Klassische Mechanik

Prof. Dr. J. Wambach

M.Sc. P. Scior
M.Sc. J. Weyrich

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2014/15
Übungsblatt 10 — 18. Dezember 2014

Aufgabe P21: Zwangsbedingungen

Betrachten wir folgende Zwangsbedingungen in differentieller Form

$$\mathrm{d}f_1 = \alpha(2x\mathrm{d}x + 2y\mathrm{d}y) + \beta\mathrm{d}z = 0, \quad \mathrm{d}f_2 = z^2\mathrm{d}x + xz^2\mathrm{d}y + 2xyz\mathrm{d}z = 0. \tag{1}$$

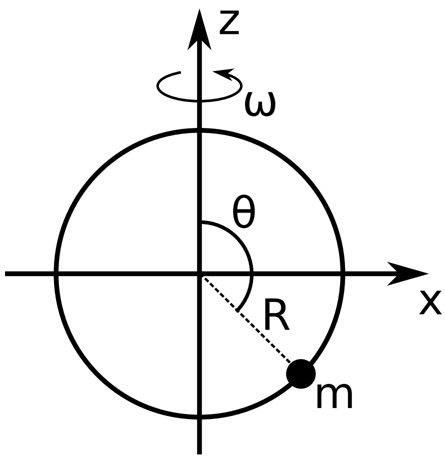
a) Handelt es sich um holonome Zwangsbedingungen? Welcher Zusammenhang muss dafür überprüft werden?

b) Falls möglich, geben Sie die Zwangsbedingungen in geschlossener Form $f_i(x,y,z)$, $i = 1,2$ an.

c) Stellen Sie selbst eine holonome/nicht-holonome Zwangsbedingung in differentieller Form auf.

Aufgabe P22: Rotierender Ring

Eine Perle mit Masse m bewege sich reibungsfrei im homogenen Schwerefeld auf einem Ring mit Radius R. Der Ring rotiere mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um die z-Achse.



a) Stellen Sie die Zwangsbedingungen auf und bestimmen Sie die Lagrange-Funktion.

b) Stellen Sie die Lagrange-Gleichung 2. Art auf und finden Sie die Gleichgewichtslagen θ_i.

c) Analysieren Sie das Stabilitätsverhalten der Gleichgewichtslagen θ_i in Abhängigkeit von ω für kleine Auslenkungen $\theta_i + \epsilon$, $\epsilon \ll 1$. Unterscheiden Sie hierbei die Fälle $\omega < \sqrt{\frac{g}{R}}$ bzw. $\omega \geq \sqrt{\frac{g}{R}}$.

d) Skizzieren Sie die stabilen Gleichgewichtslagen als Funktion von ω.

e) Wie transformieren die Lagrange-Funktion und die Bewegungsgleichung unter der Transformation $\theta \to -\theta$? Sind die Gleichgewichtslagen symmetrisch unter dieser Transformation? Welcher Zusammenhang besteht zur Skizze aus Aufgabenteil d)?

Hinweis:

$$\begin{aligned}
\sin(\theta_i + \epsilon) &= \sin(\theta_i) + \epsilon\cos(\theta_i) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\
\cos(\theta_i + \epsilon) &= \cos(\theta_i) - \epsilon\sin(\theta_i) + \mathcal{O}(\epsilon^2)
\end{aligned}$$

Aufgabe H11: Gedämpfter Harmonischer Oszillator (2+2+2 Punkte)

In manchen Situationen ist es möglich, Reibungseffekte im Lagrange-Formalismus zu behandeln, ohne die Dissipationsfunktion einführen zu müssen. Als Beispiel sei folgendes System gegeben

$$L = f(t)\left[\frac{m\dot{q}^2}{2} - \frac{kq^2}{2}\right]. \tag{2}$$

a) Wie müssen Sie $f(t)$ wählen, damit Sie als Bewegungsgleichung die eines gedämpften harmonischen Oszillators

$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega^2 q = 0 \qquad \gamma > 0\,, \tag{3}$$

erhalten? *HINWEIS: Stellen Sie eine Differentialgleichung für $f(t)$ auf und lösen Sie diese.*

Betrachten Sie nun folgende Koordinatentransformation

$$s = f(t/2)q\,. \tag{4}$$

b) Wie lautet die effektive Lagrange-Funktion in Abhängigkeit von s?

c) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für s auf. Was fällt Ihnen auf?

Aufgabe H12: Teilchen im Elektromagnetischen Feld (1+3 Punkte)

Im Skript wird die Bewegung eines geladenen Teilchens im elektromagnetischen Feld als Beispiel für ein geschwindigkeitsabhängiges Potential behandelt. Die Lagrange-Funktion für diesen Fall lautet

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 - e\Phi(\vec{x},t) + e\vec{A}(\vec{x},t)\cdot\dot{\vec{x}}\,. \tag{5}$$

Machen Sie sich klar, welchen Einfluss eine sogenannte *Eichtransformation* auf das System hat. Eine Eichtransformation ist durch folgende Transformationsgesetze gegeben

$$\vec{A} \to \vec{A} + \vec{\nabla}\psi(\vec{x},t)\,,$$
$$\Phi \to \Phi - \frac{\partial\psi}{\partial t}\,,$$

wobei ψ eine beliebige, differenzierbare Funktion ist.

a) Wie lautet die transformierte Lagrange-Funktion?

b) Welchen Einfluss hat die Eichtransformation auf die Bewegungsgleichung?

Weihnachtsaufgabe: Präzession der Erdachse (2+1+1+2+1+2 Zusatzpunkte)

Bei dieser Aufgabe handelt es sich um eine zusätzliche, freiwillige Aufgabe. Die Aufgabe beinhaltet Aspekte aller bisher behandelter Themen.

Die Erde kann in guter Näherung als ein symmetrischer Kreisel (Trägheitsmomente: $C > A$) beschrieben werden, dessen Figurenachse um den Eulerwinkel θ gegen die Ekliptik geneigt ist. Da die Erde leichte Abweichungen von der perfekten Kugelform zeigt, kann ihre potentielle Energie im Graviationsfeld der Sonne durch

$$V = -\frac{GMm}{r} - \frac{GM(C-A)}{2r^3}P_2(\cos\theta)\,, \tag{6}$$

genähert werden. $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$ ist das zweite Legendre-Polynom. Die Lage der Erde sei durch die Eulerwinkel $\phi(t), \theta(t), \psi(t)$ beschrieben. Berechnen Sie die Präzessionsrate der Erdachse durch die Gravitationskraft, die von der Sonne auf die Erde ausgeübt wird. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

a) Wie groß ist das auf die Erde wirkende Drehmoment? Wodurch wird es effektiv verursacht?

b) Stellen Sie die Lagrange-Funktion für das System auf.

c) Nehmen Sie an, dass es sich um eine gleichförmige Präzession handelt, d.h. vernachlässigen Sie die die Nutationsbewegung. Welche Koordinaten und Zeitableitungen bleiben dann übrig?

d) Stellen Sie eine Lagrange-Gleichung für die Präzession der Erdachse auf.

e) Zeigen Sie (im Lagrange-Formalismus), dass $\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta = \omega_z$ erhalten ist (vgl. H8)

f) Geben Sie die Präzessionsrate der Erdachse für langsame Präzession $\dot{\phi} << \omega_z$ an. Drücken Sie $\dot{\phi}$ dabei nur mit Hilfe von ω_z (Eigendrehung der Erde), ω_0 (Winkelgeschw. Drehung Erde um Sonne), $\cos\theta$ und den Trägheitsmomenten der Erde aus.
HINWEIS: Kepler'sche Gesetze, Betrachten Sie die Bahn der Erde um die Sonne näherungsweise als Kreis.