Klassische Teilchen und Felder

Priv.-Doz. Dr. M. Buballa
M. J. Steil

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2018/19

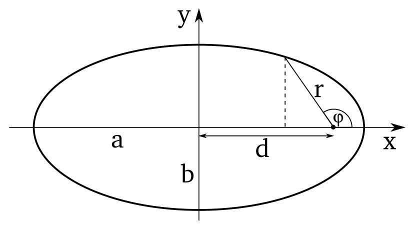
3. Übungsblatt — 31. Oktober und 2. November 2018

Aufgabe P6: Ellipsengleichung

Die Bahnen von Bewegungen im Gravitationspotenzial sind Kegelschnitte. Es gibt drei Typen von Kegelschnitten: Ellipsen (mit dem Spezialfall des Kreises), Parabeln und Hyperbeln.

Wir wollen aus der Kegelschnittgleichung in Polarkoordinaten

$$r(\varphi) = \frac{p}{1+\epsilon\cos\varphi} \tag{P6.1}$$



für Exzentrizitäten $0 < \epsilon < 1$ die bekannte Ellipsengleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{P6.2}$$

herleiten.

a) Drücken Sie r und $\cos\varphi$ in Gl. (P6.1) durch x, y und d aus (siehe Skizze). Eliminieren Sie auftretende Wurzeln durch Quadrieren der Gleichung und ordnen Sie alle Terme in Potenzen von x und y.

b) Zeigen Sie mit Hilfe des Ergebnisses aus Teilaufgabe a), dass Gl. (P6.1) konsistent mit der Ellipsengleichung Gl. (P6.2) ist und bestimmen Sie durch Koeffizientenvergleich d sowie die beiden Halbachsen a und b in Abhängigkeit von ϵ und p.

c) Zeigen Sie, dass der Abstand d des Brennpunktes der Ellipse von ihrem Mittelpunkt $d = \sqrt{a^2 - b^2} = a\epsilon$ erfüllt.

Aufgabe P7: Lenz-Vektor

Für die Bewegung im Potenzial $V(r) = -\kappa/r$ stellt der sogenannte Lenz-Vektor

$$\vec{K} = \frac{\vec{p}\times\vec{L}}{m\kappa} - \vec{e}_r \tag{P7.1}$$

eine weitere Erhaltungsgröße neben Drehimpuls $\vec{L}$ und Energie E dar.

a) Berechnen Sie in einem Polarkoordinatensystem mit den Einheitsvektoren

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ 0\end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\\ 0\end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},$$

die Größen $\frac{d}{dt}\vec{e}_r$, $\vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi$ und $\vec{e}_r \times \vec{e}_z$.

b) Beweisen Sie durch explizite Rechnung in Polarkoordinaten, dass $\dot{\vec{K}} = 0$ gilt. Nutzen Sie dazu das zweite Newton'sche Gesetz und Ergebnisse aus Teilaufgabe a).

c) Berechnen Sie $\vec{r}\cdot\vec{K}$ und lösen Sie das Ergebnis nach $|\vec{r}| = r$ auf. Vergleichen Sie ihr Ergebnis mit Gl. (P6.1) und interpretieren Sie Richtung und Betrag des Lenz-Vektor in diesem Zusammenhang geometrisch.

Hinweis: Das Spatprodukt hat die Eigenschaft $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ und erinneren Sie sich an die geometrische Definition des Skalarprodukts.

Aufgabe H6: Keplerbahnen (3 Punkte)

Betrachten Sie das Keplerproblem mit Potenzial $V(r) = -\kappa/r$ in kartesischen Koordinaten mit den Anfangsbedingungen

$$\vec{r}(t=0) = (x_0, 0, 0)^{\mathrm{T}}, \qquad \dot{\vec{r}}(t=0) = (0, v_0, 0)^{\mathrm{T}}, \tag{H6.1}$$

mit $x_0 > 0$ und $v_0 > 0$. Verwenden Sie die Drehimpulserhaltung und die Erhaltung des Lenz'schen Vektors (siehe Aufgabe P7) um folgende Bahngleichung

$$y(t)^2 = (\epsilon^2 - 1)x(t)^2 - 2x_0\epsilon(1+\epsilon)x(t) + x_0^2(1+\epsilon)^2 \tag{H6.2}$$

mit $\epsilon = m x_0 v_0^2/\kappa - 1$ herzuleiten.

Aufgabe H7: Zentralkräfte (1+1+1=3 Punkte)

Eine Zentralkraft ist definiert durch

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\vec{e}_r, \tag{H7.1}$$

mit $r = |\vec{r}|$.

a) Überprüfen Sie, ob die Zentralkraft $\vec{F}(\vec{r})$ konservativ ist. Verwenden Sie dazu den Gradienten in Kugelkoordinaten

$$\vec{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi. \tag{H7.2}$$

b) Bestimmen Sie den allgemeinen Ausdruck des zugehörigen Potenzials $V(r)$.

c) Ein Teilchen der Masse m hat unter Einfluss der Zentralkraft $f(r)$ die Bahn $\{r(t), \varphi(t)\}$ und den Drehimpuls L. Unter Einfluss der Zentralkraft $f_k(r)$ habe das selbe Teilchen die selbe radial Bewegung $r(t)$ aber eine um einen Faktor k verschnellerte Winkelbewegung: $\varphi_k(t) = k\varphi(t)$. Bestimmen Sie das Zentralkraftfeld $f_k(r)$ als Funktion der angegebenen Größen.