Klassische Teilchen und Felder

Priv.-Doz. Dr. M. Buballa
M. J. Steil

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2018/19
10. Übungsblatt 19. und 21. Dezember 2018

Aufgabe P19: Homogen geladene Kugel

Betrachten Sie eine Kugel mit Radius R und Gesamtladung Q mit der homogenen Ladungsverteilung

$$\rho(\vec{r}) = \rho_0 \theta(|\vec{r}| - R) = \frac{3Q}{4\pi R^3} \theta(R - |\vec{r}|). \tag{P19.1}$$

a) Berechnen Sie das elektrostatische Potenzial $\phi(\vec{r})$ innerhalb und außerhalb der Kugel. Hinweis:

$$\int_{x_0}^{x_1} dx \frac{1}{\sqrt{a - bx}} = \int dx \frac{d}{dx} \frac{2}{b} \sqrt{a - bx} = \frac{2}{b} \sqrt{a - bx}\Big|_{x_0}^{x_1}. \tag{P19.2}$$

b) Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ innerhalb und außerhalb der Kugel. Hinweis: der Gradient ist in Kugelkoordinaten durch

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi \tag{P19.3}$$

gegeben.

c) Skizzieren Sie den radialen Verlauf des elektrostatischen Potenzials $\phi(|\vec{r}|)$ und der radiale Komponente des elektrischen Feldes $E_r(|\vec{r}|)$. Bei welchen Radien sind $\phi(|\vec{r}|)$ und $E_r(|\vec{r}|)$ maximal oder minimal.

Aufgabe P20: Dipolfeld

Betrachten Sie zwei Punktladungen: eine mit Ladung $+q$ am Ort $\vec{r}_0$ und eine zweite mit Ladung $-q$ am Ort $-\vec{r}_0$. Das elektrostatische Potenzial ist für diese Anordnung durch

$$\phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} - \frac{1}{|\vec{r} + \vec{r}_0|} \right) \tag{P20.1}$$

gegeben.

a) Der Abstand r sei nun viel größer als der Abstand $a = 2|r_0|$ der beiden Ladungen. In diesem Fall kann der Ausdruck für $\phi(r)$ vereinfacht werden, indem man die Näherung $\frac{1}{\sqrt{1+x}} \approx 1 - \frac{x}{2}$ verwendet.
Berechnen Sie für diesen Fall das genäherte Potenzial und das elektrische Feld.

b) Bestimmen Sie das elektrische Dipolmoment der Ladungsverteilung.

Aufgabe P21: Hohlkugel mit Oberflächenladung

Betrachten Sie eine Hohlkugel mit der Ladungsdichte

$$\rho_\sigma(\vec{r}) = \sigma_0 \cos\theta \, \delta(r - R) \tag{P21.1}$$

in Kugelkoordinaten.

a) Bestimmen Sie die Gesamtladung Q.

b) Bestimmen Sie das Dipolmoment $\vec{p}$.

Aufgabe H20: Geladener Zylinder (0.5+1.0+0.5 = 2 Punkte)

Betrachten Sie einen unendlich langen Zylinder mit Radius R und homogener Ladungsdichte ρ_0.

a) In wie weit schränkt die Symmetrie des Problems das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ ein? Machen Sie einen Ansatz für $\vec{E}(\vec{r})$ in einem geeigneten Koordinatensystem.

b) Bestimmen Sie, mit Hilfe des physikalischen Gauß'schen Satzes, das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ innerhalb und außerhalb der Zylinders.

c) Zeigen Sie, dass das Potenzial $\phi(\vec{r})$ innerhalb des Zylinders in Zylinderkoordinaten durch

$$\phi_<(\vec{r}) = \phi_<(\rho) = -\frac{\rho_0}{4\epsilon_0}\rho^2 + \text{const.} \tag{H20.1}$$

gegeben ist.

Aufgabe H21: Ladungsverteilung eines Wasserstoffatoms (2 Punkte)

Das zeitgemittelte Potenzial eines neutralen Wasserstoffatoms ist durch

$$\begin{aligned}\phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}\mathrm{e}^{-\alpha r}\left(1+\frac{\alpha r}{2}\right)\\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r}\left(\mathrm{e}^{-\alpha r}-1\right)+\frac{\alpha}{2}\mathrm{e}^{-\alpha r}\right) := \phi_1(\vec{r})+\phi_2(\vec{r})\end{aligned} \tag{H21.1}$$

gegeben, wobei $r = |\vec{r}|$ und $\alpha = \text{const.}$
Bestimmen Sie die zugehörige Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ und interpretieren Sie ihr Ergebnis. Welche Bedeutung hat der singuläre Beitrag?

Hinweis: Betrachten Sie den singulären Anteil $\phi_1(\vec{r}) \propto \frac{1}{r}$ separat und nutzen Sie dafür das Ergebnis aus der Vorlesung. Berechnen Sie den verbleibenden $\phi_2(\vec{r})$-Beitrag zu $\rho(\vec{r})$ mit Hilfe des Laplace-Operators in Kugelkoordinaten:

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

Aufgabe H22: Ladungsverteilung aus Multipolmomenten (1.5+0.5 = 2 Punkte)

Für die Anordnung von zwei Punktladungen $q_1 \neq 0$ und $q_2 \neq 0$ mit

$$\vec{r}^{(1)} = (0, y, 0)^{\mathrm{T}} \qquad \vec{r}^{(2)} = (x, 0, 0)^{\mathrm{T}} \tag{H22.1}$$

sind die Gesamtladung $Q > 0$ und die Multipolmomente

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \underline{\underline{Q}} = \begin{pmatrix} 2c & 0 & 0 \\ 0 & -c & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{pmatrix} \tag{H22.2}$$

bekannt.

a) Bestimmen Sie q_1, q_2, x und y als Funktionen von Q, p_x und c.

b) Ist die Ladungsverteilung durch die gegebenen Momente eindeutig bestimmt?