7.3.3 Maxwell-Gleichungen

1. Divergenz:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = 0 \qquad (\text{da } \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{V}) = 0 \text{ für beliebige } \vec{V}(\vec{r}))$$

$\rightsquigarrow$ magnet. Fluss durch geschlossene Oberflächen

$$\Phi_M := \oint_{\partial V} d\vec{\sigma}\cdot\vec{B} \overset{\text{Gauß}}{=} \int_V d^3r\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

Vergleich mit Elektrostatik: $\oint_{\partial V} d\vec{\sigma}\cdot\vec{E} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$

$\Rightarrow$ Es gibt keine magnetischen Ladungen!

2. Rotation:

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \Delta\vec{A}$$

Coulomb-Eichung: $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$

$\Rightarrow$ $\vec{\nabla}\times\vec{B} = -\Delta\vec{A}$ in Coulomb-Eichung

Magnetostatik im unendl. Raum: $\Delta \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \, \vec{j}(\vec{r}\,') \underbrace{\Delta_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}}_{-4\pi \, \delta(\vec{r} - \vec{r}\,')}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\Delta A(\vec{r}) = -\mu_0 \, \vec{j}(\vec{r})}$ „Grundgleichung der Magnetostatik"

(gilt in Coulomb-Eichung) (= Analogon zur Poisson-Gleichung)

$\Rightarrow$ $\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \, \vec{j}(\vec{r})}$ „Ampère'sches Gesetz"

gilt in jeder Eichung, da $\vec{B}$ eichinvariant ist!

4) Ampère'sches Durchflutungsgesetz:

$$\oint_{\partial S} d\vec{r} \cdot \vec{B}(\vec{r}) \overset{\text{Stokes}}{=} \int_S d\vec{\sigma} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r})) = \mu_0 \int_S d\vec{\sigma} \cdot \vec{j}(\vec{r}) = \mu_0 I$$

Maxwell-Gleichungen der Elektro- und Magnetostatik im Vakuum

differenzielle Form:

$$\boxed{\begin{array}{llll} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\,\varrho & \qquad & \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} = \vec{0} & \qquad & \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\,\vec{j} \end{array}}$$

integrale Form:

$$\boxed{\begin{array}{lll} \oint\limits_{\partial V} d\vec{\sigma}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\,Q & \qquad & \oint\limits_{\partial V} d\vec{\sigma}\cdot\vec{B} = 0 \\ \oint\limits_{\partial S} d\vec{r}\cdot\vec{E} = 0 & \qquad & \oint\limits_{\partial S} d\vec{r}\cdot\vec{B} = \mu_0\,I \end{array}}$$

7.4 Multipolentwicklung lokalisierter Stromverteilungen

$\vec{j}(\vec{r}\,') \neq 0$ nur für $\vec{r}\,' \in V$ (und $\vec{j}(\vec{r}\,') = 0$ für $\vec{r}\,' \in \partial V$)

$$\Rightarrow \quad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3r' \, \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

Taylorentw. von $\dfrac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$ für $|\vec{r}| \gg |\vec{r}\,'|$ (s. Abschnitt 6.6)

$$\hookrightarrow \quad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \Big(\underbrace{\frac{1}{r} \int_V d^3r' \, \vec{j}(\vec{r}\,')}_{\text{Monopol}} + \underbrace{\frac{1}{r^3} \int_V d^3r' \, (\vec{r}\,' \cdot \vec{r}) \, \vec{j}(\vec{r}\,')}_{\text{Dipol}} + \dots \Big)$$

Trick: $\vec{\nabla} r_i = \sum_j \dfrac{\partial r_i}{\partial r_j} \vec{e}_j = \sum_j \delta_{ij} \vec{e}_j = \vec{e}_i$

$$\Rightarrow \quad \int_V d^3r \, j_i(\vec{r}) = \int_V d^3r \, \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{e}_i = \int_V d^3r \, \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{\nabla} r_i \underset{\text{part. Int}}{=} - \int_V d^3r \, \underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}))}_{\substack{=0 \\ \text{(Magnetostatik)}}} r_i = 0$$

$\Rightarrow$ Es gibt keine magnet. Monopole!

$$\Rightarrow \quad \vec{A}(\vec{r}) \approx \vec{A}_{\text{Dipol}}(\vec{r})$$

Umformung des Dipol-Terms (s. Skript):

$$\vec{A}_{Dipol}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}$$

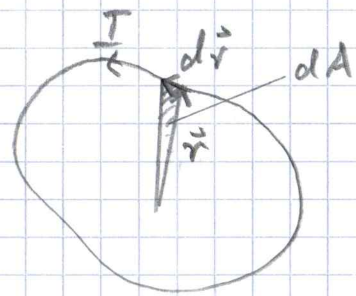
mit $\vec{m} = \frac{1}{2} \int_V d^3r' \, \vec{r}\,' \times \vec{j}(\vec{r}\,')$ „<u>magnetisches Moment</u>“

(Elektrostatik: $\Phi_D(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$, $\vec{p} = \int d^3r' \, \vec{r}\,' \rho(\vec{r}\,')$)

$$\Rightarrow \quad \vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) \approx \vec{\nabla} \times \vec{A}_{Dipol}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(3\frac{\vec{m}\cdot\vec{r}}{r^5}\vec{r} - \frac{\vec{m}}{r^3}\right)$$

($\vec{E} \leftrightarrow \vec{B}$, $\frac{1}{\varepsilon_0} \leftrightarrow \mu_0$, $\vec{p} \leftrightarrow \vec{m}$)

<u>Beispiel:</u> geschlossener ebener Stromkreis



Stromfaden: $\vec{j}(\vec{r})\, d^3r = I\, d\vec{r}$

$$\Rightarrow \vec{m} = \frac{1}{2} \int_V d^3r \, \vec{r} \times \vec{j}(\vec{r})$$

$$= I \oint_{\partial A} \underbrace{\frac{1}{2}\vec{r} \times d\vec{r}}_{dA\,\vec{n}} = I A \vec{n}$$

8. Elektro- und Magnetostatik in Materie

Ziel: Beschreibung von elektrischen und magnetischen Feldern in Anwesenheit nichtleitender Medien
- elektrisch neutral
- durch äußere Felder polarisierbar
(→ Dipolmomente)

mikroskopisch: bisherige Maxwell-Gln. weiterhin gültig (außer Quanteneffekte), aber genaue Ladungsverteilung i.d.R. nicht bekannt

→ makroskop. Beschreibung durch <u>Mittelung</u> über kleine Volumina:

Def. $$\bar{f}(\vec{r}) = \frac{1}{V}\int_{V_0} d^3R \; f(\vec{r}+\vec{R})$$, V_0: Kugel mit Volumen V und Mittelpkt. $\vec{R}=0$

Eigenschaft:

$$\frac{\partial}{\partial r_i}\bar{f}(\vec{r}) = \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial r_i}\right)}(\vec{r}) \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla}\bar{f} = \overline{(\vec{\nabla} f)}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\bar{\vec{E}} = \overline{(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})}, \quad \vec{\nabla}\times\bar{\vec{B}} = \overline{(\vec{\nabla}\times\vec{B})}, \text{ etc.}$$

8.1 Elektrostatik der Dielektrika

freie bewegliche Ladungen + neutrales Medium (z.B. Moleküle)

mikroskop. Größen: $\rho_m(\vec{r})$, $\vec{E}_m(\vec{r})$, $\phi_m(\vec{r})$

$\Rightarrow$ $\vec{E}_m = -\vec{\nabla}\phi_m$, $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_m = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho_m$, $\vec{\nabla}\times\vec{E}_m = \vec{0}$

$$\phi_m(\vec{r}) = \phi_{m,\text{frei}}(\vec{r}) + \sum_{j=1}^{N} \phi_{m,j}(\vec{r})$$

freie Ladungen: $\phi_{m,\text{frei}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r'\, \frac{\rho_{\text{frei}}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$

j-tes Molekül am Ort $\vec{R}_j$ mit Dipolmoment $\vec{p}_j$:

$$\phi_{m,j}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\vec{p}_j\cdot(\vec{r}-\vec{R}_j)}{|\vec{r}-\vec{R}_j|^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r'\, \vec{p}_j\,\delta(\vec{r}'-\vec{R}_j)\,\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

$$\Rightarrow \quad \phi_m(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r' \left(\frac{\rho_{\text{frei}}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \frac{\vec{P}_m(\vec{r}')\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \right)$$

mit $\vec{P}_m(\vec{r}) := \sum_{j=1}^{N} \vec{p}_j\,\delta(\vec{r}-\vec{R}_j)$ „mikroskop. Polarisation" makroskop. Beschreibung: $\vec{E} := \bar{\vec{E}}_m \,,\quad \phi := \bar{\Phi}_m \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$ ✓

$$\Rightarrow \phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{V}\int_{V_0} d^3R \int d^3r' \left(\frac{\varrho_{frei}(\vec{r}')}{|\vec{r}+\vec{R}-\vec{r}'|} + \frac{\vec{P}_m(\vec{r}')\cdot(\vec{r}+\vec{R}-\vec{r}')}{|\vec{r}+\vec{R}-\vec{r}'|^3} \right)$$

$$\underset{\vec{r}''=\vec{r}'-\vec{R}}{=} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{V}\int d^3R \int d^3r'' \left(\frac{\varrho_{frei}(\vec{r}''+\vec{R})}{|\vec{r}-\vec{r}''|} + \frac{\vec{P}_m(\vec{r}''+\vec{R})\cdot(\vec{r}-\vec{r}'')}{|\vec{r}-\vec{r}''|^3} \right)$$

$$\equiv \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r'' \left(\frac{\varrho(\vec{r}'')}{|\vec{r}-\vec{r}''|} + \frac{\vec{P}(\vec{r}'')\cdot(\vec{r}-\vec{r}'')}{|\vec{r}-\vec{r}''|^3} \right)$$

mit $\varrho(\vec{r}) := \bar{\varrho}_{frei}(\vec{r})$ „makroskop. Ladungsdichte"

$\vec{P}(\vec{r}) := \bar{\vec{P}}_m(\vec{r})$ „Polarisation"

$$\Rightarrow \phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r' \left(\frac{\varrho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \vec{P}(\vec{r}')\cdot\vec{\nabla}_{\vec{r}'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right)$$

$$\underset{\text{part. Int.}}{=} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r' \frac{\varrho(\vec{r}') - \vec{\nabla}\cdot\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \equiv \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r' \frac{\varrho(\vec{r}') + \varrho_P(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

mit $\varrho_P(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P}(\vec{r})$ „Polarisationsladungsdichte"

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = -\Delta\Phi = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\rho + \rho_P\right) = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\rho - \vec{\nabla}\cdot\vec{P}\right)$$

$\rightsquigarrow \quad \vec{D} := \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ „dielektrische Verschiebung"

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}_m = \vec{0} \quad \overset{\text{Mittelung}}{\Longrightarrow} \quad \boxed{\vec{\nabla}\times\vec{E} = \vec{0}}$$

<u>Verhalten an Grenzflächen</u>

Analog zum Vakuum:

$\vec{n}\cdot\left(\vec{D}_+ - \vec{D}_-\right) = \sigma$ = gemittelte Flächenladungsdichte der <u>freien</u> Ladungen

$$\left(\vec{t}\times\vec{n}\right)\cdot\left(\vec{E}_+ - \vec{E}_-\right) = 0$$

$\Rightarrow$ Die Tangentialkomponenten von $\vec{E}$ sind weiterhin stetig (gilt i. A. nicht für $\vec{D}$).