9.6 Energie des elektromagnetischen Feldes

Punktladung q in $\vec{E}$- und $\vec{B}$-Feld $\Rightarrow$ $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

infinites. Verschiebung $d\vec{r} = \vec{v}\, dt$

$\Rightarrow$ vom Feld geleistete Arbeit $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = q\vec{E} \cdot \vec{v}\, dt + q\underbrace{(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v}}_{=0} dt = q\vec{E} \cdot \vec{v}\, dt$

Das $\vec{B}$-Feld leistet keine Arbeit!

$\Rightarrow$ Leistung $\dfrac{dW}{dt} = q\vec{E} \cdot \vec{v}$

kontinuierliche Ladungsvert.:

$$\frac{dW}{dt} = \int_V d^3r\; \vec{E}(\vec{r},t) \cdot \underbrace{\rho(\vec{r},t)\,\vec{v}(\vec{r},t)}_{\vec{j}(\vec{r},t)} = \int_V d^3r\; \vec{E}(\vec{r},t) \cdot \vec{j}(\vec{r},t)$$

Maxwell: $\vec{j} = \vec{\nabla} \times \vec{H} - \dot{\vec{D}}$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot \underbrace{(\vec{\nabla} \times \vec{E})}_{-\dot{\vec{B}}} - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = -\vec{H} \cdot \dot{\vec{B}} - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H})$$

$$\Rightarrow \vec{E} \cdot \vec{j} = \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H} - \dot{\vec{D}}) = -\vec{E} \cdot \dot{\vec{D}} - \vec{H} \cdot \dot{\vec{B}} - \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H})$$

$$\vec{E}\cdot\dot{\vec{D}} + \vec{H}\cdot\dot{\vec{B}} = \varepsilon_0\varepsilon_r\,\vec{E}\cdot\dot{\vec{E}} + \mu_0\mu_r\,\vec{H}\cdot\dot{\vec{H}} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}^2 + \mu_0\mu_r\vec{H}^2\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{H}\cdot\vec{B}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{E}\cdot\vec{j} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{H}\cdot\vec{B}\right) - \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{dW}{dt} = -\int_V d^3r \left\{\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{H}\cdot\vec{B}\right) + \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)\right\}$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_V d^3r\left(\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{H}\cdot\vec{B}\right) - \int_{\partial V} d\vec{\sigma}\cdot\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\underbrace{\int_V d^3r\;\vec{E}\cdot\vec{j}}_{\frac{d}{dt}W_{mech}} + \underbrace{\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_V d^3r\left(\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{H}\cdot\vec{B}\right)}_{\frac{d}{dt}W_{Feld}} + \underbrace{\int_{\partial V} d\vec{\sigma}\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)}_{\Phi_E} = 0}$$

- W_{mech}: mech. Energie der Ladungsträger in V
- W_{Feld}: " des elektromagn. Feldes in V
- Φ_E: Energiefluss des Feldes durch die Oberfl. aus V heraus

2) $$w(\vec{r},t) = \frac{1}{2}\left(\vec{E}(\vec{r},t)\cdot\vec{D}(\vec{r},t) + \vec{H}(\vec{r},t)\cdot\vec{B}(\vec{r},t)\right)$$ Energiedichte des elm. Feldes

(Elektrostatik im Vakuum: $w = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \vec{E}^2$ ✓)

$$\vec{S}(\vec{r},t) = \vec{E}(\vec{r},t) \times \vec{H}(\vec{r},t)$$ Energiestromdichte („Poynting-Vektor")

$$\Rightarrow \int_V d^3r\, \vec{E}\cdot\vec{j} + \frac{d}{dt}\int_V d^3r\, w + \int_{\partial V} d\vec{\sigma}\cdot\vec{S} = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_V d^3r \left(\vec{E}\cdot\vec{j} + \frac{\partial w}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{S}\right) = 0$$

V beliebig $\Rightarrow$ $$\boxed{\vec{E}\cdot\vec{j} + \frac{\partial w}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{S} = 0}$$ „Satz von Poynting"