2) $\mathrm{Re}\,\psi = \mathrm{Re}\,\psi_0 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t) - \mathrm{Im}\,\psi_0 \sin(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t) \equiv |\psi_0| \cos(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t + \delta\varphi)$

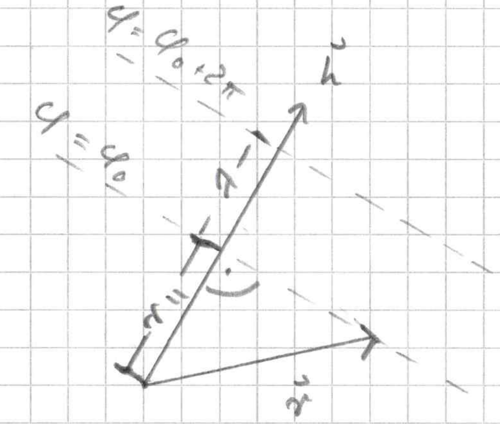
($\Leftrightarrow$ $\mathrm{Re}\,\psi_0 = |\psi_0| \cos\delta\varphi$, $\mathrm{Im}\,\psi_0 = |\psi_0| \sin\delta\varphi$)

Interpretation:

Betrachte Flächen gleicher Phase $\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t = \varphi_0 = \text{const}$

Bsp.: $\varphi_0 = 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow \psi = +\psi_0$ ($\hat{=}$ Wellenberge für $\delta\varphi = 0$)

$\varphi_0 = (2n+1)\pi$, " $\Rightarrow \psi = -\psi_0$ ($\hat{=}$ Wellentäler " " ")



- festgehaltene Zeit t_0

$\Rightarrow$ $r_\parallel := \frac{\vec{k}}{k}\cdot\vec{r} = \frac{1}{k}(\varphi_0 + \omega t_0) = \text{const}$

$\Rightarrow$ Punkte gleicher Phase = Ebene $\perp$ $\vec{k}$

Wellenlänge λ = Abstand $\Delta r_\parallel$ zweier Wellenfronten mit $\Delta\varphi = 2\pi$:

$2\pi = \Delta\varphi = \vec{k}\cdot\Delta\vec{r} = k\,\Delta r_\parallel = k\lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{2\pi}{k}$

- Zeitentwicklung

Orte konstanter Phase als Fkt. der Zeit:

$$\vec{k}\cdot\vec{r}(t) - \omega t = k r_{\parallel}(t) - \omega t = \varphi_0 = \text{const.} \quad \Rightarrow r_{\parallel}(t) = \frac{1}{k}(\omega t + \varphi_0)$$

$$\Rightarrow \text{Phasengeschwindigkeit:} \quad \dot{r}_{\parallel}(t) = \frac{\omega}{k} = c$$

$\Rightarrow$ Die Lösungen sind <u>ebene Wellen</u> mit Wellenfronten senkrecht zu $\vec{k}$ und Wellenlänge $\lambda = \frac{2\pi}{k}$, die sich mit konstanter Geschwindigkeit c in Richtung $\vec{k}$ ausbreiten.

Lösungen der Wellengleichungen:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}, \quad \omega = ck$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_0\, e^{i(\vec{k}'\cdot\vec{r} - \omega' t)}, \quad \omega' = ck'$$

bislang: $\vec{E}_0$, $\vec{B}_0$, $\vec{k}$, $\vec{k}'$ beliebig

Einsetzen in die Maxwell-Gln.:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = i\vec{k}\times\vec{E}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \overset{!}{=} -\dot{\vec{B}} = i\omega'\,\vec{B}_0\, e^{i(\vec{k}'\cdot\vec{r}-\omega' t)}$$

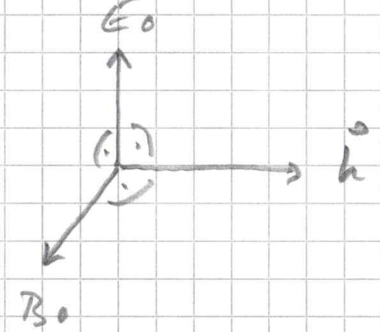
$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = i\vec{k}'\times\vec{B}_0\, e^{i(\vec{k}'\cdot\vec{r}-\omega t)} \overset{!}{=} \frac{1}{c^2}\dot{\vec{E}} = -i\frac{\omega}{c^2}\vec{E}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$

$$\forall\ \vec{r}, t \quad \Rightarrow \quad \vec{k}' = \vec{k} \qquad (\Rightarrow \omega' = \omega)$$

außerdem: $\vec{k}\times\vec{E}_0 = \omega\vec{B}_0 = ck\,\vec{B}_0 \quad \Rightarrow \vec{E}_0 \perp \vec{B}_0 \perp \vec{k}$

$$\vec{k}\times\vec{B}_0 = -\frac{\omega}{c^2}\vec{E}_0 = -\frac{k}{c}\vec{E}_0 \quad \Rightarrow \vec{B}_0 \perp \vec{E}_0 \perp \vec{k}$$

$\Rightarrow$



$$|\vec{E}_0| = c\,|\vec{B}_0|$$

$$\hookrightarrow \vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\vec{k}}{k}\times\vec{E}$$

Divergenz:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = i\vec{k}\cdot\vec{E} \overset{\vec{k}\perp\vec{E}}{=} 0 \ \checkmark \ , \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = i\vec{k}\cdot\vec{B} \overset{\vec{k}\perp\vec{B}}{=} 0 \ \checkmark$$

Polarisation:

o.B.d.A. Welle in z - Richtung : $\vec{k} = k\,\vec{e}_z \Rightarrow \vec{k}\cdot\vec{r} = kz$

$\Rightarrow \vec{E}$ in xy - Ebene

komplexe Lösungen:

$$E_{0x} = |E_{0x}|\, e^{i\varphi_x} \Rightarrow E_x = |E_{0x}|\, e^{i(kz-\omega t+\varphi_x)}$$

$$E_{0y} = |E_{0y}|\, e^{i\varphi_y} \Rightarrow E_y = |E_{0y}|\, e^{i(kz-\omega t+\varphi_y)}$$

$$\varphi_x =: \varphi \,, \quad \varphi_y := \varphi + \delta$$

$\hookrightarrow$ physikal. Lösungen (= Realteil):

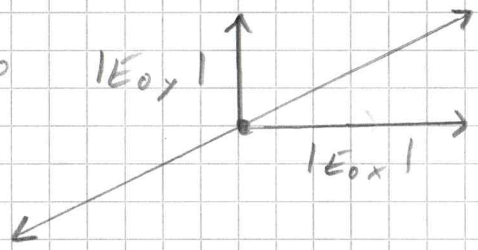
$$E_x = |E_{0x}| \cos(kz - \omega t + \varphi)$$

$$E_y = |E_{0y}| \cos(kz - \omega t + \varphi + \delta)$$

Fall 1: $\delta = 0$ oder $\delta = \pi$

$$\Rightarrow \vec{E} = \underbrace{\left(|E_{0x}|\vec{e}_x \pm |E_{0y}|\vec{e}_y \right)}_{\text{konstanter Vektor}} \cos(kz - \omega t + \varphi)$$

$\delta = 0$



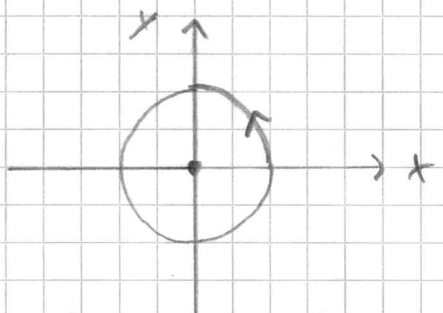
$\Rightarrow$ Schwingung in einer festen Richtung

linear Polarisation

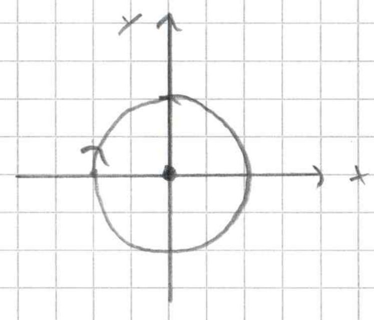
Fall 2: $|E_{0x}| = |E_{0y}| \equiv E$, $\delta = \pm \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \vec{E} = E \left(\cos(kz - \omega t + \varphi)\,\vec{e}_x \mp \sin(kz - \omega t + \varphi)\,\vec{e}_y \right)$$

$\delta = + \frac{\pi}{2}$



$\delta = - \frac{\pi}{2}$

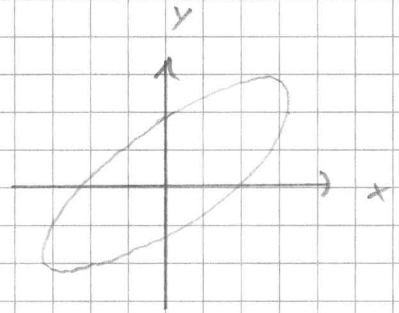


links-zirkular polarisiert

rechts-zirkular polarisiert

aus Sicht des Beobachters

Fall 3: alles andere



elliptische Polarisation

9.4 Elektromagnetische Potenziale

Elektro- und Magnetostatik: $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

automatisch erfüllt für $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$, $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

Elektrodynamik: $\vec{\nabla} \times \vec{E} + \dot{\vec{B}} = \vec{0}$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

2, nach wie vor: $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

$$\Rightarrow \vec{0} = \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{d}{dt}(\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} \times (\vec{E} + \dot{\vec{A}})$$

automatisch erfüllt für $\vec{E} + \dot{\vec{A}} = -\vec{\nabla}\phi$

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \dot{\vec{A}} \,, \qquad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Eichfreiheit: $\vec{B}$ und $\vec{E}$ sind invariant unter folgenden „Eichtransformationen":

$$\vec{A}(\vec{r},t) \rightarrow \vec{A}'(\vec{r},t) = \vec{A}(\vec{r},t) + \vec{\nabla}\chi(\vec{r},t)$$
$$\phi(\vec{r},t) \rightarrow \phi'(\vec{r},t) = \phi(\vec{r},t) - \dot{\chi}(\vec{r},t) \,, \qquad \chi = \text{beliebiges skalares Feld}$$

Beweis: $\vec{B}' = \vec{\nabla}\times\vec{A}' = \vec{\nabla}\times\vec{A} + \underbrace{\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\chi}_{=\vec{0}} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{B}$

$$\vec{E}' = -\vec{\nabla}\phi' - \dot{\vec{A}}' = -\vec{\nabla}\phi + \vec{\nabla}\dot{\chi} - \dot{\vec{A}} - \vec{\nabla}\dot{\chi} = -\vec{\nabla}\phi - \dot{\vec{A}} = \vec{E}$$

inhomogene Maxwell-Gln im Vakuum ($\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$, $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$)

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} - \dot{\vec{D}} = \vec{j} \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c^2}\dot{\vec{E}} = \mu_0 \vec{j} \,, \qquad c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla}\cdot(-\vec{\nabla}\phi - \dot{\vec{A}}) = -\Delta\phi - \vec{\nabla}\cdot\dot{\vec{A}} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

zeitabh. Verallgemeinerung der Poisson-Gl.

$$\underbrace{\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})}_{\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})-\Delta\vec{A}} - \frac{1}{c^2}(-\vec{\nabla}\dot{\phi} - \ddot{\vec{A}}) = \mu_0 \vec{j}$$

$$\Rightarrow \quad \Box\vec{A} + \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{c^2}\dot{\phi}\right) = \mu_0\vec{j}$$

- Coulomb-Eichung: $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{r},t) = 0 \quad \forall\, \vec{r}, t$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla}\cdot\dot{\vec{A}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta\phi(\vec{r},t) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\vec{r},t)$$ ($\hat{=}$ Poisson-Gleichung)

$$\Rightarrow \quad \phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r'\, \frac{\rho(\vec{r}',t)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$\Box\vec{A} = \mu_0\vec{j} - \frac{1}{c^2}\vec{\nabla}\dot{\phi} = \mu_0\vec{j} - \frac{\mu_0}{4\pi}\vec{\nabla}\int d^3r'\,\frac{\dot{\rho}(\vec{r}',t)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Kontinuitätsgl.: $\dot{\rho} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{j}$

$$\Rightarrow \quad \Box\vec{A}(\vec{r},t) = \mu_0\vec{j}(\vec{r},t) + \frac{\mu_0}{4\pi}\vec{\nabla}_{\vec{r}}\int d^3r'\,\frac{\vec{\nabla}_{\vec{r}'}\cdot\vec{j}(\vec{r}',t)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

- <u>Lorenz-Eichung</u> : $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c^2} \dot{\phi} = 0 \qquad \forall\, \vec{r}, t$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{A}} = -\frac{1}{c^2} \ddot{\phi}$$

$$\Rightarrow \quad -\Delta \phi + \frac{1}{c^2} \ddot{\phi} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \Box\, \phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{\varepsilon_0}\, \rho(\vec{r}, t)$$

sowie $\Box\, \vec{A}(\vec{r}, t) = \mu_0\, \vec{j}(\vec{r}, t)$

vier entkoppelte Wellengln

Vergleich :

Lorenz-Eichung : ϕ = Lösung einer Wellengl.

$\Rightarrow$ Änderung von $\rho, \vec{j} \longrightarrow$ Änderung von ϕ mit Lichtgeschwindigkeit

Coulomb-Eichung : Änderung von $\rho, \vec{j} \longrightarrow$ instantane Änderung von ϕ

aber : ϕ nicht messbar ; $\vec{E}$ und $\vec{B}$ unabh. von der Eichung (Änderung mit Lichtgeschw.)