot{\vec{e}}_\rho + \dot{z}^{(i)}\vec{e}_z = \dot{\rho}^{(i)}\,\vec{e}_\rho + \rho^{(i)}\,\dot{\varphi}^{(i)}\,\vec{e}_\varphi + \dot{z}^{(i)}\vec{e}_z$$

  hier: $\dot{\rho}^{(i)} = \dot{z}^{(i)} = 0 \quad \dot{\varphi}^{(i)} = \omega \qquad \Rightarrow \quad \dot{\vec{r}}^{(i)} = \omega\rho^{(i)}\,\vec{e}_\varphi$

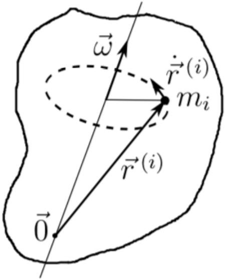
- also: $\dot{\vec{r}}^{(i)} = \omega\rho^{(i)}\,\vec{e}_\varphi$ für $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z$



- also: $\dot{\vec{r}}^{(i)} = \omega\rho^{(i)}\,\vec{e}_\varphi$ für $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z$

  andererseits:

  $\vec{\omega}\times\vec{r}^{(i)} = \omega\rho^{(i)}\underbrace{\vec{e}_z\times\vec{e}_\rho}_{=\vec{e}_\varphi} + \omega z^{(i)}\underbrace{\vec{e}_z\times\vec{e}_z}_{=\vec{0}} = \omega\rho^{(i)}\vec{e}_\varphi$

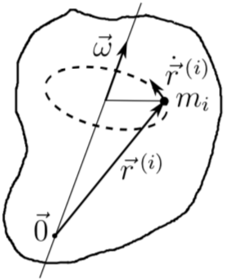


- also: $\dot{\vec{r}}^{\,(i)} = \omega \rho^{(i)}\, \vec{e}_\varphi$ für $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$

  andererseits:

  $$\vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)} = \omega \rho^{(i)} \underbrace{\vec{e}_z \times \vec{e}_\rho}_{=\vec{e}_\varphi} + \omega z^{(i)} \underbrace{\vec{e}_z \times \vec{e}_z}_{=\vec{0}} = \omega \rho^{(i)} \vec{e}_\varphi$$

  $$\Rightarrow \quad \boxed{\dot{\vec{r}}^{\,(i)} = \vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)} = \omega\ \left(\vec{n} \times \vec{r}^{\,(i)}\right)}$$



- also: $\dot{\vec{r}}^{(i)} = \omega\rho^{(i)}\,\vec{e}_\varphi$ für $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z$

  andererseits:

  $$\vec{\omega} \times \vec{r}^{(i)} = \omega\rho^{(i)}\,\underbrace{\vec{e}_z \times \vec{e}_\rho}_{=\vec{e}_\varphi} + \omega z^{(i)}\,\underbrace{\vec{e}_z \times \vec{e}_z}_{=\vec{0}} = \omega\rho^{(i)}\vec{e}_\varphi$$

  $$\Rightarrow \quad \boxed{\dot{\vec{r}}^{(i)} = \vec{\omega} \times \vec{r}^{(i)} = \omega\,\left(\vec{n} \times \vec{r}^{(i)}\right)}$$

  gilt auch für $\vec{n} \neq \vec{e}_3$!

  (Transformationseigenschaft von Vektoren)