Klassische Teilchen und Felder

Priv.-Doz. Dr. M. Buballa
M. J. Steil

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2018/19
13. Übungsblatt — 30. Januar und 1. Februar 2019

Aufgabe P26: Maxwell'scher Verschiebungsstrom

Eine homogen geladene Vollkugel mit Radius R und Gesamtladung Q bewege sich gleichförmig und ohne zu rotieren im Vakuum. Die Bahn des Kugelmittelpunktes sei $\vec{r}_0(t) = \vec{v}\,t$ mit $|\vec{v}| \ll c$.

a) Geben Sie die Ladungsdichte $\rho(\vec{r},t)$ und die Stromdichte $\vec{j}(\vec{r},t)$ an.

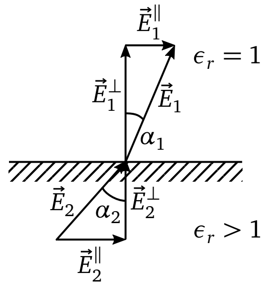
b) Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{D}(\vec{r},t)$ und daraus den Maxwell'schen Verschiebungsstrom $\vec{j}_D(\vec{r},t) = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$.

c) Zeigen Sie mit Hilfe der Maxwell-Gleichungen, dass das Magnetfeld überall durch $\vec{H} = k\vec{v} \times \vec{D}$ gegeben ist. Bestimmen Sie die Proportionalitätskonstante k.
Hinweis: Nutzen Sie die Beziehungen

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{A} \times \vec{B}\right) = \vec{B} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) - \vec{A} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right),$$
$$\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \left(\vec{\nabla} \cdot B\right)\vec{A} - \left(\vec{\nabla} \cdot A\right)\vec{B} = \vec{A}\left(\vec{\nabla} \cdot B\right) - \vec{B}\left(\vec{\nabla} \cdot A\right) + \left(\vec{B} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{A} - \left(\vec{A} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{B}.$$

Aufgabe P27: Elektrisches Feld an einer Grenzfläche

Auf der ungeladenen Grenzfläche zwischen Vakuum und einem Medium mit Dielektrizitätskonstante $\epsilon_r > 1$ steht das elektrische Feld $\vec{E}_1$mit dem Winkel α_1 zur Flächennormalen auf der Vakuumseite (siehe Skizze). Der Betrag des Feldes sei hier E_1. Bestimmen Sie die Beträge E_2 und D_2 und den Winkel α_2 auf der Seite des Mediums.



Aufgabe H28: Magnetfelder (1+1=2 Punkte)

Bestimmen Sie im gesamten Raum die $\vec{B}$- und $\vec{H}$-Felder, die durch die folgenden magnetisierten Körper in Abwesenheit freier Ströme hervorgerufen werden:

a) eine radialsymmetrisch und in radialer Richtung magnetisierte Kugel: $\vec{M}(\vec{r}) = M(r)\vec{e}_r$.

b) ein zylindersymmetrisch in azimutaler Richtung magnetisierter unendlich langer Zylinder: $\vec{M}(\vec{r}) = M(\rho)\vec{e}_\varphi$.

Hinweis: Überlegen Sie sich, dass in den Beispielen entweder die Divergenz oder die Rotation von $\vec{M}$ verschwindet und verwenden Sie die Maxwellgleichungen sowie die Eigenschaft, dass man beliebige Vektorfelder restlos in einen divergenzfreien und rotationsfreien Beitrag zerlegen kann, wenn das Vektorfeld hinreichend stark für $r \to \infty$ abfällt (siehe H27). Rotation und Divergenz in Zylinderkoordinaten:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho A_\rho\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\vec{e}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right)\vec{e}_\varphi + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\varphi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_z$$

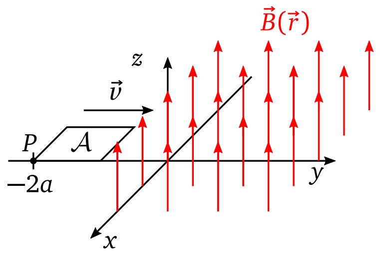
und in Kugelkoordinaten:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\, A_\theta) + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}\right)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\varphi \sin\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\right)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_\varphi.$$

Aufgabe H29: Induktion (2 Punkte)

Eine quadratische Leiterschleife $\mathcal{A}$ mit konstanter Seitenlänge a bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v} = v_0\vec{e}_y$ in der x-y-Ebene. Zum Zeitpunkt $t = 0$ hat die Ecke P die Position $\vec{R}_P(t=0) = -2a\vec{e}_y$. Der rechte Halbraum ($y > 0$) wird von einem konstanten magnetischen Feld $\vec{B} = B_0\vec{e}_z$ durchdrungen während das magnetische Feld im linken Halbraum ($y < 0$) verschwindet.



Berechnen und skizzieren Sie den magnetischen Fluss $\Phi_M(t)$ durch die Leiterschleife und die zugehörige induzierte Spannung $U_{\text{ind}}(t)$ als Funktionen der Zeit t. Markieren Sie signifikante Werte auf den Achsen ihrer Skizze. Geben Sie diese Werte als Funktionen von B_0, v_0 und a an.

Aufgabe H30: Elektromagnetische Wellen im Medium (2 Punkte)

Leiten Sie analog zur Vorlesung ausgehend von den Maxwell-Gleichungen mit $\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}$ und $\vec{B} = \mu_0\mu_r\vec{H}$ die Wellengleichungen im Medium her (ohne Anwesenheit von äußeren Strömen oder Ladungen). Zeigen Sie, dass sich die Ausbreitungsgeschwindigkeit c' einer Welle im Medium als

$$c' = \frac{c}{n}$$

schreiben lässt, wobei c die Ausbreitungsgeschwindigkeit im Vakuum ist. Bestimmen Sie die Proportionalitätskonstante, den sogenannten Brechungsindex, n.