Klassische Teilchen und Felder

Priv.-Doz. Dr. M. Buballa
M. J. Steil

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

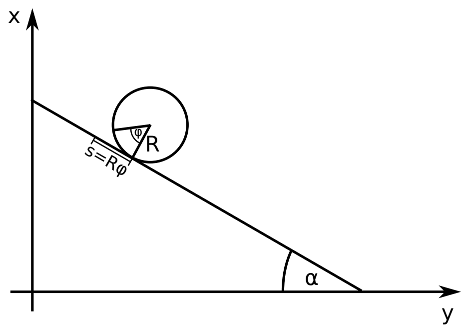
Wintersemester 2018/19
5. Übungsblatt — 14. und 16. November 2018

Aufgabe P10: Wettrennen

Auf einer schiefen Ebene mit Neigungswinkel α rollen eine Vollkugel und eine Hohlkugel $\big($Dicke $d \ll R\big)$ mit gleichen Massen M und Radien R im Schwerefeld der Erde ($\vec{g} = -g\vec{e}_x$). Der Ortsvektor eines beliebigen Punktes i der Körper kann dann als Summe aus Schwerpunktsvektor $\vec{r}_0(t) = \vec{r}_0(0) + \vec{s}(t)$ und Relativvektor $\vec{d}^{(i)}(t)$ geschrieben werden

$$\vec{r}^{(i)}(t) = \vec{r}_0(t) + \vec{d}^{(i)}(t). \tag{P10.1}$$

a) Berechnen Sie die kinetische Energie $T = \frac{1}{2}\sum_i m_i(\dot{\vec{r}}^{(i)}(t))^2$ einer Kugel mit Hilfe von Gl. (P10.1). Zeigen Sie, dass die kinetische Energie aus einem reinen Translationsanteil und einem reinen Rotationsanteil besteht.

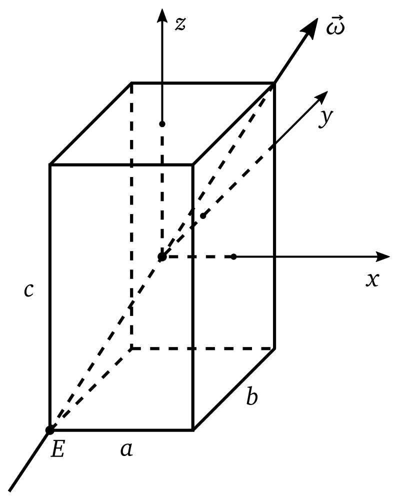


b) Stellen Sie mit Hilfe der Gesamtenergie und der Rollbedingung die Bewegungsgleichung für die zurückgelegte Strecke s eines Körpers mit Trägheitsmoment J auf, der die schiefe Ebene herunterrollt. Geben Sie die Lösung der Bewegungsgleichung für die Anfangsbedingungen $s(t=0) = \dot{s}(t=0) = 0$ an.

c) Welcher der beiden Körper erreicht bei einem gleichzeitigen Start als Erster das untere Ende der Ebene?

Aufgabe P11: Rotierender homogener Quader

Betrachten Sie den nebenstehenden Quader Q_{abc} mit Kantenlängen a, b und c und der konstanten Dichte ρ.



a) Zeigen Sie, dass der Trägheitstensor $\underline{\underline{J}}$ bezüglich des Quaderschwerpunktes im nebenstehenden Koordinatensystem durch

$$\underline{\underline{J}} = \frac{M}{12}\begin{pmatrix} b^2+c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+c^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix}. \tag{P11.1}$$

gegeben ist.

b) Berechnen Sie das Trägheitsmoment für die Rotation um die Raumdiagonale $\vec{\omega}$.

c) Wie müssen a, b und c gewählt werde, damit die Trägheitsmomente für alle vier Raumdiagonalen identisch sind?

Aufgabe H10: Trägheitstensor eines homogenen Ellipsoids (0.5+1.0+1.5=3 Punkte)

Betrachten Sie einen Ellipsoid (3-dimensionales Analogon einer Ellipse)

$$E_{abc} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{H10.1}$$

mit homogener Dichte ρ und den Halbachsen a,b und c.
Hinweis: Verwenden Sie für Ihre Rechnungen ein Koordinatensystem mit den Halbachsen des Ellipsoids als Koordinatenachsen und dem Mittelpunkt des Ellipsoids als Koordinatenursprung. Eine Reskalierung der Achsen (geeignete Substitution der Integrationsvariablen) vereinfacht die Rechnungen ungemein.

a) Zeigen Sie, dass die Masse M des Ellipsoid durch

$$M = \frac{4}{3}\pi abc\rho \tag{H10.2}$$

gegeben ist.

b) Bestimmen Sie die nicht-diagonalen Elemente des Trägheitstensors.

c) Berechnen Sie die Diagonalelement des Trägheitstensors als Funktion von a, b, c und M.

Aufgabe H11: Inhomogene Himmelskörper (0.5+1.0+1.5=3 Punkte)

Betrachten Sie einen sphärisch symmetrischen Himmelskörper mit dem Radius R und der Dichteverteilung

$$\rho(r) = \rho_c \left(1 - \mu \frac{r^2}{R^2}\right), \tag{H11.1}$$

mit $\rho_c = \text{const.}$ und einem dimensionslosem Parameter $\mu \in [0, 1]$.

a) Berechnen Sie die bis zu einem Radius r eingeschlossene Masse $M(r)$ sowie die Gesamtmasse $M \equiv M(R)$ eines solchen Himmelskörpers.

b) Berechnen Sie das Trägheitsmoment um eine Symmetrieachse und drücken Sie das Ergebnis über die Masse, den Radius und den Parameter μ aus.

c) Das Gleichgewicht zwischen Druck $P(r)$ und Gravitationskraft ist beschrieben durch die Differenzialgleichung

$$\frac{dP(r)}{dr} = -G\frac{M(r)\rho(r)}{r^2}. \tag{H11.2}$$

An der Oberfläche verschwindet der Druck: $P(r = R) = 0$. Berechnen Sie den Druck $P(r)$ als Funktion des Radius r für $\mu = 0$ mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse. Integrieren Sie die Differenzialgleichung mittels Trennung der Variablen. Integrieren Sie dabei im Druck von $P(r)$ bis $P(R) = 0$ und im Radius von r nach R.