4.3 Virtuelle Verrückungen und das D'Alembert'sche Prinzip

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

4.3 Virtuelle Verrückungen und das D'Alembert'sche Prinzip

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- von den Zwangskräften geleistete Arbeit: $dW_Z = \vec{F}_Z \cdot d\vec{r}$

4.3 Virtuelle Verrückungen
und das D'Alembert'sche Prinzip

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- von den Zwangskräften geleistete Arbeit: $dW_Z = \vec{F}_Z \cdot d\vec{r}$
- Bewegung im Einklang mit skleronomen Zwangsbedingungen: $d\vec{r} \perp \vec{F}_Z$

  $\Rightarrow \quad dW_Z = 0$ skleronome Zwangskräfte leisten keine Arbeit!

4.3 Virtuelle Verrückungen und das D'Alembert'sche Prinzip

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- von den Zwangskräften geleistete Arbeit: $dW_Z = \vec{F}_Z \cdot d\vec{r}$
- Bewegung im Einklang mit skleronomen Zwangsbedingungen: $d\vec{r} \perp \vec{F}_Z$

  $\Rightarrow \quad dW_Z = 0$ skleronome Zwangskräfte leisten keine Arbeit!
- gilt nicht für rheonome Zwangsbedingungen

4.3 Virtuelle Verrückungen und das D'Alembert'sche Prinzip

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

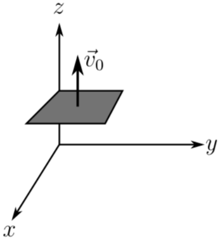
- von den Zwangskräften geleistete Arbeit: $dW_Z = \vec{F}_Z \cdot d\vec{r}$

- Bewegung im Einklang mit skleronomen Zwangsbedingungen: $d\vec{r} \perp \vec{F}_Z$

  $\Rightarrow \quad dW_Z = 0$ skleronome Zwangskräfte leisten keine Arbeit!

- gilt nicht für rheonome Zwangsbedingungen

- **Beispiel:** Masse am Boden eines Aufzugs
  - Zwangsbedingung: $f(z) = z - v_0 t = 0$



4.3 Virtuelle Verrückungen und das D'Alembert'sche Prinzip

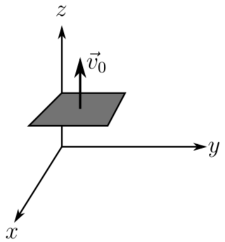
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- von den Zwangskräften geleistete Arbeit: $dW_Z = \vec{F}_Z \cdot d\vec{r}$
- Bewegung im Einklang mit skleronomen Zwangsbedingungen: $d\vec{r} \perp \vec{F}_Z$

  $\Rightarrow \quad dW_Z = 0$ skleronome Zwangskräfte leisten keine Arbeit!

- gilt nicht für rheonome Zwangsbedingungen
- **Beispiel:** Masse am Boden eines Aufzugs
  - Zwangsbedingung: $f(z) = z - v_0 t = 0$

  $$\Rightarrow \quad \vec{F}_Z = \lambda \vec{\nabla} f = \lambda \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}$$



4.3 Virtuelle Verrückungen und das D'Alembert'sche Prinzip

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

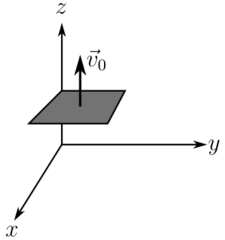
- von den Zwangskräften geleistete Arbeit: $dW_Z = \vec{F}_Z \cdot d\vec{r}$
- Bewegung im Einklang mit skleronomen Zwangsbedingungen: $d\vec{r} \perp \vec{F}_Z$

  $\Rightarrow \quad dW_Z = 0$ skleronome Zwangskräfte leisten keine Arbeit!

- gilt nicht für rheonome Zwangsbedingungen
- **Beispiel:** Masse am Boden eines Aufzugs
  - Zwangsbedingung: $f(z) = z - v_0 t = 0$

    $$\Rightarrow \quad \vec{F}_Z = \lambda \vec{\nabla} f = \lambda \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

  - $d\vec{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_0 \end{pmatrix} dt$



4.3 Virtuelle Verrückungen und das D'Alembert'sche Prinzip

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- von den Zwangskräften geleistete Arbeit: $dW_Z = \vec{F}_Z \cdot d\vec{r}$
- Bewegung im Einklang mit skleronomen Zwangsbedingungen: $d\vec{r} \perp \vec{F}_Z$

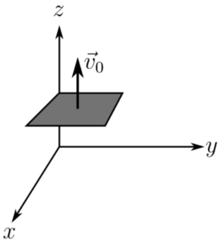
  $\Rightarrow \quad dW_Z = 0$ skleronome Zwangskräfte leisten keine Arbeit!

- gilt nicht für rheonome Zwangsbedingungen
- **Beispiel:** Masse am Boden eines Aufzugs
  - Zwangsbedingung: $f(z) = z - v_0 t = 0$

    $$\Rightarrow \quad \vec{F}_Z = \lambda \vec{\nabla} f = \lambda \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

  - $$d\vec{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_0 \end{pmatrix} dt$$

  $$\Rightarrow \quad dW_Z = \vec{F}_Z \cdot d\vec{r} = \lambda v_0 \, dt \neq 0$$



Def.: Eine virtuelle Verrückung $\delta\vec{r}$ ist eine infinitesimale Ortsänderung im Einklang mit den Zwangsbedingungen, die (im Gegensatz zu realen Verrückungen $d\vec{r}$) instantan erfolgt, d.h. keine Zeit in Anspruch nimmt.

Def.: Eine virtuelle Verrückung $\delta\vec{r}$ ist eine infinitesimale Ortsänderung im Einklang mit den Zwangsbedingungen, die (im Gegensatz zu realen Verrückungen $d\vec{r}$) instantan erfolgt, d.h. keine Zeit in Anspruch nimmt.

- Aufzug: $\delta\vec{r} = \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \delta W_Z = \vec{F}_Z \cdot \delta\vec{r} = 0$

Def.: Eine virtuelle Verrückung $\delta\vec{r}$ ist eine infinitesimale Ortsänderung im Einklang mit den Zwangsbedingungen, die (im Gegensatz zu realen Verrückungen $d\vec{r}$) instantan erfolgt, d.h. keine Zeit in Anspruch nimmt.

- Aufzug: $\delta\vec{r} = \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \delta W_Z = \vec{F}_Z \cdot \delta\vec{r} = 0$

  Bei einer virtuellen Verrückung leisten die Zwangskräfte keine Arbeit.

- Mehrteilchen-Systeme:

  Fasse Ortsvektoren und Zwangskräfte zu $3N$-dimensionalen Vektoren zusammen:

$$\tilde{r} = \begin{pmatrix} \vec{r}^{\,(1)} \\ \vec{r}^{\,(2)} \\ \vdots \\ \vec{r}^{\,(N)} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \\ z^{(1)} \\ x^{(2)} \\ \vdots \\ z^{(N)} \end{pmatrix}, \quad \tilde{F}_Z = \begin{pmatrix} \vec{F}_Z^{(1)} \\ \vec{F}_Z^{(2)} \\ \vdots \\ \vec{F}_Z^{(N)} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \delta W_Z = \tilde{F}_Z \cdot \delta\tilde{r} = 0$$

- ## Mehrteilchen-Systeme:

  Fasse Ortsvektoren und Zwangskräfte zu 3N-dimensionalen Vektoren zusammen:

$$\tilde{r} = \begin{pmatrix} \vec{r}^{\,(1)} \\ \vec{r}^{\,(2)} \\ \vdots \\ \vec{r}^{\,(N)} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \\ z^{(1)} \\ x^{(2)} \\ \vdots \\ z^{(N)} \end{pmatrix}, \quad \tilde{F}_Z = \begin{pmatrix} \vec{F}_Z^{(1)} \\ \vec{F}_Z^{(2)} \\ \vdots \\ \vec{F}_Z^{(N)} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \Rightarrow \quad \delta W_Z = \tilde{F}_Z \cdot \delta\tilde{r} = 0 \\ \Rightarrow \quad \sum_i \vec{F}_Z^{(i)} \cdot \delta\vec{r}^{\,(i)} = 0 \end{matrix}$$

- Mehrteilchen-Systeme:

  Fasse Ortsvektoren und Zwangskräfte zu $3N$-dimensionalen Vektoren zusammen:

$$\tilde{r} = \begin{pmatrix} \vec{r}^{\,(1)} \\ \vec{r}^{\,(2)} \\ \vdots \\ \vec{r}^{\,(N)} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \\ z^{(1)} \\ x^{(2)} \\ \vdots \\ z^{(N)} \end{pmatrix}, \quad \tilde{F}_Z = \begin{pmatrix} \vec{F}_Z^{(1)} \\ \vec{F}_Z^{(2)} \\ \vdots \\ \vec{F}_Z^{(N)} \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} &\Rightarrow \quad \delta W_Z = \tilde{F}_Z \cdot \delta\tilde{r} = 0 \\ &\Rightarrow \quad \sum_i \vec{F}_Z^{(i)} \cdot \delta\vec{r}^{\,(i)} = 0 \end{aligned}$$

- Bewegungsgleichung für das *i*-te Teilchen: $m_i \ddot{\vec{r}}^{\,(i)} = \vec{F}^{\,(i)} + \vec{F}_Z^{(i)}$

- Mehrteilchen-Systeme:

  Fasse Ortsvektoren und Zwangskräfte zu $3N$-dimensionalen Vektoren zusammen:

$$\tilde{r} = \begin{pmatrix} \vec{r}^{\,(1)} \\ \vec{r}^{\,(2)} \\ \vdots \\ \vec{r}^{\,(N)} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \\ z^{(1)} \\ x^{(2)} \\ \vdots \\ z^{(N)} \end{pmatrix}, \quad \tilde{F}_Z = \begin{pmatrix} \vec{F}_Z^{(1)} \\ \vec{F}_Z^{(2)} \\ \vdots \\ \vec{F}_Z^{(N)} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \delta W_Z = \tilde{F}_Z \cdot \delta\tilde{r} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sum_i \vec{F}_Z^{(i)} \cdot \delta\vec{r}^{\,(i)} = 0$$

- Bewegungsgleichung für das i-te Teilchen: $\quad m_i \ddot{\vec{r}}^{\,(i)} = \vec{F}^{\,(i)} + \vec{F}_Z^{(i)}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\sum_{i=1}^{N} \left(m_i \ddot{\vec{r}}^{\,(i)} - \vec{F}^{\,(i)} \right) \cdot \delta\vec{r}^{\,(i)} = 0} \qquad \text{D'Alembert'sches Prinzip}$$

Diskussion

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Manchmal ist man nur an den Bewegungsgleichungen interessiert, nicht an den Zwangskräften

  $\rightarrow$ Gibt es eine effizientere Methode als die Lagrange-Gln. 1. Art?

Diskussion

- Manchmal ist man nur an den Bewegungsgleichungen interessiert, nicht an den Zwangskräften

  → Gibt es eine effizientere Methode als die Lagrange-Gln. 1. Art?

- D'Alembert'sches Prinzip: $\sum_{i=1}^{N} \left(m_i \ddot{\vec{r}}^{\,(i)} - \vec{F}^{\,(i)} \right) \cdot \delta \vec{r}^{\,(i)} = 0$
  - enthält die Zwangskräfte nicht explizit

Diskussion

- Manchmal ist man nur an den Bewegungsgleichungen interessiert, nicht an den Zwangskräften

  → Gibt es eine effizientere Methode als die Lagrange-Gln. 1. Art?

- D'Alembert'sches Prinzip: $\sum_{i=1}^{N} \left(m_i \ddot{\vec{r}}^{\,(i)} - \vec{F}^{\,(i)} \right) \cdot \delta \vec{r}^{\,(i)} = 0$
  - enthält die Zwangskräfte nicht explizit
  - Zwangsbedingungen implizit über die erlaubten $\delta \vec{r}^{\,(i)}$ enthalten

Diskussion

- Manchmal ist man nur an den Bewegungsgleichungen interessiert, nicht an den Zwangskräften

  → Gibt es eine effizientere Methode als die Lagrange-Gln. 1. Art?

- D'Alembert'sches Prinzip: $\sum_{i=1}^{N} \left(m_i \ddot{\vec{r}}^{\,(i)} - \vec{F}^{\,(i)} \right) \cdot \delta \vec{r}^{\,(i)} = 0$
  - enthält die Zwangskräfte nicht explizit
  - Zwangsbedingungen implizit über die erlaubten $\delta \vec{r}^{\,(i)}$ enthalten

- Das D'Alembert'sche Prinzip gilt für alle erlaubten $\delta \vec{r}^{\,(i)}$.

Diskussion

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Manchmal ist man nur an den Bewegungsgleichungen interessiert, nicht an den Zwangskräften

  → Gibt es eine effizientere Methode als die Lagrange-Gln. 1. Art?

- D'Alembert'sches Prinzip: $\sum_{i=1}^{N} \left(m_i \ddot{\vec{r}}^{\,(i)} - \vec{F}^{\,(i)} \right) \cdot \delta\vec{r}^{\,(i)} = 0$
  - enthält die Zwangskräfte nicht explizit
  - Zwangsbedingungen implizit über die erlaubten $\delta\vec{r}^{\,(i)}$ enthalten

- Das D'Alembert'sche Prinzip gilt für alle erlaubten $\delta\vec{r}^{\,(i)}$.

  → Falls alle $\delta r_j^{(i)}$ von einander unabhängig, dann: $m_i \ddot{\vec{r}}^{\,(i)} - \vec{F}^{\,(i)} = 0$

Diskussion

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Manchmal ist man nur an den Bewegungsgleichungen interessiert, nicht an den Zwangskräften

  → Gibt es eine effizientere Methode als die Lagrange-Gln. 1. Art?

- D'Alembert'sches Prinzip: $\sum_{i=1}^{N} \left(m_i \ddot{\vec{r}}^{\,(i)} - \vec{F}^{\,(i)} \right) \cdot \delta \vec{r}^{\,(i)} = 0$
  - enthält die Zwangskräfte nicht explizit
  - Zwangsbedingungen implizit über die erlaubten $\delta \vec{r}^{\,(i)}$ enthalten

- Das D'Alembert'sche Prinzip gilt für alle erlaubten $\delta \vec{r}^{\,(i)}$.

  → Falls alle $\delta r_j^{(i)}$ von einander unabhängig, dann: $m_i \ddot{\vec{r}}^{\,(i)} - \vec{F}^{\,(i)} = 0$

  Aber: $\delta r_j^{(i)}$ nicht unabhängig, wenn Zwangsbedingungen vorliegen

  (mehr Koordinaten als Freiheitsgrade!)

4.4 Generalisierte Koordinaten und Lagrange-Gleichungen 2. Art

4.4 Generalisierte Koordinaten und Lagrange-Gleichungen 2. Art

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- N Punktmassen, k holonome Zwangsbed. $\Rightarrow$ $s = 3N - k$ Freiheitsgrade

  → Suche s unabhängige „generalisierte Koordinaten“ $q_1, \ldots, q_s$ zur Beschreibung der Bewegung im Einklang mit den Zwangsbedingungen

4.4 Generalisierte Koordinaten und Lagrange-Gleichungen 2. Art

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- N Punktmassen, k holonome Zwangsbed. $\Rightarrow$ $s = 3N - k$ Freiheitsgrade
  - → Suche s unabhängige „generalisierte Koordinaten“ $q_1, \dots, q_s$ zur Beschreibung der Bewegung im Einklang mit den Zwangsbedingungen
- Die Wahl ist nicht eindeutig.

4.4 Generalisierte Koordinaten und Lagrange-Gleichungen 2. Art

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- N Punktmassen, k holonome Zwangsbed. $\Rightarrow$ $s = 3N - k$ Freiheitsgrade

  → Suche s unabhängige „generalisierte Koordinaten“ $q_1, \dots, q_s$ zur Beschreibung der Bewegung im Einklang mit den Zwangsbedingungen

- Die Wahl ist nicht eindeutig.

- eine Möglichkeit: eliminiere k der $3N$ ursprünglichen Koordinaten mit Hilfe der Zwangsbedingungen

4.4 Generalisierte Koordinaten und Lagrange-Gleichungen 2. Art

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- N Punktmassen, k holonome Zwangsbed. $\Rightarrow$ $s = 3N - k$ Freiheitsgrade

  ➞ Suche s unabhängige „generalisierte Koordinaten“ $q_1, \dots, q_s$ zur Beschreibung der Bewegung im Einklang mit den Zwangsbedingungen

- Die Wahl ist nicht eindeutig.

- eine Möglichkeit: eliminiere k der $3N$ ursprünglichen Koordinaten mit Hilfe der Zwangsbedingungen

- Eine andere Wahl ist oft zweckmäßiger.

  Beispiel: starrer Rotator mit fester Drehachse ➞ $q = \varphi$ (Drehwinkel)

4.4 Generalisierte Koordinaten und Lagrange-Gleichungen 2. Art

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- N Punktmassen, k holonome Zwangsbed. $\Rightarrow$ $s = 3N - k$ Freiheitsgrade

  ➞ Suche s unabhängige „generalisierte Koordinaten“ $q_1, \dots, q_s$ zur Beschreibung der Bewegung im Einklang mit den Zwangsbedingungen

- Die Wahl ist nicht eindeutig.

- eine Möglichkeit: eliminiere k der $3N$ ursprünglichen Koordinaten mit Hilfe der Zwangsbedingungen

- Eine andere Wahl ist oft zweckmäßiger.

  Beispiel: starrer Rotator mit fester Drehachse ➞ $q = \varphi$ (Drehwinkel)

- „generalisierte Geschwindigkeiten“: $\dot{q}_j$

  (haben nicht notwendiger Weise die Dimension einer Geschwindigkeit)

4.4 Generalisierte Koordinaten und Lagrange-Gleichungen 2. Art

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- N Punktmassen, k holonome Zwangsbed. $\Rightarrow$ $s = 3N - k$ Freiheitsgrade

  → Suche s unabhängige „generalisierte Koordinaten" $q_1, \ldots, q_s$ zur Beschreibung der Bewegung im Einklang mit den Zwangsbedingungen

- Die Wahl ist nicht eindeutig.

- eine Möglichkeit: eliminiere k der $3N$ ursprünglichen Koordinaten mit Hilfe der Zwangsbedingungen

- Eine andere Wahl ist oft zweckmäßiger.

  Beispiel: starrer Rotator mit fester Drehachse → $q = \varphi$ (Drehwinkel)

- „generalisierte Geschwindigkeiten": $\dot{q}_j$

  (haben nicht notwendiger Weise die Dimension einer Geschwindigkeit)

  Beispiel: $q_j = \varphi$ (Drehwinkel) $\Rightarrow$ $\dot{q}_j = \dot{\varphi} = \omega$ (Winkelgeschwindigkeit)

- Ziel: Drücke das D'Alembert'sche Prinzip $\sum_{i=1}^{N} \left(m_i \ddot{\vec{r}}^{\,(i)} - \vec{F}^{\,(i)} \right) \cdot \delta \vec{r}^{\,(i)} = 0$ durch generalisierte Koordinaten und Geschwindigkeiten aus.

- Ziel: Drücke das D'Alembert'sche Prinzip $\sum_{i=1}^{N} \left(m_i \ddot{\vec{r}}^{\,(i)} - \vec{F}^{\,(i)} \right) \cdot \delta \vec{r}^{\,(i)} = 0$

  durch generalisierte Koordinaten und Geschwindigkeiten aus.
- ursprüngliche Koordinaten = eindeutige Funktionen von q_j und t:

  $\vec{r}^{\,(i)} = \vec{r}^{\,(i)}(q_1, \ldots, q_s, t)$

- Ziel: Drücke das D'Alembert'sche Prinzip $\sum_{i=1}^{N}\left(m_i\ddot{\vec{r}}^{\,(i)} - \vec{F}^{\,(i)}\right)\cdot\delta\vec{r}^{\,(i)} = 0$
  durch generalisierte Koordinaten und Geschwindigkeiten aus.
- ursprüngliche Koordinaten = eindeutige Funktionen von q_j und t:

$$\vec{r}^{\,(i)} = \vec{r}^{\,(i)}(q_1, \dots, q_s, t)$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\vec{r}}^{\,(i)} = \sum_{j=1}^{s}\frac{\partial\vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_j}\,\dot{q}_j + \frac{\partial\vec{r}^{\,(i)}}{\partial t} = \dot{\vec{r}}^{\,(i)}(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t)$$

- Ziel: Drücke das D'Alembert'sche Prinzip $\sum_{i=1}^{N}\left(m_i\ddot{\vec{r}}^{\,(i)}-\vec{F}^{\,(i)}\right)\cdot\delta\vec{r}^{\,(i)}=0$

  durch generalisierte Koordinaten und Geschwindigkeiten aus.
- ursprüngliche Koordinaten = eindeutige Funktionen von q_j und t:

  $\vec{r}^{\,(i)}=\vec{r}^{\,(i)}(q_1,\ldots,q_s,t)$

  $$\Rightarrow\quad \dot{\vec{r}}^{\,(i)}=\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial\vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_j}\,\dot{q}_j+\frac{\partial\vec{r}^{\,(i)}}{\partial t}=\dot{\vec{r}}^{\,(i)}(q_1,\ldots,q_s,\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_s,t)$$
- virtuelle Verrückungen: $\delta\vec{r}^{\,(i)}=\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial\vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_j}\,\delta q_j$ (kein $\frac{\partial\vec{r}^{\,(i)}}{\partial t}\delta t$, da instantan: $\delta t=0$)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Ziel: Drücke das D'Alembert'sche Prinzip $\sum_{i=1}^{N} \left(m_i \ddot{\vec{r}}^{\,(i)} - \vec{F}^{\,(i)} \right) \cdot \delta \vec{r}^{\,(i)} = 0$

  durch generalisierte Koordinaten und Geschwindigkeiten aus.
- ursprüngliche Koordinaten = eindeutige Funktionen von q_j und t:

  $\vec{r}^{\,(i)} = \vec{r}^{\,(i)}(q_1, \dots, q_s, t)$

  $$\Rightarrow \quad \dot{\vec{r}}^{\,(i)} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial t} = \dot{\vec{r}}^{\,(i)}(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t)$$
- virtuelle Verrückungen: $\delta \vec{r}^{\,(i)} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_j} \delta q_j$ (kein $\frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial t} \delta t$, da instantan: $\delta t = 0$)
- von den freien Kräften geleistete „virtuelle Arbeit":

  $$\delta W_F \equiv \sum_{i=1}^{N} \vec{F}^{\,(i)} \cdot \delta \vec{r}^{\,(i)} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}^{\,(i)} \cdot \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^{s} \left(\sum_{i=1}^{N} \vec{F}^{\,(i)} \cdot \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_j} \right) \delta q_j$$

- Ziel: Drücke das D'Alembert'sche Prinzip $\sum_{i=1}^{N} \left(m_i \ddot{\vec{r}}^{\,(i)} - \vec{F}^{\,(i)} \right) \cdot \delta \vec{r}^{\,(i)} = 0$

  durch generalisierte Koordinaten und Geschwindigkeiten aus.

- ursprüngliche Koordinaten = eindeutige Funktionen von q_j und t:

  $\vec{r}^{\,(i)} = \vec{r}^{\,(i)}(q_1, \dots, q_s, t)$

  $$\Rightarrow \quad \dot{\vec{r}}^{\,(i)} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial t} = \dot{\vec{r}}^{\,(i)}(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t)$$

- virtuelle Verrückungen: $\delta \vec{r}^{\,(i)} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_j} \delta q_j$ (kein $\frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial t} \delta t$, da instantan: $\delta t = 0$)

- von den freien Kräften geleistete „virtuelle Arbeit“:

  $$\delta W_F \equiv \sum_{i=1}^{N} \vec{F}^{\,(i)} \cdot \delta \vec{r}^{\,(i)} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}^{\,(i)} \cdot \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^{s} \left(\sum_{i=1}^{N} \vec{F}^{\,(i)} \cdot \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_j} \right) \delta q_j = \sum_{j=1}^{s} Q_j \, \delta q_j$$

  mit $Q_j \equiv \sum_{i=1}^{N} \vec{F}^{\,(i)} \cdot \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_j}$ „generalisierte Kräfte“

- gen. Koordinaten und gen. Geschwindigkeiten sind unabhängig von einander
  (d.h. alle q_j und $\dot{q}_j$ können beliebig vorgegeben werden)

- gen. Koordinaten und gen. Geschwindigkeiten sind unabhängig von einander

  (d.h. alle q_j und $\dot{q}_j$ können beliebig vorgegeben werden)

$$\dot{\vec{r}}^{\,(i)} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_j}\, \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial t} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial \dot{\vec{r}}^{\,(i)}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_j}$$

- gen. Koordinaten und gen. Geschwindigkeiten sind unabhängig von einander

  (d.h. alle q_j und $\dot{q}_j$ können beliebig vorgegeben werden)

  $$\dot{\vec{r}}^{(i)} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial t} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial \dot{\vec{r}}^{(i)}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_j}$$

- $\frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_j} = \sum_{\ell=1}^{s} \frac{\partial}{\partial q_\ell} \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_j} \dot{q}_\ell + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_j}$

- gen. Koordinaten und gen. Geschwindigkeiten sind unabhängig von einander

  (d.h. alle q_j und $\dot{q}_j$ können beliebig vorgegeben werden)

$$\dot{\vec{r}}^{\,(i)} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_j}\, \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \dot{\vec{r}}^{\,(i)}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_j}$$

- $\frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_j} = \sum_{\ell=1}^{s} \frac{\partial}{\partial q_\ell} \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_j}\, \dot{q}_\ell + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_{\ell=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_\ell}\, \dot{q}_\ell + \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial t} \right)$

- gen. Koordinaten und gen. Geschwindigkeiten sind unabhängig von einander

  (d.h. alle q_j und $\dot{q}_j$ können beliebig vorgegeben werden)

$$\dot{\vec{r}}^{(i)} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_j}\, \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \dot{\vec{r}}^{(i)}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_j}$$

- $\frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_j} = \sum_{\ell=1}^{s} \frac{\partial}{\partial q_\ell}\frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_j}\, \dot{q}_\ell + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\sum_{\ell=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_\ell}\, \dot{q}_\ell + \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial t} \right) = \frac{\partial \dot{\vec{r}}^{(i)}}{\partial q_j}$

- gen. Koordinaten und gen. Geschwindigkeiten sind unabhängig von einander (d.h. alle q_j und $\dot{q}_j$ können beliebig vorgegeben werden)

$$\dot{\vec{r}}^{(i)} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \dot{\vec{r}}^{(i)}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_j}$$

- $$\frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_j} = \sum_{\ell=1}^{s} \frac{\partial}{\partial q_\ell} \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_j} \dot{q}_\ell + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_{\ell=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_\ell} \dot{q}_\ell + \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial t} \right) = \frac{\partial \dot{\vec{r}}^{(i)}}{\partial q_j}$$

- $$\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}^{(i)} \cdot \delta \vec{r}^{(i)} = \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}^{(i)} \cdot \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_j} \delta q_j$$

- gen. Koordinaten und gen. Geschwindigkeiten sind unabhängig von einander (d.h. alle q_j und $\dot{q}_j$ können beliebig vorgegeben werden)

$$\dot{\vec{r}}^{(i)} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \dot{\vec{r}}^{(i)}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_j}$$

- $\frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_j} = \sum_{\ell=1}^{s} \frac{\partial}{\partial q_\ell} \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_j} \dot{q}_\ell + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_{\ell=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_\ell} \dot{q}_\ell + \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial t} \right) = \frac{\partial \dot{\vec{r}}^{(i)}}{\partial q_j}$

- $$\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}^{(i)} \cdot \delta \vec{r}^{(i)} = \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}^{(i)} \cdot \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_j} \delta q_j$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{s} m_i \left\{ \frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}}^{(i)} \cdot \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_j} \right) - \dot{\vec{r}}^{(i)} \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_j} \right\} \delta q_j$$

- gen. Koordinaten und gen. Geschwindigkeiten sind unabhängig von einander (d.h. alle q_j und $\dot{q}_j$ können beliebig vorgegeben werden)

$$\dot{\vec{r}}^{\,(i)} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_j}\,\dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \dot{\vec{r}}^{\,(i)}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_j}$$

- $$\frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_j} = \sum_{\ell=1}^{s} \frac{\partial}{\partial q_\ell}\frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_j}\,\dot{q}_\ell + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\sum_{\ell=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_\ell}\,\dot{q}_\ell + \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial t}\right) = \frac{\partial \dot{\vec{r}}^{\,(i)}}{\partial q_j}$$

- $$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}^{\,(i)} \cdot \delta\vec{r}^{\,(i)} &= \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}^{\,(i)} \cdot \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_j}\,\delta q_j \\ &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{s} m_i \left\{ \frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}}^{\,(i)} \cdot \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_j}\right) - \dot{\vec{r}}^{\,(i)} \cdot \frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_j} \right\} \delta q_j \\ &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{s} m_i \left\{ \frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}}^{\,(i)} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}^{\,(i)}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \dot{\vec{r}}^{\,(i)} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}^{\,(i)}}{\partial q_j} \right\} \delta q_j\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}^{\,(i)} \cdot \delta\vec{r}^{\,(i)} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{s} m_i \left\{ \frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}}^{\,(i)} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}^{\,(i)}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \dot{\vec{r}}^{\,(i)} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}^{\,(i)}}{\partial q_j} \right\} \delta q_j$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}^{(i)} \cdot \delta \vec{r}^{(i)} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{s} m_i \left\{ \frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}}^{(i)} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}^{(i)}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \dot{\vec{r}}^{(i)} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}^{(i)}}{\partial q_j} \right\} \delta q_j$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{s} \frac{m_i}{2} \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{\vec{r}}^{(i)2}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \dot{\vec{r}}^{(i)2}}{\partial q_j} \right\} \delta q_j$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}^{(i)} \cdot \delta\vec{r}^{(i)} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{s} m_i \left\{ \frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}}^{(i)} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}^{(i)}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \dot{\vec{r}}^{(i)} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}^{(i)}}{\partial q_j} \right\} \delta q_j$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{s} \frac{m_i}{2} \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{\vec{r}}^{(i)2}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \dot{\vec{r}}^{(i)2}}{\partial q_j} \right\} \delta q_j = \sum_{j=1}^{s} \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right\} \delta q_j$$

mit $T = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}^{(i)^2}$ (kinetische Gesamtenergie)

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}^{\,(i)} \cdot \delta \vec{r}^{\,(i)} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{s} m_i \left\{ \frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}}^{\,(i)} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}^{\,(i)}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \dot{\vec{r}}^{\,(i)} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}^{\,(i)}}{\partial q_j} \right\} \delta q_j$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{s} \frac{m_i}{2} \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{\vec{r}}^{\,(i)2}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \dot{\vec{r}}^{\,(i)2}}{\partial q_j} \right\} \delta q_j = \sum_{j=1}^{s} \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right\} \delta q_j$$

mit $T = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}^{\,(i)^2}$ (kinetische Gesamtenergie)

- D'Alembert'sche Prinzip: $\sum_{i=1}^{N} \left(m_i \ddot{\vec{r}}^{\,(i)} - \vec{F}^{\,(i)} \right) \cdot \delta \vec{r}^{\,(i)} = 0$
  - $\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}^{\,(i)} \cdot \delta \vec{r}^{\,(i)} = \sum_{j=1}^{s} \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right\} \delta q_j$
  - $\sum_{i=1}^{N} \vec{F}^{\,(i)} \cdot \delta \vec{r}^{\,(i)} = \sum_{j=1}^{s} Q_j \, \delta q_j$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}^{\,(i)} \cdot \delta\vec{r}^{\,(i)} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{s} m_i \left\{ \frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}}^{\,(i)} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}^{\,(i)}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \dot{\vec{r}}^{\,(i)} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}^{\,(i)}}{\partial q_j} \right\} \delta q_j$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{s} \frac{m_i}{2} \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{\vec{r}}^{\,(i)2}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \dot{\vec{r}}^{\,(i)2}}{\partial q_j} \right\} \delta q_j = \sum_{j=1}^{s} \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right\} \delta q_j$$

mit $T = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}^{\,(i)^2}$ (kinetische Gesamtenergie)

- D'Alembert'sche Prinzip: $\sum_{i=1}^{N} \left(m_i \ddot{\vec{r}}^{\,(i)} - \vec{F}^{\,(i)} \right) \cdot \delta\vec{r}^{\,(i)} = 0$
  - $\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}^{\,(i)} \cdot \delta\vec{r}^{\,(i)} = \sum_{j=1}^{s} \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right\} \delta q_j$
  - $\sum_{i=1}^{N} \vec{F}^{\,(i)} \cdot \delta\vec{r}^{\,(i)} = \sum_{j=1}^{s} Q_j \, \delta q_j$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{s} \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right\} \delta q_j = 0$$

- D'Alembert'sche Prinzip in generlisierten Koordinaten:

$$\sum_{j=1}^{s} \left\{ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right\} \delta q_j = 0$$

- D'Alembert'sche Prinzip in generlisierten Koordinaten:

$$\sum_{j=1}^{s} \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right\} \delta q_j = 0$$

  - muss für alle δq_j gelten

- D'Alembert'sche Prinzip in generlisierten Koordinaten:

$$\sum_{j=1}^{s} \left\{ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right\} \delta q_j = 0$$

  - muss für alle δq_j gelten
  - δq_j unabhängig

- D'Alembert'sche Prinzip in generlisierten Koordinaten:

$$\sum_{j=1}^{s} \left\{ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right\} \delta q_j = 0$$

  - muss für alle δq_j gelten
  - δq_j unabhängig

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \qquad j = 1, \ldots, s}$$

- Konservatives Kraftfeld mit geschwindigkeitsunabhängigem Potenzial:

$$\vec{F}^{(i)} = -\vec{\nabla}^{(i)} V, \quad V = V(\vec{r}^{(1)}, \dots, \vec{r}^{(N)})$$

- Konservatives Kraftfeld mit geschwindigkeitsunabhängigem Potenzial:

$$\vec{F}^{(i)} = -\vec{\nabla}^{(i)} V, \qquad V = V(\vec{r}^{(1)}, \ldots, \vec{r}^{(N)})$$

- generalisierte Kräfte: $Q_j = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}^{(i)} \cdot \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_j} = -\sum_{i=1}^{N} \vec{\nabla}^{(i)} V \cdot \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$

- Konservatives Kraftfeld mit geschwindigkeitsunabhängigem Potenzial:

$$\vec{F}^{(i)} = -\vec{\nabla}^{(i)} V, \qquad V = V(\vec{r}^{(1)}, \dots, \vec{r}^{(N)})$$

- generalisierte Kräfte: $$Q_j = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}^{(i)} \cdot \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_j} = -\sum_{i=1}^{N} \vec{\nabla}^{(i)} V \cdot \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

- Konservatives Kraftfeld mit geschwindigkeitsunabhängigem Potenzial:

$$\vec{F}^{(i)} = -\vec{\nabla}^{(i)} V, \qquad V = V(\vec{r}^{(1)}, \dots, \vec{r}^{(N)})$$

- generalisierte Kräfte: $\quad Q_j = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}^{(i)} \cdot \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_j} = -\sum_{i=1}^{N} \vec{\nabla}^{(i)} V \cdot \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_j} = 0$$

- Konservatives Kraftfeld mit geschwindigkeitsunabhängigem Potenzial:

$$\vec{F}^{\,(i)} = -\vec{\nabla}^{(i)} V, \qquad V = V(\vec{r}^{\,(1)}, \dots, \vec{r}^{\,(N)})$$

- generalisierte Kräfte: $\displaystyle Q_j = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}^{\,(i)} \cdot \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_j} = -\sum_{i=1}^{N} \vec{\nabla}^{(i)} V \cdot \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_j} = 0$$

- $\displaystyle \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^{N} \vec{\nabla}^{(i)} V \cdot \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial \dot{q}_j} = 0,$ da $\vec{r}^{\,(i)}$ nicht von $\dot{q}_j$ abhängt

- Konservatives Kraftfeld mit geschwindigkeitsunabhängigem Potenzial:

$$\vec{F}^{(i)} = -\vec{\nabla}^{(i)} V, \quad V = V(\vec{r}^{(1)}, \dots, \vec{r}^{(N)})$$

- generalisierte Kräfte: $Q_j = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}^{(i)} \cdot \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_j} = -\sum_{i=1}^{N} \vec{\nabla}^{(i)} V \cdot \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_j} = 0$$

- $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^{N} \vec{\nabla}^{(i)} V \cdot \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial \dot{q}_j} = 0,$ da $\vec{r}^{(i)}$ nicht von $\dot{q}_j$ abhängt

$\Rightarrow$

Lagrange-Gleichungen 2. Art:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \qquad j = 1, \dots, s$$

$L \equiv T - V$ (Lagrange-Funktion)