Klassische Teilchen und Felder

Priv.-Doz. Dr. M. Buballa
M. J. Steil

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2018/19

4. Übungsblatt — 7. und 9. November 2018

Aufgabe P8: Effektives Potenzial

Sei ein effektives Potenzial gegeben als

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\kappa}{(n-1)r^{n-1}}, \tag{P8.1}$$

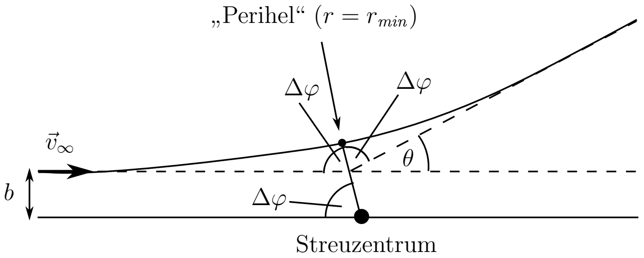
mit $\kappa = GmM$, $n \neq 1$ und Drehimpuls L.

a) Für welche Potenzen n gibt es *stabile* Kreis-Bahnen, d. h. kreisförmige Bahnen, bei denen Anziehungs- und Zentrifugalkraft im Gleichgewicht sind und kleine Auslenkungen aus der Kreisbewegung die Bewegung auf der Kreisbahn nicht zerstören?

b) Für $n = 2$ ist das obige Potenzial das effektive Potenzial des Keplerproblems. Welchen Wert V_{min} nimmt dieses Potenzial im Minimum an?

c) Bestimmen Sie außerdem die Umkehrpunkte r_{min} und r_{max} für den Spezialfall $n = 2$ für eine gegebene Energie E mit $V_{\text{min}} < E < 0$. Drücken Sie das Ergebnis in Abhängigkeit von $p = \frac{L^2}{m\kappa}$ und $\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2L^2E}{m\kappa^2}}$ aus. Interpretieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe P9: Rutherford-Streuung



In dieser Aufgabe wollen wir die Streuung im Coulomb-Potenzial

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r} = -\frac{\kappa}{r}, \quad \kappa := -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \tag{P9.1}$$

betrachten.

a) Verwenden Sie die Kegelschnittgleichung

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \epsilon\cos(\varphi - \varphi_0)} \tag{P9.2}$$

aus der Vorlesung, um $\sin\frac{\theta}{2}$ als Funktion von κ, b und E zu berechnen. Hinweis: Es bietet sich an das Koordinatensystem so zu wählen, dass $\varphi_0 = \Delta\varphi$.

b) Lösen Sie das Ergebnis aus Teilaufgabe a) nach dem Stoßparameter b auf und berechnen Sie den differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin\theta}\left|\frac{db}{d\theta}\right|. \tag{P9.3}$$

Hinweis: Die trigonometrische Identität $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$ könnte hilfreich sein.

Aufgabe H8: Wirkungsquerschnitt für repulsives Potenzial (1+0.5+1.5=3 Punkte)

Betrachten Sie das repulsive Potenzial

$$U(r) = \frac{\alpha}{r^2} \quad \text{mit} \quad \alpha > 0. \tag{H8.1}$$

a) Zeigen Sie, dass für U(r)

$$r_{min} = \sqrt{b^2 + \frac{\alpha}{E}} \tag{H8.2}$$

gilt.

b) Berechnen Sie mit Hilfe von Gl. (H8.2) den Streuwinkel $\theta(b, E)$. Hinweis:

$$\int_c^\infty \frac{dr}{r\sqrt{r^2 - c^2}} = \frac{\pi}{2c}, \qquad \text{für} \qquad c > 0.$$

c) Berechnen Sie den differentiellen Wirkungsquerschnitt mit Hilfe Ihres Ergebnisses aus Teilaufgabe b). Hinweis: Sie können $b(\theta, E) > 0 \ \forall \ \theta \in [0, \pi]$ annehmen.

Aufgabe H9: Trägheitsmomente hohler Körper (1+1+1=3 Punkte)

a) Berechnen Sie das Trägheitsmoment eines homogenen Hohlzylinder mit Masse M, Radius R, innerem Radius R_i und Höhe h für die Rotation um die Symmetrieachse. Geben Sie das Trägheitsmoment als Funktion der Masse M und der Radien R und R_i an.

b) Zeigen Sie, dass das Trägheitsmoment einer Hohlkugel mit Masse M, Radius R und Dicke $\delta < R$ für die Rotation um eine Symmetrieachse durch

$$J = \frac{8\pi}{15}\rho\left(R^5 - (R-\delta)^5\right) \tag{H9.1}$$

gegeben ist.

c) Entwickeln Sie das Trägheitsmoment aus Teilaufgabe b) und die Masse der Hohlkugel für kleine Dicken δ und berücksichtigen Sie nur Terme in führender Ordnung. Geben Sie das Trägheitsmoment aus Gl. (H9.1) als Funktion der Masse M und des Radius R an.