Lagrange-Gleichungen 2. Art: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0\ , \quad j = 1, \dots, s$

- Zwangskräfte tauchen nicht mehr auf,
  Zwangsbedingungen wurden bei der Wahl der q_j verarbeitet
- Lagrange-Funktion: $L = T - V = L(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t)$
  - explizite Zeitabhängigkeit bei rheonomen Zwangsbedingungen

Lagrange-Gleichungen 2. Art: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0\,, \quad j = 1, \ldots, s$

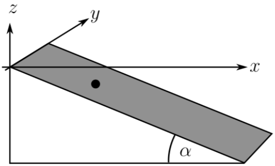
- Zwangskräfte tauchen nicht mehr auf,
  Zwangsbedingungen wurden bei der Wahl der q_j verarbeitet
- Lagrange-Funktion: $L = T - V = L(q_1, \ldots, q_s, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_s, t)$
  - explizite Zeitabhängigkeit bei rheonomen Zwangsbedingungen
- Vorgehensweise:

1. Bestimme die Zahl der Freiheitsgrade s und wähle geeignete generalisierte Koordinaten $q_1, \ldots q_s$.
2. Bestimme T, V und damit die Lagrange-Funktion $L = T - V$ als Funktion der q_j und $\dot{q}_j$ (und t).
3. Berechne daraus die Lagrange-Gleichungen $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$

(4. Löse die Gleichungen.)

Beispiel 1: Teilchen auf schiefer Ebene

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

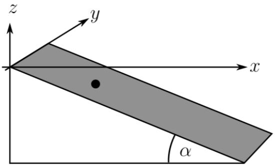


- Zwangsbedingung: $z = -x \tan \alpha$

→ generalisierte (= unabhängige) Koordinaten: x, y

Beispiel 1: Teilchen auf schiefer Ebene

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT



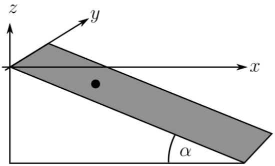
- Zwangsbedingung: $z = -x \tan\alpha$

→ generalisierte (= unabhängige) Koordinaten: x, y

- $$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2(1 + \tan^2\alpha) + \dot{y}^2\right) = \frac{m}{2}\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)$$

Beispiel 1: Teilchen auf schiefer Ebene

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT



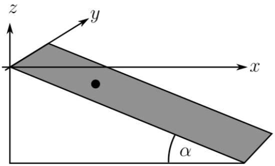
- Zwangsbedingung: $z = -x \tan\alpha$

→ generalisierte (= unabhängige) Koordinaten: x, y

- $$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2(1+\tan^2\alpha) + \dot{y}^2\right) = \frac{m}{2}\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)$$

- $V = mgz = -mgx\tan\alpha$

Beispiel 1: Teilchen auf schiefer Ebene



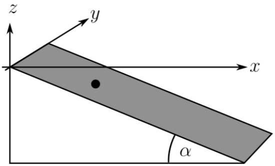
- Zwangsbedingung: $z = -x \tan\alpha$

→ generalisierte (= unabhängige) Koordinaten: x, y

- $T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$
  $= \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2(1 + \tan^2\alpha) + \dot{y}^2\right) = \frac{m}{2}\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)$
- $V = mgz = -mgx\tan\alpha$

⇒ Lagrange-Funktion: $L = T - V = \frac{m}{2}\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + mgx\tan\alpha$

Beispiel 1: Teilchen auf schiefer Ebene



- Zwangsbedingung: $z = -x \tan\alpha$

→ generalisierte (= unabhängige) Koordinaten: x, y

- $T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$
  $= \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2(1 + \tan^2\alpha) + \dot{y}^2\right) = \frac{m}{2}\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)$

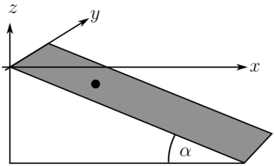
- $V = mgz = -mgx\tan\alpha$

$\Rightarrow$ Lagrange-Funktion: $L = T - V = \frac{m}{2}\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + mgx\tan\alpha$

- $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{m}{\cos^2\alpha}\dot{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{m}{\cos^2\alpha}\ddot{x}, \qquad \frac{\partial L}{\partial x} = mg\tan\alpha$

Beispiel 1: Teilchen auf schiefer Ebene

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT



- Zwangsbedingung: $z = -x \tan\alpha$

$\rightarrow$ generalisierte (= unabhängige) Koordinaten: x, y

- $T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$
  $= \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2(1 + \tan^2\alpha) + \dot{y}^2\right) = \frac{m}{2}\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)$
- $V = mgz = -mgx\tan\alpha$

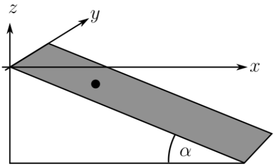
$\Rightarrow$ Lagrange-Funktion: $L = T - V = \frac{m}{2}\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + mgx\tan\alpha$

- $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{m}{\cos^2\alpha}\dot{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{m}{\cos^2\alpha}\ddot{x}, \qquad \frac{\partial L}{\partial x} = mg\tan\alpha$

  $\Rightarrow \quad \frac{m}{\cos^2\alpha}\ddot{x} - mg\tan\alpha = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x} = g\cos\alpha\sin\alpha$

Beispiel 1: Teilchen auf schiefer Ebene

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT



- Zwangsbedingung: $z = -x \tan\alpha$

→ generalisierte (= unabhängige) Koordinaten: x, y

- $T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$
  $= \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2(1+\tan^2\alpha) + \dot{y}^2\right) = \frac{m}{2}\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)$

- $V = mgz = -mgx\tan\alpha$

$\Rightarrow$ Lagrange-Funktion: $L = T - V = \frac{m}{2}\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + mgx\tan\alpha$

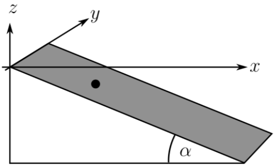
- $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{m}{\cos^2\alpha}\dot{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{m}{\cos^2\alpha}\ddot{x}, \qquad \frac{\partial L}{\partial x} = mg\tan\alpha$

  $\Rightarrow \quad \frac{m}{\cos^2\alpha}\ddot{x} - mg\tan\alpha = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x} = g\cos\alpha\sin\alpha$

- $\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\ddot{y}, \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = 0$

Beispiel 1: Teilchen auf schiefer Ebene

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT



- Zwangsbedingung: $z = -x \tan\alpha$

→ generalisierte (= unabhängige) Koordinaten: x, y

- $T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$
  $= \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2(1+\tan^2\alpha) + \dot{y}^2\right) = \frac{m}{2}\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)$

- $V = mgz = -mgx\tan\alpha$

$\Rightarrow$ Lagrange-Funktion: $L = T - V = \frac{m}{2}\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + mgx\tan\alpha$

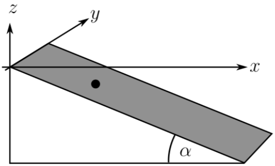
- $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{m}{\cos^2\alpha}\dot{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{m}{\cos^2\alpha}\ddot{x}, \qquad \frac{\partial L}{\partial x} = mg\tan\alpha$

  $\Rightarrow \quad \frac{m}{\cos^2\alpha}\ddot{x} - mg\tan\alpha = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x} = g\cos\alpha\sin\alpha$

- $\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\ddot{y}, \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad m\ddot{y} = 0$

Beispiel 1: Teilchen auf schiefer Ebene

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT



- Zwangsbedingung: $z = -x \tan\alpha$

$\rightarrow$ generalisierte (= unabhängige) Koordinaten: x, y

- $T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$
  $= \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2(1+\tan^2\alpha) + \dot{y}^2\right) = \frac{m}{2}\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)$

- $V = mgz = -mgx\tan\alpha$

$\Rightarrow$ Lagrange-Funktion: $L = T - V = \frac{m}{2}\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + mgx\tan\alpha$

- $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{m}{\cos^2\alpha}\dot{x} \quad\Rightarrow\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{m}{\cos^2\alpha}\ddot{x}, \qquad \frac{\partial L}{\partial x} = mg\tan\alpha$

  $\Rightarrow \quad \frac{m}{\cos^2\alpha}\ddot{x} - mg\tan\alpha = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \ddot{x} = g\cos\alpha\sin\alpha$

- $\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \quad\Rightarrow\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\ddot{y}, \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \qquad\Rightarrow\qquad m\ddot{y} = 0$

Gleiche Bewegungsgleichungen wie mit Lagrange 1. Art! ✓

4.5 Erhaltungssätze

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

4.5 Erhaltungssätze

- **Def.:** „zu q_j kanonisch konjugierter Impuls“: $p_j \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$

4.5 Erhaltungssätze

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- **Def.:** „zu q_j kanonisch konjugierter Impuls“: $p_j \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$

  Beispiele:

  - keine Zwangsbedingung: $q_j = r_j$ (kartesische Koordinaten)

    $L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^{\,2} - V(\vec{r}) \quad \Leftrightarrow \quad p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_j} = m \dot{r}_j$ gewöhnlicher Impuls

4.5 Erhaltungssätze

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- **Def.:** „zu q_j kanonisch konjugierter Impuls“: $p_j \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$

Beispiele:

- keine Zwangsbedingung: $q_j = r_j$ (kartesische Koordinaten)

  $L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^{\,2} - V(\vec{r}) \quad \Leftrightarrow \quad p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_j} = m \dot{r}_j$ gewöhnlicher Impuls

- Kreisbewegung mit Radius R um die z-Achse: $q = \varphi$

  $L = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\varphi}^{\,2} - V(\varphi) \quad \Leftrightarrow \quad p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m R^2 \dot{\varphi}$ Drehimpuls

- **Def.:** „zu q_j kanonisch konjugierter Impuls“: $p_j \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$

  Beispiele:

  - keine Zwangsbedingung: $q_j = r_j$ (kartesische Koordinaten)

    $L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^{\,2} - V(\vec{r}) \quad \Leftrightarrow \quad p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_j} = m \dot{r}_j$ gewöhnlicher Impuls

  - Kreisbewegung mit Radius R um die z-Achse: $q = \varphi$

    $L = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\varphi}^{\,2} - V(\varphi) \quad \Leftrightarrow \quad p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m R^2 \dot{\varphi}$ Drehimpuls

- Zeitableitung: $\dot{p}_j = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \overset{\text{Lagrange}}{=} \frac{\partial L}{\partial q_j}$

4.5 Erhaltungssätze

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- **Def.:** „zu q_j kanonisch konjugierter Impuls“: $p_j \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$

  Beispiele:

  - keine Zwangsbedingung: $q_j = r_j$ (kartesische Koordinaten)

    $L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^{\,2} - V(\vec{r}) \quad \Leftrightarrow \quad p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_j} = m \dot{r}_j$ gewöhnlicher Impuls

  - Kreisbewegung mit Radius R um die z-Achse: $q = \varphi$

    $L = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\varphi}^{\,2} - V(\varphi) \quad \Leftrightarrow \quad p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m R^2 \dot{\varphi}$ Drehimpuls

- Zeitableitung: $\dot{p}_j = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \overset{\text{Lagrange}}{=} \frac{\partial L}{\partial q_j}$

  (generalisierte Kraft: $Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} = \frac{\partial L}{\partial q_j}$, sofern T nicht von q_j abhängt)

4.5 Erhaltungssätze

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- **Def.:** „zu q_j kanonisch konjugierter Impuls“: $p_j \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$

  Beispiele:

  - keine Zwangsbedingung: $q_j = r_j$ (kartesische Koordinaten)

    $L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^{\,2} - V(\vec{r}) \quad \Leftrightarrow \quad p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_j} = m\dot{r}_j$ gewöhnlicher Impuls

  - Kreisbewegung mit Radius R um die z-Achse: $q = \varphi$

    $L = \frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}^{\,2} - V(\varphi) \quad \Leftrightarrow \quad p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mR^2\dot{\varphi}$ Drehimpuls

- Zeitableitung: $\dot{p}_j = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \overset{\text{Lagrange}}{=} \frac{\partial L}{\partial q_j}$

  (generalisierte Kraft: $Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} = \frac{\partial L}{\partial q_j}$, sofern T nicht von q_j abhängt)

- **Def.:** q_j = „zyklische Koordinate“: $\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$

  $\Rightarrow$ $\boxed{q_j \text{ zyklisch} \quad \Rightarrow \quad p_j = \text{Erhaltungsgröße}}$

- Noether-Theorem (Emmy Noether, 1918)

  Zu jeder kontinuierlichen Symmetrie eines physikalischen Systems gehört eine Erhaltungsgröße.

- Noether-Theorem (Emmy Noether, 1918)

  Zu jeder kontinuierlichen Symmetrie eines physikalischen Systems gehört eine Erhaltungsgröße.

  - „Wirkung“: $S = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L$
  - Symmetrie:
    (Koordinaten-) Transformation, die die Wirkung invariant lässt

Homogenität der Zeit

Homogenität der Zeit

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Homogenität der Zeit:
  Der Ablauf eines Experiments hängt nicht vom Anfangszeitpunkt ab:

  gleiche Anfangsbedingungen zu unterschiedlichen Zeiten t_A und $t_B = t_A + \Delta t$

  $\rightarrow$ analog zeitverschobene Bewegungsabläufe $\vec{r}_A^{(i)}(t) = \vec{r}_B^{(i)}(t + \Delta t)$

Homogenität der Zeit

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Homogenität der Zeit:
  Der Ablauf eines Experiments hängt nicht vom Anfangszeitpunkt ab:

  gleiche Anfangsbedingungen zu unterschiedlichen Zeiten t_A und $t_B = t_A + \Delta t$

  $\rightarrow$ analog zeitverschobene Bewegungsabläufe $\vec{r}_A^{\,(i)}(t) = \vec{r}_B^{\,(i)}(t + \Delta t)$

- Voraussetzung: keine zeitabhängigen Zwangsbedingungen

  $\Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad L = L(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, \cancel{t})$

Homogenität der Zeit

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Homogenität der Zeit:
  Der Ablauf eines Experiments hängt nicht vom Anfangszeitpunkt ab:

  gleiche Anfangsbedingungen zu unterschiedlichen Zeiten t_A und $t_B = t_A + \Delta t$

  ➞ analog zeitverschobene Bewegungsabläufe $\vec{r}_A^{\,(i)}(t) = \vec{r}_B^{\,(i)}(t + \Delta t)$

- Voraussetzung: keine zeitabhängigen Zwangsbedingungen

  $\Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad L = L(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, \cancel{t})$

$$\Rightarrow \quad \frac{dL}{dt} = \sum_{j=1}^{s} \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right)$$

Homogenität der Zeit

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Homogenität der Zeit:
  Der Ablauf eines Experiments hängt nicht vom Anfangszeitpunkt ab:

  gleiche Anfangsbedingungen zu unterschiedlichen Zeiten t_A und $t_B = t_A + \Delta t$
  $\rightarrow$ analog zeitverschobene Bewegungsabläufe $\vec{r}_A^{\,(i)}(t) = \vec{r}_B^{\,(i)}(t + \Delta t)$

- Voraussetzung: keine zeitabhängigen Zwangsbedingungen
  $\Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad L = L(q_1, \ldots, q_s, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_s, \cancel{t})$

$$\Rightarrow \quad \frac{dL}{dt} = \sum_{j=1}^{s} \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right) = \sum_{j=1}^{s} \left(\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right)$$

Homogenität der Zeit

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Homogenität der Zeit:
  Der Ablauf eines Experiments hängt nicht vom Anfangszeitpunkt ab:

  gleiche Anfangsbedingungen zu unterschiedlichen Zeiten t_A und $t_B = t_A + \Delta t$

  $\rightarrow$ analog zeitverschobene Bewegungsabläufe $\vec{r}_A^{\,(i)}(t) = \vec{r}_B^{\,(i)}(t + \Delta t)$

- Voraussetzung: keine zeitabhängigen Zwangsbedingungen

  $\Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad L = L(q_1, \ldots, q_s, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_s, \cancel{t})$

$$\Rightarrow \quad \frac{dL}{dt} = \sum_{j=1}^{s} \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right) = \sum_{j=1}^{s} \left(\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right) = \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j$$

Homogenität der Zeit

- Homogenität der Zeit:
  Der Ablauf eines Experiments hängt nicht vom Anfangszeitpunkt ab:

  gleiche Anfangsbedingungen zu unterschiedlichen Zeiten t_A und $t_B = t_A + \Delta t$
  $\rightarrow$ analog zeitverschobene Bewegungsabläufe $\vec{r}_A^{\,(i)}(t) = \vec{r}_B^{\,(i)}(t + \Delta t)$

- Voraussetzung: keine zeitabhängigen Zwangsbedingungen
  $\Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad L = L(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, \cancel{t})$

$$\Rightarrow \frac{dL}{dt} = \sum_{j=1}^{s} \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right) = \sum_{j=1}^{s} \left(\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right) = \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^{s} p_j \dot{q}_j$$

Homogenität der Zeit

- Homogenität der Zeit:
  Der Ablauf eines Experiments hängt nicht vom Anfangszeitpunkt ab:

  gleiche Anfangsbedingungen zu unterschiedlichen Zeiten t_A und $t_B = t_A + \Delta t$
  $\rightarrow$ analog zeitverschobene Bewegungsabläufe $\vec{r}_A^{\,(i)}(t) = \vec{r}_B^{\,(i)}(t + \Delta t)$

- Voraussetzung: keine zeitabhängigen Zwangsbedingungen
  $\Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad L = L(q_1, \ldots, q_s, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_s, \cancel{t})$

$$\Rightarrow \frac{dL}{dt} = \sum_{j=1}^{s} \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right) = \sum_{j=1}^{s} \left(\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right) = \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^{s} p_j \dot{q}_j$$

- **Def.:** $H \equiv \sum_{j=1}^{s} p_j \dot{q}_j - L$ „Hamilton-Funktion“

Homogenität der Zeit

- Homogenität der Zeit:
  Der Ablauf eines Experiments hängt nicht vom Anfangszeitpunkt ab:

  gleiche Anfangsbedingungen zu unterschiedlichen Zeiten t_A und $t_B = t_A + \Delta t$
  $\rightarrow$ analog zeitverschobene Bewegungsabläufe $\vec{r}_A^{(i)}(t) = \vec{r}_B^{(i)}(t + \Delta t)$

- Voraussetzung: keine zeitabhängigen Zwangsbedingungen
  $\Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad L = L(q_1, \ldots, q_s, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_s, \cancel{t})$

$$\Rightarrow \frac{dL}{dt} = \sum_{j=1}^{s} \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right) = \sum_{j=1}^{s} \left(\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right) = \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^{s} p_j \dot{q}_j$$

- **Def.:** $H \equiv \sum_{j=1}^{s} p_j \dot{q}_j - L$ „Hamilton-Funktion“

- Dann gilt: Homogenität der Zeit $\Rightarrow \frac{dH}{dt} = 0 \Rightarrow H = const.$

Interpretation

Interpretation

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

skleronome Zwangsbedingungen $\rightarrow$ $\vec{r}^{\,(i)} = \vec{r}^{\,(i)}(q_1, \dots, q_s)\ , \quad \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial t} = 0$

Interpretation

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

skleronome Zwangsbedingungen $\rightarrow$ $\vec{r}^{\,(i)} = \vec{r}^{\,(i)}(q_1, \dots, q_s)$, $\quad \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial t} = 0$

$$\Rightarrow \quad \dot{\vec{r}}^{\,(i)} = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_k} \, \dot{q}_k$$

Interpretation

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

skleronome Zwangsbedingungen $\rightarrow\ \vec{r}^{\,(i)} = \vec{r}^{\,(i)}(q_1, \dots, q_s)\,, \quad \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial t} = 0$

$$\Rightarrow \quad \dot{\vec{r}}^{\,(i)} = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_k}\, \dot{q}_k$$

kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i\, {\dot{\vec{r}}^{\,(i)}}{}^2 = \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^{s} m_{k\ell}(q_1, \dots, q_s)\, \dot{q}_k \dot{q}_\ell \quad \text{mit} \quad m_{k\ell} \equiv \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_\ell}$$

Interpretation

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

skleronome Zwangsbedingungen $\longrightarrow$ $\vec{r}^{\,(i)} = \vec{r}^{\,(i)}(q_1, \dots, q_s)$, $\frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial t} = 0$

$$\Rightarrow \quad \dot{\vec{r}}^{\,(i)} = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_k}\, \dot{q}_k$$

kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \, {\dot{\vec{r}}^{\,(i)}}{}^2 = \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^{s} m_{k\ell}(q_1, \dots, q_s)\, \dot{q}_k \dot{q}_\ell \quad \text{mit} \quad m_{k\ell} \equiv \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_\ell}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\, \dot{q}_j = \frac{1}{2} \sum_{j,k,\ell=1}^{s} m_{k\ell} \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_k \dot{q}_\ell \right)}_{\delta_{jk} \dot{q}_\ell + \dot{q}_k \delta_{j\ell}} \dot{q}_j = \sum_{k,\ell=1}^{s} m_{k\ell}\, \dot{q}_k \dot{q}_\ell = 2T$$

Interpretation

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

skleronome Zwangsbedingungen $\longrightarrow$ $\vec{r}^{\,(i)} = \vec{r}^{\,(i)}(q_1, \dots, q_s)\;, \quad \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial t} = 0$

$$\Rightarrow \quad \dot{\vec{r}}^{\,(i)} = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_k}\, \dot{q}_k$$

kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i\, \dot{\vec{r}}^{\,(i)\,2} = \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^{s} m_{k\ell}(q_1, \dots, q_s)\, \dot{q}_k \dot{q}_\ell \quad \text{mit} \quad m_{k\ell} \equiv \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_\ell}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\, \dot{q}_j = \frac{1}{2} \sum_{j,k,\ell=1}^{s} m_{k\ell} \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_k \dot{q}_\ell \right)}_{\delta_{jk}\dot{q}_\ell + \dot{q}_k \delta_{j\ell}} \dot{q}_j = \sum_{k,\ell=1}^{s} m_{k\ell}\, \dot{q}_k \dot{q}_\ell = 2T$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{s} p_j \dot{q}_j = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \overset{\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0}{=} \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = 2T$$

Interpretation

skleronome Zwangsbedingungen $\rightarrow$ $\vec{r}^{\,(i)} = \vec{r}^{\,(i)}(q_1, \dots, q_s)\,, \quad \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial t} = 0$

$$\Rightarrow \quad \dot{\vec{r}}^{\,(i)} = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_k}\, \dot{q}_k$$

kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i\, \dot{\vec{r}}^{\,(i)\,2} = \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^{s} m_{k\ell}(q_1, \dots, q_s)\, \dot{q}_k \dot{q}_\ell \quad \text{mit} \quad m_{k\ell} \equiv \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_\ell}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\, \dot{q}_j = \frac{1}{2} \sum_{j,k,\ell=1}^{s} m_{k\ell} \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_k \dot{q}_\ell \right)}_{\delta_{jk} \dot{q}_\ell + \dot{q}_k \delta_{j\ell}} \dot{q}_j = \sum_{k,\ell=1}^{s} m_{k\ell}\, \dot{q}_k \dot{q}_\ell = 2T$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{s} p_j \dot{q}_j = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \overset{\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0}{=} \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = 2T$$

$\Rightarrow$ Hamilton-Funktion: $H = \sum_{j=1}^{s} p_j \dot{q}_j - L = 2T - (T - V) = T + V = E$

Symmetrien und Erhaltungssätze

Fazit:

- Homogenität der Zeit: $\Rightarrow$ Energieerhaltung: $E = const.$

Symmetrien und Erhaltungssätze

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fazit:

- Homogenität der Zeit: $\Rightarrow$ Energieerhaltung: $E = const.$

Analog kann man zeigen:

- Homogenität des Raumes
  (= Invarianz der phys. Abläufe gegenüber räumlichen Verschiebungen):

  $\Rightarrow$ Gesamtimpulserhaltung: $\vec{P} = const.$

Symmetrien und Erhaltungssätze

Fazit:

- Homogenität der Zeit: $\Rightarrow$ Energieerhaltung: $E = const.$

Analog kann man zeigen:

- Homogenität des Raumes
  (= Invarianz der phys. Abläufe gegenüber räumlichen Verschiebungen):

  $\Rightarrow$ Gesamtimpulserhaltung: $\vec{P} = const.$

- Isotropie des Raumes
  (= Invarianz der phys. Abläufe gegenüber Drehungen):

  $\Rightarrow$ Gesamtdrehimpulserhaltung: $\vec{L} = const.$

5. Schwingungen

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Motivation

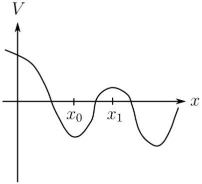
Motivation

- Schwingungen: weit verbreitetes physikalisches Phänomen
  - tritt oft auf, wenn ein System geringfügig aus dem Gleichgewicht gebracht wird

Motivation

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

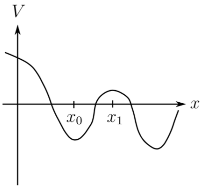
- **Beispiel:** eindim Potenzial mit Minimum bei $x = x_0$ und Maximum bei $x = x_1$



- $\left.\frac{dV}{dx}\right|_{x=x_0} = 0, \qquad \left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=x_0} \equiv k > 0$
- $\left.\frac{dV}{dx}\right|_{x=x_1} = 0, \qquad \left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=x_1} \equiv -\kappa < 0$

Motivation

- **Beispiel:** eindim Potenzial mit Minimum bei $x = x_0$ und Maximum bei $x = x_1$

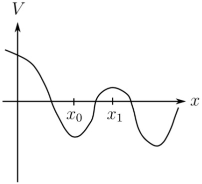


- $\left.\frac{dV}{dx}\right|_{x=x_0} = 0, \quad \left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=x_0} \equiv k > 0$
- $\left.\frac{dV}{dx}\right|_{x=x_1} = 0, \quad \left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=x_1} \equiv -\kappa < 0$
- Kraft: $F(x) = -\frac{dV}{dx} \quad \Rightarrow \quad F(x_0) = 0 = F(x_1)$

  („Gleichgewicht“)

Motivation

- **Beispiel:** eindim Potenzial mit Minimum bei $x = x_0$ und Maximum bei $x = x_1$



- $\left.\frac{dV}{dx}\right|_{x=x_0} = 0, \quad \left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=x_0} \equiv k > 0$
- $\left.\frac{dV}{dx}\right|_{x=x_1} = 0, \quad \left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=x_1} \equiv -\kappa < 0$
- Kraft: $F(x) = -\frac{dV}{dx} \quad \Rightarrow \quad F(x_0) = 0 = F(x_1)$

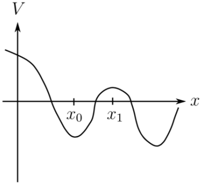
  („Gleichgewicht“)

- kleine Auslenkung um x_0:

$$V(x) = V(x_0) + \underbrace{V'(x_0)}_{=0}(x - x_0) + \frac{1}{2}\underbrace{V''(x_0)}_{=k}(x - x_0)^2 + \cdots \approx V(x_0) + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$$

Motivation

- **Beispiel:** eindim Potenzial mit Minimum bei $x = x_0$ und Maximum bei $x = x_1$



- $\left.\frac{dV}{dx}\right|_{x=x_0} = 0, \quad \left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=x_0} \equiv k > 0$
- $\left.\frac{dV}{dx}\right|_{x=x_1} = 0, \quad \left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=x_1} \equiv -\kappa < 0$
- Kraft: $F(x) = -\frac{dV}{dx} \quad \Rightarrow \quad F(x_0) = 0 = F(x_1)$

  („Gleichgewicht“)

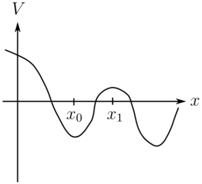
- kleine Auslenkung um x_0:

$$V(x) = V(x_0) + \underbrace{V'(x_0)}_{=0}(x - x_0) + \frac{1}{2}\underbrace{V''(x_0)}_{=k}(x - x_0)^2 + \cdots \approx V(x_0) + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$$

$\Rightarrow \quad F(x) \approx -k(x - x_0)$ (Hooke’sches Gesetz)

Motivation

- **Beispiel:** eindim Potenzial mit Minimum bei $x = x_0$ und Maximum bei $x = x_1$



- $\left.\frac{dV}{dx}\right|_{x=x_0} = 0, \quad \left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=x_0} \equiv k > 0$
- $\left.\frac{dV}{dx}\right|_{x=x_1} = 0, \quad \left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=x_1} \equiv -\kappa < 0$
- Kraft: $F(x) = -\frac{dV}{dx} \quad \Rightarrow \quad F(x_0) = 0 = F(x_1)$

  („Gleichgewicht“)

- kleine Auslenkung um x_0:

$$V(x) = V(x_0) + \underbrace{V'(x_0)}_{=0}(x - x_0) + \frac{1}{2}\underbrace{V''(x_0)}_{=k}(x - x_0)^2 + \cdots \approx V(x_0) + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$$

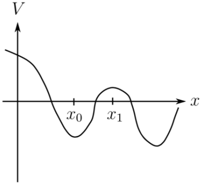
$\Rightarrow \quad F(x) \approx -k(x - x_0)$ (Hooke'sches Gesetz)

Teilchen wird in Richtung x_0 zurückgezogen ➞ stabiles Gleichgewicht!

Motivation

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- **Beispiel:** eindim Potenzial mit Minimum bei $x = x_0$ und Maximum bei $x = x_1$



- $\left.\frac{dV}{dx}\right|_{x=x_0} = 0, \quad \left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=x_0} \equiv k > 0$
- $\left.\frac{dV}{dx}\right|_{x=x_1} = 0, \quad \left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=x_1} \equiv -\kappa < 0$
- Kraft: $F(x) = -\frac{dV}{dx} \quad \Rightarrow \quad F(x_0) = 0 = F(x_1)$

  („Gleichgewicht")

- kleine Auslenkung um x_0:

$$V(x) = V(x_0) + \underbrace{V'(x_0)}_{=0}(x - x_0) + \frac{1}{2}\underbrace{V''(x_0)}_{=k}(x - x_0)^2 + \cdots \approx V(x_0) + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$$

$\Rightarrow \quad F(x) \approx -k(x - x_0)$ (Hooke'sches Gesetz)

Teilchen wird in Richtung x_0 zurückgezogen ➞ stabiles Gleichgewicht!

- kleine Auslenkung um $x_1 \Rightarrow \quad F(x) \approx +\kappa(x - x_1)$ labiles Gleichgewicht

5.1 Eindimensionaler harmonischer Oszillator

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

5.1 Eindimensionaler harmonischer Oszillator

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Wähle $V(x_0) = 0$ und Koordinatensystem so, dass $x_0 = 0$.

  $\Rightarrow \; V(x) = \frac{1}{2}kx^2$

5.1 Eindimensionaler harmonischer Oszillator

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Wähle $V(x_0) = 0$ und Koordinatensystem so, dass $x_0 = 0$.

  $\Rightarrow \; V(x) = \frac{1}{2}kx^2$

  $\Rightarrow \; m\ddot{x} = F(x) = -kx$

5.1 Eindimensionaler harmonischer Oszillator

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Wähle $V(x_0) = 0$ und Koordinatensystem so, dass $x_0 = 0$.

  $\Rightarrow \; V(x) = \frac{1}{2}kx^2$

  $\Rightarrow \; m\ddot{x} = F(x) = -kx \qquad \Leftrightarrow \qquad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$

5.1 Eindimensionaler harmonischer Oszillator

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Wähle $V(x_0) = 0$ und Koordinatensystem so, dass $x_0 = 0$.

$$\Rightarrow \quad V(x) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2$$

$$\Rightarrow \quad m\ddot{x} = F(x) = -kx \qquad \Leftrightarrow \qquad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \qquad \omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$$

5.1 Eindimensionaler harmonischer Oszillator

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Wähle $V(x_0) = 0$ und Koordinatensystem so, dass $x_0 = 0$.

  $\Rightarrow \; V(x) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2$

  $\Rightarrow \; m\ddot{x} = F(x) = -kx \qquad \Leftrightarrow \qquad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \qquad \omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$

- unabhängige Lösungen:
  - komplexe Lösungsbasis: $e^{i\omega_0 t}, \;\; e^{-i\omega_0 t}$
  - äquivalente reelle Basis: $\cos(\omega_0 t), \;\; \sin(\omega_0 t)$

5.1 Eindimensionaler harmonischer Oszillator

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Wähle $V(x_0) = 0$ und Koordinatensystem so, dass $x_0 = 0$.

  $\Rightarrow \; V(x) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2$

  $\Rightarrow \; m\ddot{x} = F(x) = -kx \qquad \Leftrightarrow \qquad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \qquad \omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$

- unabhängige Lösungen:
  - komplexe Lösungsbasis: $e^{i\omega_0 t}, \;\; e^{-i\omega_0 t}$
  - äquivalente reelle Basis: $\cos(\omega_0 t), \;\; \sin(\omega_0 t)$

$\Rightarrow$ allgemeine Lösung: $x(t) = a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t)$

5.1 Eindimensionaler harmonischer Oszillator

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Wähle $V(x_0) = 0$ und Koordinatensystem so, dass $x_0 = 0$.

  $\Rightarrow \; V(x) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2$

  $\Rightarrow \; m\ddot{x} = F(x) = -kx \qquad \Leftrightarrow \qquad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \qquad \omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$

- unabhängige Lösungen:
  - komplexe Lösungsbasis: $e^{i\omega_0 t}, \;\; e^{-i\omega_0 t}$
  - äquivalente reelle Basis: $\cos(\omega_0 t), \;\; \sin(\omega_0 t)$

$\Rightarrow$ allgemeine Lösung: $x(t) = a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$

$(\cos(\omega_0 t + \varphi) = \cos(\omega_0 t)\,\cos\varphi - \sin(\omega_0 t)\,\sin\varphi \;\Rightarrow\; a = A\cos\varphi, \;\; b = -A\sin\varphi)$

5.1 Eindimensionaler harmonischer Oszillator

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Wähle $V(x_0) = 0$ und Koordinatensystem so, dass $x_0 = 0$.

  $\Rightarrow \; V(x) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2$

  $\Rightarrow \; m\ddot{x} = F(x) = -kx \qquad \Leftrightarrow \qquad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \qquad \omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$

- unabhängige Lösungen:
  - komplexe Lösungsbasis: $e^{i\omega_0 t}, \; e^{-i\omega_0 t}$
  - äquivalente reelle Basis: $\cos(\omega_0 t), \; \sin(\omega_0 t)$

$\Rightarrow$ allgemeine Lösung: $x(t) = a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$

$(\cos(\omega_0 t + \varphi) = \cos(\omega_0 t)\,\cos\varphi - \sin(\omega_0 t)\,\sin\varphi \Rightarrow a = A\cos\varphi, \; b = -A\sin\varphi)$

$$\Rightarrow \; \dot{x}(t) = -A\omega_0\,\sin(\omega_0 t + \varphi)$$

5.1 Eindimensionaler harmonischer Oszillator

- Wähle $V(x_0) = 0$ und Koordinatensystem so, dass $x_0 = 0$.

  $\Rightarrow \; V(x) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2$

  $\Rightarrow \; m\ddot{x} = F(x) = -kx \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$

- unabhängige Lösungen:
  - komplexe Lösungsbasis: $e^{i\omega_0 t}, \; e^{-i\omega_0 t}$
  - äquivalente reelle Basis: $\cos(\omega_0 t), \; \sin(\omega_0 t)$

$\Rightarrow$ allgemeine Lösung: $x(t) = a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$

$(\cos(\omega_0 t + \varphi) = \cos(\omega_0 t)\,\cos\varphi - \sin(\omega_0 t)\,\sin\varphi \Rightarrow a = A\cos\varphi, \; b = -A\sin\varphi)$

$$\Rightarrow \; \dot{x}(t) = -A\,\omega_0\,\sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$\Rightarrow$ Energie: $E = T + V = \frac{1}{2}m\,\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\,\omega_0^2\,x^2$

5.1 Eindimensionaler harmonischer Oszillator

- Wähle $V(x_0) = 0$ und Koordinatensystem so, dass $x_0 = 0$.

  $\Rightarrow \ V(x) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2$

  $\Rightarrow \ m\ddot{x} = F(x) = -kx \qquad \Leftrightarrow \qquad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \qquad \omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$

- unabhängige Lösungen:
  - komplexe Lösungsbasis: $e^{i\omega_0 t}, \ \ e^{-i\omega_0 t}$
  - äquivalente reelle Basis: $\cos(\omega_0 t), \ \ \sin(\omega_0 t)$

$\Rightarrow$ allgemeine Lösung: $x(t) = a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$

$(\cos(\omega_0 t + \varphi) = \cos(\omega_0 t)\,\cos\varphi - \sin(\omega_0 t)\,\sin\varphi \Rightarrow a = A\cos\varphi, \ b = -A\sin\varphi)$

$$\Rightarrow \ \dot{x}(t) = -A\,\omega_0\,\sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$\Rightarrow$ Energie: $E = T + V = \frac{1}{2}m\,\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\,\omega_0^2\,x^2$

$$= \frac{1}{2}m\,A^2\,\omega_0^2\,\sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}m\,\omega_0^2\,A^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

5.1 Eindimensionaler harmonischer Oszillator

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Wähle $V(x_0) = 0$ und Koordinatensystem so, dass $x_0 = 0$.

$$\Rightarrow \quad V(x) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2$$

$$\Rightarrow \quad m\ddot{x} = F(x) = -kx \qquad \Leftrightarrow \qquad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \qquad \omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- unabhängige Lösungen:
  - komplexe Lösungsbasis: $e^{i\omega_0 t}$, $e^{-i\omega_0 t}$
  - äquivalente reelle Basis: $\cos(\omega_0 t)$, $\sin(\omega_0 t)$

$\Rightarrow$ allgemeine Lösung: $x(t) = a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$

$(\cos(\omega_0 t + \varphi) = \cos(\omega_0 t)\,\cos\varphi - \sin(\omega_0 t)\,\sin\varphi \Rightarrow a = A\cos\varphi,\ b = -A\sin\varphi)$

$$\Rightarrow \quad \dot{x}(t) = -A\,\omega_0\,\sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$\Rightarrow$ Energie:
$$E = T + V = \frac{1}{2}m\,\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\,\omega_0^2\,x^2$$
$$= \frac{1}{2}m\,A^2\,\omega_0^2\,\sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}m\,\omega_0^2\,A^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$
$$= \frac{1}{2}m\,\omega_0^2\,A^2 = const.$$