Klassische Mechanik

Prof. Dr. J. Wambach

M.Sc. P. Scior
M.Sc. J. Weyrich

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2014/15
Übungsblatt 11 — 15. Januar 2015

Aufgabe P23: Zykloide als Tautochrone

Eine Perle mit Masse m bewege sich reibungsfrei in der xz-Ebene auf einem Draht, der die Form einer Zykloide

$$\begin{aligned} x(\varphi) &= R[\varphi - \sin(\varphi)] \\ y(\varphi) &= 0 \\ z(\varphi) &= R[1+\cos(\varphi)] \end{aligned}$$

beschreibt, wobei $\varphi \in [0, 2\pi]$ und $R > 0$ gelten soll.
Auf die Perle wirke nur die Gewichtskraft in negativer z-Richtung.

a) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung der Perle mit Hilfe des Lagrange-Formalismus 2. Art.

b) Lösen Sie die Bewegungsgleichung aus a) indem Sie $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$ bilden und die Bewegungsgleichung als Differentialgleichung in $\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$ betrachten.
Hinweis: $1-\cos(\varphi) = 2\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$, $\quad \sin(\varphi) = 2\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$

c) Als *Tautochrone* bezeichnet man eine Kurve auf welcher ein sich reibungsfrei unter Einfluss der Schwerkraft (mit verschwindender Anfangsgeschwindigkeit) bewegender Massenpunkt eine vom Startpunkt unabhängige Zeit T zum erreichen des tiefsten Punktes der Kurve benötigt. Bestätigen Sie, dass es sich bei der Zykloide um eine *Tautochrone* handelt, indem Sie T bestimmen.

Aufgabe P24: Stokessche Reibung

Eine Kugel mit Radius R und Masse m bewege sich in z-Richtung unter Einfluss einer Federkraft mit Federkonstante k im Schwerefeld der Erde. Außerdem befinde sich die Kugel in einer Flüssigkeit mit Viskosität η, was durch die Stokessche Reibungskraft

$$Q^R = -6\pi\eta R\dot{z} \tag{1}$$

berücksichtigt werden soll (Auftrieb werde vernachlässigt).

a) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung der Kugel unter Benutzung des Lagrange-Formalismus mit Reibung.

b) Lösen Sie die Bewegungsgleichung unter der Annahme

$$\frac{(3\pi\eta R)^2}{m} < k.$$

Aufgabe H13: Spirale (3+3+4 Punkte)

Die Bewegung eines Massenpunkts mit Masse m sei auf die xy-Ebene eingeschränkt. Die Masse sei an einem masselosen Faden befestigt, der mit konstanter Geschwindigkeit u in eine Öffnung in der Ebene gezogen werde. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei der Faden straff und habe die Länge l und die Geschwindigkeit $v_0 \vec{e}_\varphi$.

a) Stellen Sie die Zwangsbedingungen des Systems auf und bestimmen Sie die Lagrange-Funktion L.

b) Stellen Sie die Lagrange-Gleichung 2. Art auf. Gibt es zyklische Koordinaten?

c) Betrachten Sie nun $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}$ und bestimmen Sie daraus die Bahnkurve $r(\varphi)$.