5.2 Schwingende Systeme mit mehreren Freiheitsgraden

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

5.2 Schwingende Systeme mit mehreren Freiheitsgraden

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- N-Teilchen-System, skleronome Zwangsbedingungen, s Freiheitsgrade:

$$\vec{r}^{\,(i)} = \vec{r}^{\,(i)}(q_1, \dots, q_s), \qquad \dot{\vec{r}}^{\,(i)} = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_k}\, \dot{q}_k$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\, \dot{\vec{r}}^{\,(i)^2} = \frac{1}{2}\sum_{k,\ell=1}^{s} m_{k\ell}(q_1, \dots, q_s)\, \dot{q}_k \dot{q}_\ell, \qquad m_{k\ell} = m_{\ell k} = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_\ell}$$

5.2 Schwingende Systeme mit mehreren Freiheitsgraden

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- N-Teilchen-System, skleronome Zwangsbedingungen, s Freiheitsgrade:

$$\vec{r}^{\,(i)} = \vec{r}^{\,(i)}(q_1, \dots, q_s), \qquad \dot{\vec{r}}^{\,(i)} = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_k}\, \dot{q}_k$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \, \dot{\vec{r}}^{\,(i)\,2} = \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^{s} m_{k\ell}(q_1, \dots, q_s)\, \dot{q}_k \dot{q}_\ell, \qquad m_{k\ell} = m_{\ell k} = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_\ell}$$

- kompakte Notation: $q \equiv \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_s \end{pmatrix}, \quad \dot{q} \equiv \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_s \end{pmatrix}$

5.2 Schwingende Systeme mit mehreren Freiheitsgraden

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- N-Teilchen-System, skleronome Zwangsbedingungen, s Freiheitsgrade:

$$\vec{r}^{\,(i)} = \vec{r}^{\,(i)}(q_1, \dots, q_s), \qquad \dot{\vec{r}}^{\,(i)} = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_k}\, \dot{q}_k$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\, \dot{\vec{r}}^{\,(i)\,2} = \frac{1}{2}\sum_{k,\ell=1}^{s} m_{k\ell}(q_1, \dots, q_s)\, \dot{q}_k \dot{q}_\ell, \qquad m_{k\ell} = m_{\ell k} = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_\ell}$$

- kompakte Notation: $q \equiv \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_s \end{pmatrix}, \quad \dot{q} \equiv \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_s \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \; L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\sum_{k,\ell=1}^{s} m_{k\ell}(q)\, \dot{q}_k \dot{q}_\ell - V(q) \equiv \frac{1}{2}\dot{q}^T \underline{\underline{m}}(q)\, \dot{q} - V(q)$$

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^{s} m_{k\ell}(q)\, \dot{q}_k \dot{q}_\ell - V(q)$$

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^{s} m_{k\ell}(q)\, \dot{q}_k \dot{q}_\ell - V(q)$$

- Bewegungsgleichungen:
  - $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{k=1}^{s} m_{jk}(q)\, \dot{q}_k$

$$L(q,\dot q) = \frac{1}{2}\sum_{k,\ell=1}^{s} m_{k\ell}(q)\,\dot q_k \dot q_\ell - V(q)$$

- Bewegungsgleichungen:
  - $\frac{\partial L}{\partial \dot q_j} = \sum_{k=1}^{s} m_{jk}(q)\,\dot q_k \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_j} = \sum_{k=1}^{s}\left(m_{jk}(q)\,\ddot q_k + \sum_{\ell=1}^{s} \frac{\partial m_{jk}(q)}{\partial q_\ell}\,\dot q_k \dot q_\ell \right)$

$$L(q,\dot q) = \frac{1}{2}\sum_{k,\ell=1}^{s} m_{k\ell}(q)\,\dot q_k \dot q_\ell - V(q)$$

- Bewegungsgleichungen:
  - $\frac{\partial L}{\partial \dot q_j} = \sum_{k=1}^{s} m_{jk}(q)\,\dot q_k \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_j} = \sum_{k=1}^{s}\left(m_{jk}(q)\,\ddot q_k + \sum_{\ell=1}^{s} \frac{\partial m_{jk}(q)}{\partial q_\ell}\,\dot q_k \dot q_\ell \right)$
  - $\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{1}{2}\sum_{k,\ell=1}^{s} \frac{\partial m_{k\ell}(q)}{\partial q_j}\,\dot q_k \dot q_\ell - \frac{\partial V(q)}{\partial q_j}$

$$L(q,\dot q) = \frac{1}{2}\sum_{k,\ell=1}^{s} m_{k\ell}(q)\,\dot q_k \dot q_\ell - V(q)$$

- Bewegungsgleichungen:
  - $\dfrac{\partial L}{\partial \dot q_j} = \sum_{k=1}^{s} m_{jk}(q)\,\dot q_k \quad \Rightarrow \quad \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot q_j} = \sum_{k=1}^{s}\left(m_{jk}(q)\,\ddot q_k + \sum_{\ell=1}^{s}\dfrac{\partial m_{jk}(q)}{\partial q_\ell}\,\dot q_k \dot q_\ell\right)$
  - $\dfrac{\partial L}{\partial q_j} = \dfrac{1}{2}\sum_{k,\ell=1}^{s}\dfrac{\partial m_{k\ell}(q)}{\partial q_j}\,\dot q_k \dot q_\ell - \dfrac{\partial V(q)}{\partial q_j}$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{s} m_{jk}(q)\,\ddot q_k + \sum_{k,\ell=1}^{s}\left(\frac{\partial m_{jk}(q)}{\partial q_\ell} - \frac{1}{2}\frac{\partial m_{k\ell}(q)}{\partial q_j}\right)\dot q_k \dot q_\ell + \frac{\partial V(q)}{\partial q_j} = 0$$

$$L(q,\dot q) = \frac{1}{2}\sum_{k,\ell=1}^{s} m_{k\ell}(q)\,\dot q_k \dot q_\ell - V(q)$$

- Bewegungsgleichungen:
  - $\frac{\partial L}{\partial \dot q_j} = \sum_{k=1}^{s} m_{jk}(q)\,\dot q_k \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_j} = \sum_{k=1}^{s}\left(m_{jk}(q)\,\ddot q_k + \sum_{\ell=1}^{s} \frac{\partial m_{jk}(q)}{\partial q_\ell}\,\dot q_k \dot q_\ell \right)$
  - $\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{1}{2}\sum_{k,\ell=1}^{s} \frac{\partial m_{k\ell}(q)}{\partial q_j}\,\dot q_k \dot q_\ell - \frac{\partial V(q)}{\partial q_j}$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{s} m_{jk}(q)\,\ddot q_k + \sum_{k,\ell=1}^{s}\left(\frac{\partial m_{jk}(q)}{\partial q_\ell} - \frac{1}{2}\frac{\partial m_{k\ell}(q)}{\partial q_j}\right)\dot q_k \dot q_\ell + \frac{\partial V(q)}{\partial q_j} = 0$$

- Gleichgewichtspunkte $\leftrightarrow$ Lösungen $q(t) = q_0 = const.$, d.h. $\dot q = 0$, $\ddot q = 0$

$$\Rightarrow \quad \left.\frac{\partial V(q)}{\partial q_j}\right|_{q=q_0} = 0$$

$$L(q,\dot q) = \frac{1}{2}\sum_{k,\ell=1}^{s} m_{k\ell}(q)\,\dot q_k \dot q_\ell - V(q)$$

- Bewegungsgleichungen:
  - $\frac{\partial L}{\partial \dot q_j} = \sum_{k=1}^{s} m_{jk}(q)\,\dot q_k \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_j} = \sum_{k=1}^{s}\left(m_{jk}(q)\,\ddot q_k + \sum_{\ell=1}^{s} \frac{\partial m_{jk}(q)}{\partial q_\ell}\,\dot q_k \dot q_\ell \right)$
  - $\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{1}{2}\sum_{k,\ell=1}^{s} \frac{\partial m_{k\ell}(q)}{\partial q_j}\,\dot q_k \dot q_\ell - \frac{\partial V(q)}{\partial q_j}$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{s} m_{jk}(q)\,\ddot q_k + \sum_{k,\ell=1}^{s}\left(\frac{\partial m_{jk}(q)}{\partial q_\ell} - \frac{1}{2}\frac{\partial m_{k\ell}(q)}{\partial q_j}\right)\dot q_k \dot q_\ell + \frac{\partial V(q)}{\partial q_j} = 0$$

- Gleichgewichtspunkte $\leftrightarrow$ Lösungen $q(t) = q_0 = const.$, d.h. $\dot q = 0$, $\ddot q = 0$

$$\Rightarrow \quad \left.\frac{\partial V(q)}{\partial q_j}\right|_{q=q_0} = 0$$

stabiles Gleichgewicht: lokales Minimum im s-dim q-Raum

$\Leftrightarrow$ Hesse Matrix $\left(\left.\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right|_{q=q_0} \right)$ hat nur positive Eigenwerte (s.u.)

Wähle $V(q_0) = 0$ und generalisierte Koordinaten so, dass $q_0 = 0$.

Wähle $V(q_0) = 0$ und generalisierte Koordinaten so, dass $q_0 = 0$.

- kleine Auslenkung:

$$V(q) = \underbrace{V(0)}_{=0} + \sum_{k=1}^{s} \underbrace{\left.\frac{\partial V}{\partial q_k}\right|_{q=0}}_{=0 \text{ (Gleichgew.)}} q_k + \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^{s} \left.\frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial q_\ell}\right|_{q=0} q_k\, q_\ell + \ldots$$

Wähle $V(q_0) = 0$ und generalisierte Koordinaten so, dass $q_0 = 0$.

- kleine Auslenkung:

$$V(q) = \underbrace{V(0)}_{=0} + \sum_{k=1}^{s} \underbrace{\left.\frac{\partial V}{\partial q_k}\right|_{q=0}}_{=0 \text{ (Gleichgew.)}} q_k + \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^{s} \left.\frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial q_\ell}\right|_{q=0} q_k\, q_\ell + \ldots$$

$$\approx \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^{s} K_{k\ell}\, q_k\, q_\ell \quad \text{mit} \quad K_{k\ell} \equiv \left.\frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial q_\ell}\right|_{q=0}$$

Wähle $V(q_0) = 0$ und generalisierte Koordinaten so, dass $q_0 = 0$.

- kleine Auslenkung:

$$V(q) = \underbrace{V(0)}_{=0} + \sum_{k=1}^{s} \underbrace{\left.\frac{\partial V}{\partial q_k}\right|_{q=0}}_{=0 \text{ (Gleichgew.)}} q_k + \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^{s} \left.\frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial q_\ell}\right|_{q=0} q_k\, q_\ell + \ldots$$

$$\approx \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^{s} K_{k\ell}\, q_k\, q_\ell \quad \text{mit} \quad K_{k\ell} \equiv \left.\frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial q_\ell}\right|_{q=0}$$

- kin. Energie: $T = \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^{s} m_{k\ell}(q)\, \dot{q}_k \dot{q}_\ell, \quad m_{k\ell}(q) = m_{k\ell}(0) + \sum_j \left.\frac{\partial m_{k\ell}}{\partial q_j}\right|_{q=0} q_j + \ldots$

Wähle $V(q_0) = 0$ und generalisierte Koordinaten so, dass $q_0 = 0$.

- kleine Auslenkung:

$$V(q) = \underbrace{V(0)}_{=0} + \sum_{k=1}^{s} \underbrace{\left.\frac{\partial V}{\partial q_k}\right|_{q=0}}_{=0\ \text{(Gleichgew.)}} q_k + \frac{1}{2}\sum_{k,\ell=1}^{s} \left.\frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial q_\ell}\right|_{q=0} q_k\, q_\ell + \ldots$$

$$\approx \frac{1}{2}\sum_{k,\ell=1}^{s} K_{k\ell}\, q_k\, q_\ell \quad \text{mit} \quad K_{k\ell} \equiv \left.\frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial q_\ell}\right|_{q=0}$$

- kin. Energie: $T = \frac{1}{2}\sum_{k,\ell=1}^{s} m_{k\ell}(q)\, \dot{q}_k \dot{q}_\ell, \quad m_{k\ell}(q) = m_{k\ell}(0) + \sum_j \left.\frac{\partial m_{k\ell}}{\partial q_j}\right|_{q=0} q_j + \ldots$

  Annahme: $\dot{q}$ klein, da q sonst nicht dauerhaft klein bleibt

Wähle $V(q_0) = 0$ und generalisierte Koordinaten so, dass $q_0 = 0$.

- kleine Auslenkung:

$$V(q) = \underbrace{V(0)}_{=0} + \sum_{k=1}^{s} \underbrace{\left.\frac{\partial V}{\partial q_k}\right|_{q=0}}_{=0 \text{ (Gleichgew.)}} q_k + \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^{s} \left.\frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial q_\ell}\right|_{q=0} q_k\, q_\ell + \ldots$$

$$\approx \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^{s} K_{k\ell}\, q_k\, q_\ell \quad \text{mit} \quad K_{k\ell} \equiv \left.\frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial q_\ell}\right|_{q=0}$$

- kin. Energie: $T = \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^{s} m_{k\ell}(q)\, \dot{q}_k \dot{q}_\ell, \quad m_{k\ell}(q) = m_{k\ell}(0) + \sum_j \left.\frac{\partial m_{k\ell}}{\partial q_j}\right|_{q=0} q_j + \ldots$

  Annahme: $\dot{q}$ klein, da q sonst nicht dauerhaft klein bleibt

  $$\Rightarrow \quad T \approx \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^{s} m_{k\ell}(0)\, \dot{q}_k \dot{q}_\ell$$

  (bereits quadratisch in kleinen Größen)

Wähle $V(q_0) = 0$ und generalisierte Koordinaten so, dass $q_0 = 0$.

- kleine Auslenkung:

$$V(q) = \underbrace{V(0)}_{=0} + \sum_{k=1}^{s} \underbrace{\left.\frac{\partial V}{\partial q_k}\right|_{q=0}}_{=0\ \text{(Gleichgew.)}} q_k + \frac{1}{2}\sum_{k,\ell=1}^{s} \left.\frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial q_\ell}\right|_{q=0} q_k\, q_\ell + \ldots$$

$$\approx \frac{1}{2}\sum_{k,\ell=1}^{s} K_{k\ell}\, q_k\, q_\ell \quad \text{mit} \quad K_{k\ell} \equiv \left.\frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial q_\ell}\right|_{q=0}$$

- kin. Energie: $T = \frac{1}{2}\sum_{k,\ell=1}^{s} m_{k\ell}(q)\,\dot{q}_k \dot{q}_\ell, \quad m_{k\ell}(q) = m_{k\ell}(0) + \sum_j \left.\frac{\partial m_{k\ell}}{\partial q_j}\right|_{q=0} q_j + \ldots$

  Annahme: $\dot{q}$ klein, da q sonst nicht dauerhaft klein bleibt

  $$\Rightarrow \quad T \approx \frac{1}{2}\sum_{k,\ell=1}^{s} m_{k\ell}(0)\,\dot{q}_k \dot{q}_\ell \equiv \frac{1}{2}\sum_{k,\ell=1}^{s} M_{k\ell}\,\dot{q}_k \dot{q}_\ell, \qquad M_{k\ell} = m_{k\ell}(0)$$

  (bereits quadratisch in kleinen Größen)

$$\Rightarrow \; L = T - V \approx \tfrac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^{s} \left(M_{k\ell}\, \dot{q}_k \dot{q}_\ell - K_{k\ell}\, q_k\, q_\ell \right)$$

$$\Rightarrow \quad L = T - V \approx \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^{s} \left(M_{k\ell}\, \dot{q}_k \dot{q}_\ell - K_{k\ell}\, q_k\, q_\ell \right)$$

- Bewegungsgleichungen (für kleine Auslenkungen):
  - $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{k=1}^{s} M_{jk}\, \dot{q}_k \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{k=1}^{s} M_{jk}\, \ddot{q}_k$
  - $\frac{\partial L}{\partial q_j} = -\sum_{k=1}^{s} K_{jk}\, q_k$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{s} \left(M_{jk}\, \ddot{q}_k + K_{jk}\, q_k \right) = 0, \qquad j = 1, \ldots, s$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$\Rightarrow \quad L = T - V \approx \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^{s} \left(M_{k\ell}\, \dot{q}_k \dot{q}_\ell - K_{k\ell}\, q_k\, q_\ell \right)$$

- Bewegungsgleichungen (für kleine Auslenkungen):
  - $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{k=1}^{s} M_{jk}\, \dot{q}_k \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{k=1}^{s} M_{jk}\, \ddot{q}_k$
  - $\frac{\partial L}{\partial q_j} = -\sum_{k=1}^{s} K_{jk}\, q_k$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{s} \left(M_{jk}\, \ddot{q}_k + K_{jk}\, q_k \right) = 0, \quad j = 1, \dots, s$$

- Matrixnotation:

$$T = \frac{1}{2}\, \dot{q}^T \underline{\underline{M}}\, \dot{q}\,, \quad V = \frac{1}{2}\, q^T \underline{\underline{K}}\, q, \quad L = \frac{1}{2} \left(\dot{q}^T \underline{\underline{M}}\, \dot{q} - q^T \underline{\underline{K}}\, q \right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\underline{\underline{M}}\, \ddot{q} + \underline{\underline{K}}\, q = 0}$$

$$\underline{\underline{M}}\,\ddot{q} + \underline{\underline{K}}\,q = 0$$

$$\underline{\underline{M}}\,\ddot{q} + \underline{\underline{K}}\,q = 0$$

- Lösungsansatz: $q(t) = \tilde{q}\,e^{i\omega t}$

$$\underline{\underline{M}}\,\ddot{q} + \underline{\underline{K}}\,q = 0$$

- Lösungsansatz: $q(t) = \tilde{q}\,e^{i\omega t} \quad \Rightarrow \quad \dot{q} = i\omega q, \quad \ddot{q} = -\omega^2 q$

$$\underline{\underline{M}}\,\ddot{q} + \underline{\underline{K}}\,q = 0$$

- Lösungsansatz: $q(t) = \tilde{q}\,e^{i\omega t} \quad \Rightarrow \quad \dot{q} = i\omega q, \quad \ddot{q} = -\omega^2 q$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\left(\underline{\underline{K}} - \omega^2 \underline{\underline{M}}\right)\,\tilde{q} = 0}$$

homogenes lineares Gleichungssystem für die s Komponenten von $\tilde{q}$

$$\underline{\underline{M}}\,\ddot{q} + \underline{\underline{K}}\,q = 0$$

- Lösungsansatz: $q(t) = \tilde{q}\,e^{i\omega t} \quad \Rightarrow \quad \dot{q} = i\omega q, \quad \ddot{q} = -\omega^2 q$

$\Rightarrow \quad \boxed{\left(\underline{\underline{K}} - \omega^2 \underline{\underline{M}}\right)\,\tilde{q} = 0}$ homogenes lineares Gleichungssystem für die s Komponenten von $\tilde{q}$

- triviale Lösung: $\tilde{q} = 0$ (existiert immer, aber physikalisch uninteressant)

- nicht-triviale Lösungen:

  existieren nur, wenn die Gleichungen linear abhängig sind

$\Leftrightarrow \quad \boxed{\det\left(\underline{\underline{K}} - \omega^2 \underline{\underline{M}}\right) = 0}$ „Säkulargleichung“ (verallgemeinertes Eigenwertproblem)

Säkulargleichung: $\det\left(\underline{\underline{K}} - \omega^2 \underline{\underline{M}}\right) = 0$

- linke Seite = Polynom s-ten Grades in ω^2

  → s verallgemeinerte Eigenwerte ω_j^2 (ω_j: „Eigenfrequenzen“)

  zugehörige Eigenvektoren: $\tilde{q}^{(j)}$ („Normalmoden“)

Säkulargleichung: $\det\left(\underline{\underline{K}} - \omega^2 \underline{\underline{M}}\right) = 0$

- linke Seite = Polynom s-ten Grades in ω^2

  → s verallgemeinerte Eigenwerte ω_j^2 (ω_j: „Eigenfrequenzen“)

  zugehörige Eigenvektoren: $\tilde{q}^{(j)}$ („Normalmoden“)

Eigenschaften (weitgehend ohne Beweis)

- $\underline{\underline{K}}$ und $\underline{\underline{M}}$ sind symmetrisch. $\Rightarrow \omega_j^2 \in \mathbb{R}$

Säkulargleichung: $\det\left(\underline{\underline{K}} - \omega^2 \underline{\underline{M}}\right) = 0$

- linke Seite = Polynom s-ten Grades in ω^2

  $\rightarrow$ s verallgemeinerte Eigenwerte ω_j^2 (ω_j: „Eigenfrequenzen“)

  zugehörige Eigenvektoren: $\tilde{q}^{(j)}$ („Normalmoden“)

Eigenschaften (weitgehend ohne Beweis)

- $\underline{\underline{K}}$ und $\underline{\underline{M}}$ sind symmetrisch. $\Rightarrow \omega_j^2 \in \mathbb{R}$
- $\tilde{q}^{(j)}$ können reell gewählt werden.

Säkulargleichung: $\det\left(\underline{\underline{K}} - \omega^2 \underline{\underline{M}}\right) = 0$

- linke Seite = Polynom s-ten Grades in ω^2

  → s verallgemeinerte Eigenwerte ω_j^2 (ω_j: „Eigenfrequenzen")

  zugehörige Eigenvektoren: $\tilde{q}^{(j)}$ („Normalmoden")

Eigenschaften (weitgehend ohne Beweis)

- $\underline{\underline{K}}$ und $\underline{\underline{M}}$ sind symmetrisch. $\Rightarrow \omega_j^2 \in \mathbb{R}$
- $\tilde{q}^{(j)}$ können reell gewählt werden.
- Mögliche Normierung: $\tilde{q}^{(j)\,T} \underline{\underline{M}}\, \tilde{q}^{(j)} = 1$

  Dann gilt: $\tilde{q}^{(i)\,T} \underline{\underline{M}}\, \tilde{q}^{(j)} = \delta_{ij}$

Säkulargleichung: $\det\left(\underline{\underline{K}} - \omega^2 \underline{\underline{M}}\right) = 0$

- linke Seite = Polynom s-ten Grades in ω^2

  $\rightarrow$ s verallgemeinerte Eigenwerte ω_j^2 (ω_j: „Eigenfrequenzen")

  zugehörige Eigenvektoren: $\tilde{q}^{(j)}$ („Normalmoden")

Eigenschaften (weitgehend ohne Beweis)

- $\underline{\underline{K}}$ und $\underline{\underline{M}}$ sind symmetrisch. $\Rightarrow$ $\omega_j^2 \in \mathbb{R}$
- $\tilde{q}^{(j)}$ können reell gewählt werden.
- Mögliche Normierung: $\tilde{q}^{(j)\,T} \underline{\underline{M}}\, \tilde{q}^{(j)} = 1$

  Dann gilt: $\tilde{q}^{(i)\,T} \underline{\underline{M}}\, \tilde{q}^{(j)} = \delta_{ij}$
- $\{\tilde{q}^{(j)}\}$ bildet eine Basis des s-dimensionalen Raums der q.

- verallgemeinerte Eigenwertgleichung: $\underline{\underline{K}}\tilde{q}^{(j)} = \omega_j^2 \, \underline{\underline{M}} \, \tilde{q}^{(j)}$

- verallgemeinerte Eigenwertgleichung: $\underline{\underline{K}}\tilde{q}^{(j)} = \omega_j^2\, \underline{\underline{M}}\, \tilde{q}^{(j)}$

$$\Rightarrow \quad \tilde{q}^{(j)\,T}\, \underline{\underline{K}}\, \tilde{q}^{(j)} = \omega_j^2\, \tilde{q}^{(j)\,T}\, \underline{\underline{M}}\, \tilde{q}^{(j)} = \omega_j^2$$

- verallgemeinerte Eigenwertgleichung: $\underline{\underline{K}}\tilde{q}^{(j)} = \omega_j^2\, \underline{\underline{M}}\, \tilde{q}^{(j)}$

  $\Rightarrow \quad {\tilde{q}^{(j)}}^T \underline{\underline{K}}\, \tilde{q}^{(j)} = \omega_j^2\, {\tilde{q}^{(j)}}^T \underline{\underline{M}}\, \tilde{q}^{(j)} = \omega_j^2$

- stabiler Gleichgewichtspunkt (= lokales Minimum von V):

  $\underline{\underline{K}}$ (= Hesse-Matrix) positiv definit $\Leftrightarrow$ $q^T \underline{\underline{K}} q > 0$ für alle q

- verallgemeinerte Eigenwertgleichung: $\underline{\underline{K}}\tilde{q}^{(j)} = \omega_j^2\, \underline{\underline{M}}\, \tilde{q}^{(j)}$

  $\Rightarrow \quad \tilde{q}^{(j)\,T} \underline{\underline{K}}\, \tilde{q}^{(j)} = \omega_j^2\; \tilde{q}^{(j)\,T} \underline{\underline{M}}\, \tilde{q}^{(j)} = \omega_j^2$

- stabiler Gleichgewichtspunkt (= lokales Minimum von V):

  $\underline{\underline{K}}$ (= Hesse-Matrix) positiv definit $\Leftrightarrow$ $q^T \underline{\underline{K}} q > 0$ für alle q

  $\Rightarrow \; \omega_j^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, s$

- verallgemeinerte Eigenwertgleichung: $\underline{\underline{K}}\tilde{q}^{(j)} = \omega_j^2\, \underline{\underline{M}}\, \tilde{q}^{(j)}$

  $\Rightarrow \quad \tilde{q}^{(j)\,T}\underline{\underline{K}}\, \tilde{q}^{(j)} = \omega_j^2\ \tilde{q}^{(j)\,T}\underline{\underline{M}}\, \tilde{q}^{(j)} = \omega_j^2$

- stabiler Gleichgewichtspunkt (= lokales Minimum von V):

  $\underline{\underline{K}}$ (= Hesse-Matrix) positiv definit $\Leftrightarrow$ $q^T\underline{\underline{K}}q > 0$ für alle q

  $\Rightarrow \ \omega_j^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \ldots, s$

- labiler Gleichgewichtspunkt ($\neq$ lokales Minimum von V):

  $\underline{\underline{K}}$ nicht positiv definit $\Rightarrow$ Es gibt Eigenwerte $\omega_j^2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_j = \pm i|\omega_j|$.

- verallgemeinerte Eigenwertgleichung: $\underline{\underline{K}}\tilde{q}^{(j)} = \omega_j^2\,\underline{\underline{M}}\,\tilde{q}^{(j)}$

  $\Rightarrow \quad \tilde{q}^{(j)\,T}\underline{\underline{K}}\,\tilde{q}^{(j)} = \omega_j^2\;\tilde{q}^{(j)\,T}\underline{\underline{M}}\,\tilde{q}^{(j)} = \omega_j^2$

- stabiler Gleichgewichtspunkt (= lokales Minimum von V):

  $\underline{\underline{K}}$ (= Hesse-Matrix) positiv definit $\Leftrightarrow$ $q^T\underline{\underline{K}}q > 0$ für alle q

  $\Rightarrow \; \omega_j^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, s$

- labiler Gleichgewichtspunkt ($\neq$ lokales Minimum von V):

  $\underline{\underline{K}}$ nicht positiv definit $\Rightarrow$ Es gibt Eigenwerte $\omega_j^2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_j = \pm i|\omega_j|$.

  Einsetzen in Lösungsansatz $q(t) = \tilde{q}e^{i\omega t} \quad \longrightarrow \quad q(t) = a\,e^{-|\omega_j|t} + b\,e^{+|\omega_j|t}$

- verallgemeinerte Eigenwertgleichung: $\underline{\underline{K}}\tilde{q}^{(j)} = \omega_j^2 \, \underline{\underline{M}} \, \tilde{q}^{(j)}$

  $\Rightarrow \quad \tilde{q}^{(j)\,T} \underline{\underline{K}} \, \tilde{q}^{(j)} = \omega_j^2 \; \tilde{q}^{(j)\,T} \underline{\underline{M}} \, \tilde{q}^{(j)} = \omega_j^2$

- stabiler Gleichgewichtspunkt (= lokales Minimum von V):

  $\underline{\underline{K}}$ (= Hesse-Matrix) positiv definit $\Leftrightarrow$ $q^T \underline{\underline{K}} q > 0$ für alle q

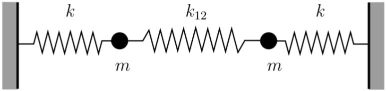
  $\Rightarrow \; \omega_j^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \ldots, s$

- labiler Gleichgewichtspunkt ($\neq$ lokales Minimum von V):

  $\underline{\underline{K}}$ nicht positiv definit $\;\Rightarrow\;$ Es gibt Eigenwerte $\omega_j^2 < 0 \;\Rightarrow\; \omega_j = \pm i |\omega_j|$.

  Einsetzen in Lösungsansatz $q(t) = \tilde{q} e^{i\omega t} \quad \longrightarrow \quad q(t) = a\, e^{-|\omega_j| t} + \underbrace{b\, e^{+|\omega_j| t}}_{\uparrow \text{ Instabilität}}$

Beispiel: zwei gekoppelte Oszillatoren

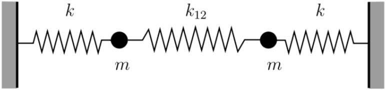


- generalisierte Koordinaten: q_k, $k = 1, 2$

  = Auslenkung der k-ten Masse aus der Gleichgewichtslage

Beispiel: zwei gekoppelte Oszillatoren

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

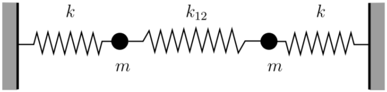


$$\Rightarrow \quad T = \frac{1}{2} m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2),$$

- generalisierte Koordinaten: q_k, $k = 1, 2$

  = Auslenkung der k-ten Masse aus der Gleichgewichtslage

Beispiel: zwei gekoppelte Oszillatoren

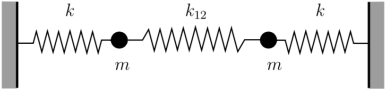


- generalisierte Koordinaten: q_k, $k = 1, 2$

  = Auslenkung der k-ten Masse aus der Gleichgewichtslage

$$\Rightarrow \quad T = \frac{1}{2} m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2), \qquad V = \frac{1}{2} k(q_1^2 + q_2^2) + \frac{1}{2} k_{12}(q_1 - q_2)^2$$

Beispiel: zwei gekoppelte Oszillatoren



- generalisierte Koordinaten: q_k, $k = 1, 2$

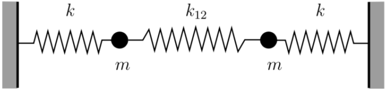
  = Auslenkung der k-ten Masse aus der Gleichgewichtslage

$$\Rightarrow \quad T = \tfrac{1}{2} m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2), \qquad V = \tfrac{1}{2} k(q_1^2 + q_2^2) + \tfrac{1}{2} k_{12}(q_1 - q_2)^2$$

- Matrixnotation:
  - $T = \frac{1}{2}(\dot{q}_1, \dot{q}_2) \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix}$
  - $V = \frac{1}{2}(q_1, q_2) \begin{pmatrix} k + k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k + k_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$

Beispiel: zwei gekoppelte Oszillatoren

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT



- generalisierte Koordinaten: q_k, $k = 1, 2$

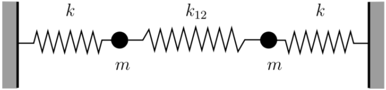
  = Auslenkung der k-ten Masse aus der Gleichgewichtslage

$$\Rightarrow \quad T = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2), \qquad V = \frac{1}{2}k(q_1^2 + q_2^2) + \frac{1}{2}k_{12}(q_1 - q_2)^2$$

- Matrixnotation:
  - $T = \frac{1}{2}(\dot{q}_1, \dot{q}_2)\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \quad \underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$
  - $V = \frac{1}{2}(q_1, q_2)\begin{pmatrix} k + k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k + k_{12} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \quad \underline{\underline{K}} = \begin{pmatrix} k + k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k + k_{12} \end{pmatrix}$

Beispiel: zwei gekoppelte Oszillatoren

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT



- generalisierte Koordinaten: q_k, $k = 1, 2$

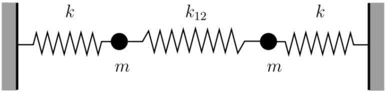
  = Auslenkung der k-ten Masse aus der Gleichgewichtslage

$$\Rightarrow \quad T = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2), \qquad V = \frac{1}{2}k(q_1^2 + q_2^2) + \frac{1}{2}k_{12}(q_1 - q_2)^2$$

- Matrixnotation:
  - $T = \frac{1}{2}(\dot{q}_1, \dot{q}_2)\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \quad \underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$
  - $V = \frac{1}{2}(q_1, q_2)\begin{pmatrix} k + k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k + k_{12} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \quad \underline{\underline{K}} = \begin{pmatrix} k + k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k + k_{12} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad 0 = \det\left(\underline{\underline{K}} - \omega^2 \underline{\underline{M}}\right) = \det\begin{pmatrix} k + k_{12} - \omega^2 m & -k_{12} \\ -k_{12} & k + k_{12} - \omega^2 m \end{pmatrix}$$

Beispiel: zwei gekoppelte Oszillatoren



- generalisierte Koordinaten: q_k, $k = 1, 2$

  = Auslenkung der k-ten Masse aus der Gleichgewichtslage

$$\Rightarrow \quad T = \frac{1}{2} m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2), \qquad V = \frac{1}{2} k(q_1^2 + q_2^2) + \frac{1}{2} k_{12}(q_1 - q_2)^2$$

- Matrixnotation:
  - $T = \frac{1}{2}(\dot{q}_1, \dot{q}_2) \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$
  - $V = \frac{1}{2}(q_1, q_2) \begin{pmatrix} k + k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k + k_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{K}} = \begin{pmatrix} k + k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k + k_{12} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad 0 = \det\left(\underline{\underline{K}} - \omega^2 \underline{\underline{M}}\right) = \det \begin{pmatrix} k + k_{12} - \omega^2 m & -k_{12} \\ -k_{12} & k + k_{12} - \omega^2 m \end{pmatrix}$$

$$= (k + k_{12} - \omega^2 m)^2 - k_{12}^2$$

- $(k + k_{12} - \omega^2 m)^2 - k_{12}^2 = 0$

- $(k + k_{12} - \omega^2 m)^2 - k_{12}^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 m - k - k_{12} = \pm k_{12}$

- $(k + k_{12} - \omega^2\, m)^2 - k_{12}^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega^2\, m - k - k_{12} = \pm k_{12}$

  ➞ quadrierte Eigenfrequenzen: $\omega_1^2 = \frac{k}{m} \quad \omega_2^2 = \frac{k+2k_{12}}{m}$

- $(k + k_{12} - \omega^2 m)^2 - k_{12}^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 m - k - k_{12} = \pm k_{12}$

  $\longrightarrow$ quadrierte Eigenfrequenzen: $\omega_1^2 = \frac{k}{m} \qquad \omega_2^2 = \frac{k+2k_{12}}{m}$

- Einsetzen in die Eigenwertgleichung:

  - $\underline{\underline{K}}\tilde{q}^{(1)} = \omega_1^2 \underline{\underline{M}}\tilde{q}^{(1)}$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} k + k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k + k_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{q}_1^{(1)} \\ \tilde{q}_2^{(1)} \end{pmatrix} = \frac{k}{m} \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{q}_1^{(1)} \\ \tilde{q}_2^{(1)} \end{pmatrix}$$

- $(k + k_{12} - \omega^2 m)^2 - k_{12}^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 m - k - k_{12} = \pm k_{12}$

  ➞ quadrierte Eigenfrequenzen: $\omega_1^2 = \frac{k}{m} \qquad \omega_2^2 = \frac{k+2k_{12}}{m}$

- Einsetzen in die Eigenwertgleichung:

  - $\underline{\underline{K}}\tilde{q}^{(1)} = \omega_1^2 \underline{\underline{M}}\tilde{q}^{(1)}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} k + k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k + k_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{q}_1^{(1)} \\ \tilde{q}_2^{(1)} \end{pmatrix} = \frac{k}{m} \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{q}_1^{(1)} \\ \tilde{q}_2^{(1)} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (k + k_{12})\tilde{q}_1^{(1)} - k_{12}\,\tilde{q}_2^{(1)} = k\tilde{q}_1^{(1)} \quad \Rightarrow \quad \tilde{q}_1^{(1)} = \tilde{q}_2^{(1)} \quad \Rightarrow \quad \tilde{q}^{(1)} = \mathcal{N}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $(k + k_{12} - \omega^2 m)^2 - k_{12}^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 m - k - k_{12} = \pm k_{12}$

  → quadrierte Eigenfrequenzen: $\omega_1^2 = \frac{k}{m} \quad \omega_2^2 = \frac{k+2k_{12}}{m}$

- Einsetzen in die Eigenwertgleichung:

  - $\underline{\underline{K}}\tilde{q}^{(1)} = \omega_1^2 \underline{\underline{M}}\tilde{q}^{(1)}$

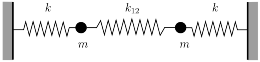
    $$\Rightarrow \begin{pmatrix} k + k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k + k_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{q}_1^{(1)} \\ \tilde{q}_2^{(1)} \end{pmatrix} = \frac{k}{m} \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{q}_1^{(1)} \\ \tilde{q}_2^{(1)} \end{pmatrix}$$

    $$\Rightarrow (k + k_{12})\tilde{q}_1^{(1)} - k_{12}\, \tilde{q}_2^{(1)} = k\tilde{q}_1^{(1)} \quad \Rightarrow \quad \tilde{q}_1^{(1)} = \tilde{q}_2^{(1)} \quad \Rightarrow \quad \tilde{q}^{(1)} = \mathcal{N}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  - $\underline{\underline{K}}\tilde{q}^{(2)} = \omega_2^2 \underline{\underline{M}}\tilde{q}^{(2)} \quad \Rightarrow \quad \ldots \quad \Rightarrow \quad \tilde{q}^{(2)} = \mathcal{N}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Interpretation

- $\tilde{q}^{(1)}\, e^{i\omega_1 t} = \mathcal{N}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\omega_1 t}, \qquad \omega_1^2 = \frac{k}{m}$

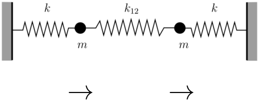


Interpretation

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

- $\tilde{q}^{(1)}\, e^{i\omega_1 t} = \mathcal{N}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\omega_1 t}, \qquad \omega_1^2 = \frac{k}{m}$

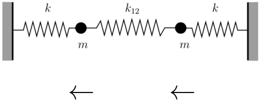
  → Massen schwingen gleichphasig



Interpretation

- $\tilde{q}^{(1)}\, e^{i\omega_1 t} = \mathcal{N}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\omega_1 t}, \qquad \omega_1^2 = \frac{k}{m}$

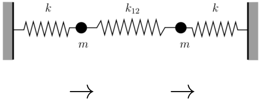
  → Massen schwingen gleichphasig



Interpretation

- $\tilde{q}^{(1)}\, e^{i\omega_1 t} = \mathcal{N}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\omega_1 t}, \qquad \omega_1^2 = \frac{k}{m}$

  → Massen schwingen gleichphasig



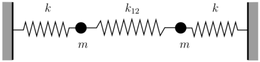
Interpretation

- $\tilde{q}^{(1)}\, e^{i\omega_1 t} = \mathcal{N}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\omega_1 t}, \qquad \omega_1^2 = \frac{k}{m}$

  → Massen schwingen gleichphasig

  $\Rightarrow$ Abstand bleibt konstant

  $\Rightarrow$ k_{12} für ω_1 irrelevant



$\rightarrow \qquad \rightarrow$

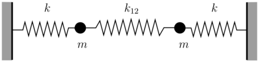
Interpretation

- $\tilde{q}^{(1)}\, e^{i\omega_1 t} = \mathcal{N}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\omega_1 t}, \qquad \omega_1^2 = \frac{k}{m}$

  ➞ Massen schwingen gleichphasig

  $\Rightarrow$ Abstand bleibt konstant

  $\Rightarrow$ k_{12} für ω_1 irrelevant



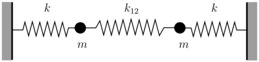
$\rightarrow \qquad \rightarrow$

- $\tilde{q}^{(2)}\, e^{i\omega_2 t} = \mathcal{N}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{i\omega_2 t}, \qquad \omega_2^2 = \frac{k+2k_{12}}{m}$

  ➞ Massen schwingen gegenphasig

  $\Rightarrow$ Abstand ändert sich

  $\Rightarrow$ k_{12} geht in ω_2 ein



$\rightarrow \qquad \leftarrow$

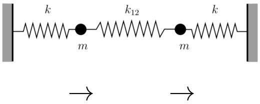
Interpretation

- $\tilde{q}^{(1)}\, e^{i\omega_1 t} = \mathcal{N}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\omega_1 t}, \qquad \omega_1^2 = \frac{k}{m}$

  ➞ Massen schwingen gleichphasig

  $\Rightarrow$ Abstand bleibt konstant

  $\Rightarrow$ k_{12} für ω_1 irrelevant

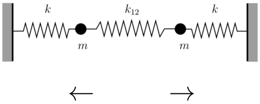


- $\tilde{q}^{(2)}\, e^{i\omega_2 t} = \mathcal{N}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{i\omega_2 t}, \qquad \omega_2^2 = \frac{k+2k_{12}}{m}$

  ➞ Massen schwingen gegenphasig

  $\Rightarrow$ Abstand ändert sich

  $\Rightarrow$ k_{12} geht in ω_2 ein



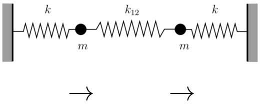
Interpretation

- $\tilde{q}^{(1)}\, e^{i\omega_1 t} = \mathcal{N}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\omega_1 t}, \qquad \omega_1^2 = \frac{k}{m}$

  ➞ Massen schwingen gleichphasig

  $\Rightarrow$ Abstand bleibt konstant

  $\Rightarrow$ k_{12} für ω_1 irrelevant



- $\tilde{q}^{(2)}\, e^{i\omega_2 t} = \mathcal{N}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{i\omega_2 t}, \qquad \omega_2^2 = \frac{k+2k_{12}}{m}$

  ➞ Massen schwingen gegenphasig

  $\Rightarrow$ Abstand ändert sich

  $\Rightarrow$ k_{12} geht in ω_2 ein