Magnetfeld:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} B^1 &= \partial_2 A^3 - \partial_3 A^2 = -(\partial^2 A^3 - \partial^3 A^2) \\ B^2 &= \partial_3 A^1 - \partial_1 A^3 = -(\partial^3 A^1 - \partial^1 A^3) \\ B^3 &= \partial_1 A^2 - \partial_2 A^1 = -(\partial^1 A^2 - \partial^2 A^1) \end{aligned}$$

2) Def:
$$F^{\mu\nu} := \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

„<u>elektromagnetischer Feldstärketensor</u>"

explizit:

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c}E^1 & -\frac{1}{c}E^2 & -\frac{1}{c}E^3 \\ \frac{1}{c}E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ \frac{1}{c}E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ \frac{1}{c}E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}$$

- $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$ (antisymmetrische 4×4-Matrix)
  $\rightarrow$ 6 unabh. Komponenten $(E^1, E^2, E^3, B^1, B^2, B^3)$
- Lorentz-Tensor 2. Stufe
  $$\Rightarrow \quad F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta F^{\alpha\beta}$$

  $\rightarrow$ Die einzelnen Komponenten der $\vec{E}$- und $\vec{B}$-Felder sind nicht Lorentz-invariant, sondern transformieren sich teilweise in einander um (vgl. Motivation des Induktionsgesetzes in Abschnitt 9.1).

Eichtransformationen:

$$\vec{A} \to \vec{A} + \vec{\nabla}\chi \quad \Rightarrow \quad A^k \to A^k - \partial^k \chi$$

$$\phi \to \phi - \frac{\partial}{\partial t}\chi \quad \Rightarrow \quad A^0 \to A^0 - \partial^0 \chi$$

$$\left.\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right\} A^\mu \to A^\mu - \partial^\mu \chi$$

$$\Rightarrow F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \to \partial^\mu(A^\nu - \partial^\nu \chi) - \partial^\nu(A^\mu - \partial^\mu \chi)$$

$$= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \underbrace{- \partial^\mu\partial^\nu \chi + \partial^\nu\partial^\mu \chi}_{=0}$$

$$= F^{\mu\nu}$$

d.h. $F^{\mu\nu}$ ist eichinvariant.

11.3 Kovariante Formulierung der Maxwell-Gleichungen

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)$$

$$= \Box A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu$$

In Lorenz-Eichung gilt:

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad \text{und} \quad \Box A^\nu = \mu_0 j^\nu$$

$$\Rightarrow \boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu}$$

Dies gilt zunächst einmal in Lorenz-Eichung. Da jedoch $F^{\mu\nu}$ eichinvariant ist, gelten diese Gleichungen in allen Eichungen.

Die vier Gleichungen $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu$, $\nu = 0, 1, 2, 3$, entsprechen den inhomogenen Maxwell-Gleichungen $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$ und $\vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c^2}\dot{\vec{E}} = \mu_0 \vec{j}$ (→ Übung)

Um die homogenen Maxwell-Gleichungen auf ähnliche Weise formulieren zu können, definieren wir den dualen Feldstärketensor

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$$

mit

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1 \,, & \text{falls } (\mu,\nu,\rho,\sigma) \text{ gerade Perm. von } (0,1,2,3) \\ -1 & \text{" \quad " ungerade " \quad " \quad "} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(Achtung: $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = -\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$, und es gibt unterschiedliche Konventionen in der Literatur, ob $\varepsilon^{0123} = 1$ oder $\varepsilon_{0123} = 1$)

Es ergibt sich

$$(\tilde{F}^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -B^1 & -B^2 & -B^3 \\ B^1 & 0 & \frac{1}{c}E^3 & -\frac{1}{c}E^2 \\ B^2 & -\frac{1}{c}E^3 & 0 & \frac{1}{c}E^1 \\ B^3 & \frac{1}{c}E^2 & -\frac{1}{c}E^1 & 0 \end{pmatrix}$$

d.h. $\tilde{F}^{\mu\nu}$ ergibt sich aus $F^{\mu\nu}$ durch die Ersetzungen $\frac{1}{c}\vec{E} \to \vec{B}$ und $\vec{B} \to -\frac{1}{c}\vec{E}$.

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\partial_\mu \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}(\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho)$$

$$= \underbrace{\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}}_{\text{antisymm.}} \underbrace{\partial_\mu \partial_\rho}_{\text{symm.}} A_\sigma \qquad \text{(nach Umbenennung } \rho \leftrightarrow \sigma \text{ im 2. Term)}$$

in μ und ρ

$$= 0$$

$$\boxed{\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0}$$

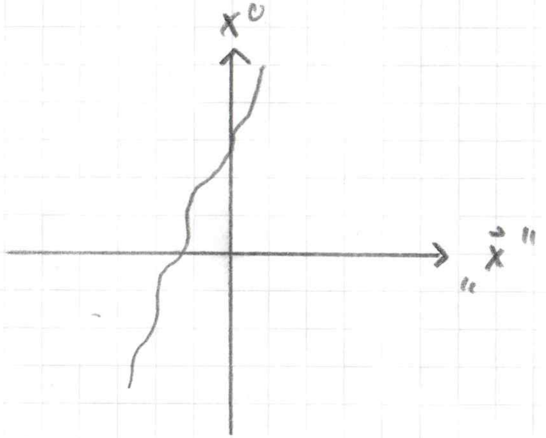
Die Bedeutung dieser Gleichungen ergibt sich dann durch Vergleich mit den inhomogenen Maxwell-Gln. und den Ersetzungen $\frac{1}{c}\vec{E} \to \vec{B}$, $\vec{B} \to -\frac{1}{c}\vec{E}$, $\varrho \to 0$, $\vec{j} \to 0$:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad , \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0 \qquad ✓$$

12. Relativistische Mechanik

12.1 Eigenzeit und Vierergeschwindigkeit

Bahn eines Teilchens im Minkowski-Raum („Weltlinie")



$$(x^\mu(\lambda)) = \begin{pmatrix} x^0(\lambda) \\ \vec{x}(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct(\lambda) \\ \vec{x}(\lambda) \end{pmatrix}, \quad \lambda: \text{Parameter}$$

infinitesimale Verschiebung entlang der Weltlinie

$$(dx^\mu) = \begin{pmatrix} dx^0 \\ d\vec{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\,dt \\ d\vec{x} \end{pmatrix}, \quad dx^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}\, d\lambda$$

⇝ $dx^\mu dx_\mu = c^2 dt^2 - (d\vec{x})^2 \equiv c^2 (d\tau)^2$ Lorentz-invariant

K' mit Teilchen in Ruhe: $(dx'^\mu) = \begin{pmatrix} c\,dt' \\ \vec{0} \end{pmatrix}$ ⇒ $c^2 (d\tau)^2 = c^2 (dt')^2$

⇝ τ = Eigenzeit = Zeit auf einer mitgeführten Uhr.

allgemein: $dt = \gamma\, d\tau$ (Zeitdilatation)

τ = Lorentz-Skalar $\rightsquigarrow$ parametrisiere $x^\mu = x^\mu(\tau)$

$\rightsquigarrow$ „Vierergeschwindigkeit": $(u^\mu(\tau)) := \left(\frac{dx^\mu}{d\tau}\right)$ kontravar. Vierervektor

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \gamma \frac{dx^\mu}{dt} \Rightarrow (u^\mu) = \gamma \begin{pmatrix} \frac{dx^0}{dt} \\ \frac{d\vec{x}}{dt} \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix}$$

$$u^\mu u_\mu = \gamma^2 (c^2 - v^2) = \frac{1}{1-\beta^2} c^2 (1-\beta^2) = c^2$$

12.2 Das relativistische Trägheitsgesetz

Startpunkt: $\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}$ ($\hat{=}$ Newton, muss voraussichtlich modifiziert werden)

$$\frac{d}{dt} = \frac{d\tau}{dt}\frac{d}{d\tau} = \frac{1}{\gamma}\frac{d}{d\tau}, \quad \vec{v} = \frac{1}{\gamma}\vec{u}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\tau}\left(m \frac{1}{\gamma} u^k\right) = \gamma F^k$$

Ladung q im elm Feld: $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

$$\Rightarrow \quad F^k = q\,(E^k + (\vec{v}\times\vec{B})^k) \overset{\text{Skript}}{=} q\,(F^{k0} c - F^{ki} v^i)$$

$$\Rightarrow \quad \gamma F^k = q\,(F^{k0} u^0 - F^{ki} u^i) = q\,(F^{k0} u_0 + F^{ki} u_i) = q\,F^{k\nu} u_\nu$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{d\tau}\left(m \frac{1}{\gamma} u^k\right) = K^k \qquad \text{mit} \qquad K^\mu = q\,F^{\mu\nu} u_\nu$$

rechte Seite: Raumkomponenten eines Vierervektors

linke Seite: nur dann, wenn m kein Skalar, sondern

$m(v) = \gamma\, m(0)$ (veraltete Sichtweise)

äquivalent: $m =$ Skalar, aber lasse $\frac{1}{\gamma}$ weg (moderne Sichtweise)

$\rightarrow$ modifizierte Gleichung (einschließlich 0-Komp.)

$$\boxed{\frac{d}{d\tau}(m u^\mu) = K^\mu} \qquad (*)$$

$$K^k = \gamma F^k, \qquad \frac{d}{d\tau} = \gamma \frac{d}{dt}$$

$\Rightarrow$ modifiziertes 2. Newton'sches Gesetz: $\boxed{\frac{d}{dt}(m \gamma \vec{v}) = \vec{F}}$

12.3 Impuls und Energie

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \vec{p} = \vec{F} \quad \text{mit} \quad \boxed{\vec{p} = \gamma m \vec{v}} \quad \text{relativist. Impuls}$$

Nullkomponente:

$$\frac{d}{d\tau}(m u^0) = K^0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}(\gamma m c) = \frac{1}{\gamma} K^0$$

elektromagnet. Fall:

$$\frac{1}{\gamma} K^0 = \frac{1}{\gamma} q F^{0\nu} u_\nu = -\frac{1}{\gamma} q \frac{1}{c} E^k u_k = \frac{1}{\gamma} q \frac{1}{c} \vec{E} \cdot \vec{u} = q \frac{1}{c} \vec{E} \cdot \vec{v}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(\gamma m c^2) = q \vec{E} \cdot \vec{v} = \frac{dW}{dt}$$ = mechan. Leistung des elm. Feldes an q

= Energieänderung pro Zeit

$$\leadsto \quad \boxed{E \equiv W = \gamma m c^2} = m(v)\, c^2$$

$\underline{v \ll c}$: $\quad \gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \ldots$

$$\Rightarrow \quad E = \underbrace{mc^2}_{\text{Ruheenergie}} + \underbrace{\tfrac{1}{2} m v^2}_{\text{nichtrel. kinet. Energie}} + \ldots$$

„$\underline{\text{Viererimpuls}}$" : $\quad (p^\mu) := (m u^\mu) = \begin{pmatrix} \gamma m c \\ \gamma m \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} E \\ \vec{p} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad p_\mu p^\mu = \frac{1}{c^2} E^2 - \vec{p}^{\,2}$$

$$\shortparallel$$

$$\gamma^2 m^2 (c^2 - v^2) = \gamma^2 m^2 c^2 (1-\beta^2) = m^2 c^2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E^2 = m^2 c^4 + \vec{p}^{\,2} c^2} \quad \text{relativist. Energie-Impuls-Beziehung}$$

$$\Rightarrow \quad E = mc^2 \sqrt{1 + \frac{\vec{p}^{\,2}}{m^2 c^2}} \underset{\vec{p}^{\,2} \ll m^2 c^2}{=} mc^2 \left(1 + \frac{1}{2}\frac{\vec{p}^{\,2}}{m^2 c^2} + \ldots\right) = mc^2 + \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + \ldots$$