10.6 Lorentz-Skalare, -Vektoren und -Tensoren

Raum-Zeit-Vierervektor

$$x \equiv (x^\mu) \equiv \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \vec{x} := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$ „Dreiervektor"

Wir haben gesehen, dass

$(x^0)^2 - \sum_{k=1}^{3} (x^k)^2 \equiv (x^0)^2 - \vec{x}^{\,2}$ invariant unter Lorentz-Transformation ist

$\vec{x}^{\,2} \equiv \sum_{k=1}^{3} (x^k)^2$ invariant unter Drehungen (Längenquadrat)

2, Def.:

$$(x_\mu) \equiv \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x^0 \\ -x^1 \\ -x^2 \\ -x^3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x^0 \\ -\vec{x} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} ct \\ -\vec{x} \end{pmatrix}$$ „kovarianter Vierervektor"

(x^μ): „kontravarianter Vierervektor"

$$\Rightarrow \quad x^2 \equiv \sum_{\mu=0}^{3} x^\mu x_\mu = \sum_{\mu=0}^{3} x_\mu x^\mu = (x^0)^2 - \vec{x}^2$$ invariant unter Lorentz-Transf.

Einstein'sche Summenkonvention:
Über gleiche Indizes oben und unten wird automatisch summiert.

$$\Rightarrow \quad x^\mu x_\mu \equiv \sum_{\mu=0}^{3} x^\mu x_\mu$$

(oft: griech. Indizes : $\sum_{\mu=0}^{3}$

latein. " : $\sum_{k=1}^{3}$)

„<u>metrischer Tensor</u>":

$$(g_{\mu\nu}) = (g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu \quad \left(\equiv \sum_{\nu=0}^{3} g_{\mu\nu} x^\nu\right), \qquad x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu \quad \left(\equiv \sum_{\nu=0}^{3} g^{\mu\nu} x_\nu\right)$$

$$g^\mu{}_\nu = g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu}$$

$$g_\mu{}^\nu = g_{\mu\lambda} g^{\lambda\nu}$$

$$\Rightarrow \quad (g^\mu{}_\nu) = (g_\mu{}^\nu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv (\delta^\mu_\nu)$$

Lorentz - Transformationen:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \quad , \qquad x'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu x_\nu$$

$$\parallel$$

$$g_{\mu\alpha} x'^\alpha = g_{\mu\alpha} \Lambda^\alpha{}_\beta x^\beta = g_{\mu\alpha} \Lambda^\alpha{}_\beta g^{\beta\nu} x_\nu$$

$$\Rightarrow \Lambda_\mu{}^\nu = g_{\mu\alpha} \Lambda^\alpha{}_\beta g^{\beta\nu} \quad \checkmark$$

Lorentz - Invarianz von $x_\mu x^\mu$:

$$x'_\mu x'^\mu = \Lambda_\mu{}^\nu x_\nu \Lambda^\mu{}_\lambda x^\lambda \overset{!}{=} x_\nu x^\nu = x_\nu g^\nu{}_\lambda x^\lambda \Rightarrow \Lambda_\mu{}^\nu \Lambda^\mu{}_\lambda = g^\nu{}_\lambda$$

$\hookrightarrow$ Rücktransformation:

$$x^\nu = g^\nu{}_\lambda x^\lambda = \Lambda_\mu{}^\nu \Lambda^\mu{}_\lambda x^\lambda = \Lambda_\mu{}^\nu x'^\mu \quad \Rightarrow \quad x^\nu = x'^\mu \Lambda_\mu{}^\nu$$

analog: $x_\nu = x'_\mu \Lambda^\mu{}_\nu$

- Def.: kontra- bzw. kovariante <u>Vierervektoren</u>

  = vierkomponentige Objekte (a^μ) bzw (a_μ),

  die sich genauso transformieren wie (x^μ) bzw. (x_μ):

$$\boxed{\begin{array}{lll} a'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu\, a^\nu & \Leftrightarrow & a'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu\, x_\nu \\ a^\nu = a'^\mu\, \Lambda_\mu{}^\nu & \Leftrightarrow & a_\nu = a'_\mu\, \Lambda^\mu{}_\nu \end{array}}$$

- <u>Lorentz-Skalare</u> = Größen, die unter Lorentz-Transf. invariant sind

Skalarprodukt: $a \cdot b := a^\mu b_\mu = a_\mu b^\mu = a_0 b^0 + a_k b^k = a^0 b^0 - \vec{a} \cdot \vec{b}$

$\Rightarrow \quad a' \cdot b' = a \cdot b$, d.h. $a \cdot b$ ist ein Skalar

- Klassifizierung von Vierervektoren:

  - $a^2 > 0 \quad (\Leftrightarrow (a^0)^2 > \vec{a}^2)$: „zeitartig"
  - $a^2 < 0 \quad ($ " $<$ " $)$: „raumartig"
  - $a^2 = 0 \quad ($ " $=$ " $)$: „lichtartig"

- Vierer-Gradienten:

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} = \Lambda_{\mu}{}^{\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \quad \text{wie } x_{\mu} \rightarrow \text{kovariant}$$

$$\frac{\partial}{\partial x'_{\mu}} = \frac{\partial x_{\nu}}{\partial x'_{\mu}} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} \quad \text{"} \quad x^{\mu} \rightarrow \text{kontravariant}$$

z.B. $(\partial_{\mu}) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \end{pmatrix}$, $(\partial^{\mu}) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \\ -\vec{\nabla} \end{pmatrix}$

Skalarprodukt: $\partial_{\mu}\partial^{\mu} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta = \Box$ Lorentz-invariant!

- <u>Tensoren 2. Stufe</u> = 4×4-Matrizen $(A^{\mu\nu})$, die sich transformieren wie $x^{\mu}x^{\nu}$:

$$A'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta} A^{\alpha\beta}$$

(analog $A_{\mu\nu}$, $A^{\mu}{}_{\nu}$, $A_{\mu}{}^{\nu}$)

- Tensoren n-ter Stufe: analog

- vierdim Raum („Raumzeit") mit Metrik $(g^{\mu\nu})$: „Minkowski-Raum"

11. Kovariante Formulierung der Elektrodynamik

11.1 Lorentz-Transformation von Ladungs- und Stromdichten

Ladung dQ in einem ruhenden infinitesimalen Quader mit Volumen $dV = dx\,dy\,dz$

$\Rightarrow$ Ladungsdichte $\quad \rho = \dfrac{dQ}{dV}$

Stromdichte $\quad \vec{j} = \vec{0}$.

In einem System, das sich relativ zur Ladung mit Geschwindigkeit v in x-Richtung bewegt, ist das Volumen Lorentz-kontrahiert:

$$dx' = \frac{1}{\gamma}\,dx\,,\quad dy' = dy\,,\quad dz' = dz \qquad \Rightarrow dV' = \frac{1}{\gamma}\,dV$$

$$\Rightarrow \qquad \rho' = \frac{dQ}{dV'} = \gamma\,\frac{dQ}{dV} = \gamma\,\rho\,,$$

d.h. die Ladungsdichte ist um den Faktor γ größer.
Außerdem bewegt sich die Ladung in diesem System mit Geschwindigkeit v in negative x-Richtung, d.h. es fließt ein Strom

$$j'_x = -\frac{dQ}{dy'dz'dt'}\,,\qquad j'_y = j'_z = 0\,.$$

Dabei ist dt' die Zeit, die die im Volumen dV' enthaltene Ladung ($=dQ$) benötigt, durch die Fläche $dy'dz'$ hindurch zu strömen:

$$dt' = \frac{dx'}{v}$$

$$\Rightarrow \quad j_x' = - \frac{v\, dQ}{dx'dy'dz'} = - v \rho' = - \gamma v \rho$$

2. Der „Viererstrom" $\quad (j^\mu) = \begin{pmatrix} j^0 \\ \vec{j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\rho \\ \vec{j} \end{pmatrix}$

ist ein Vierervektor.

in unserem Beispiel: $\quad j^0 = c\rho, \quad j^1 = 0$

$$\Rightarrow \quad j'^0 = \gamma (j^0 - \beta j^1) = \gamma c \rho \quad \Rightarrow \rho' = \gamma \rho \quad \checkmark$$

$$j'^1 = \gamma (j^1 - \beta j^0) = - \gamma \beta c \rho = - \gamma v \rho \quad \checkmark$$

Kontinuitätsgleichung:

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \underbrace{\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}}_{\partial_0} \underbrace{c \rho}_{j^0} + \partial_k j^k = \partial_\mu j^\mu$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\partial_\mu j^\mu = 0}$$

$\partial_\mu j^\mu$: Skalarprodukt zweier Vierervektoren
= Lorentz-Skalar, d.h. Lorentz-invariant.

Interpretation:
Kontinuitätsgleichung $\hat{=}$ Ladungserhaltung
Durch Wechsel des Bezugsystems können keine Ladungen erzeugt oder vernichtet werden.

11.2 Der elektromagnetische Feldstärketensor

Aus den inhomogenen Maxwell-Gleichungen hatten wir für die Potenziale in Lorenz-Eichung gefunden (hier und im Folgenden alles im Vakuum).

$$\Box \phi = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho = c^2 \mu_0 \rho = c \mu_0 j^0$$

$$\Box \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$$

2, Def.: „$\underline{\text{Viererpotenzial}}$" $(A^\mu) := \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \boxed{\Box A^\mu = \mu_0 j^\mu} \quad \text{(in Lorenz-Eichung)}$$

Da j^μ ein Vierervektor ist und $\Box = \partial_\nu \partial^\nu$ ein Skalar, muss A^μ auch ein Vierervektor sein.

Lorenz-Eichung: $$0 = \underbrace{\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t}}_{\partial_0 A^0} + \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{A}}_{\partial_k A^k} = \partial_\mu A^\mu$$

$\Rightarrow$ Die Eichbedingung ist Lorentz-invariant!
(Coulomb-Eichung: $0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ nicht L.-inv.)

Elektrisches Feld:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \dot{\vec{A}} = -c \vec{\nabla} A^0 - c \frac{\partial}{\partial x^0} \vec{A}$$

$$\Rightarrow E^k = -c \partial_k A^0 - c \partial_0 A^k = c (\partial^k A^0 - \partial^0 A^k)$$