

Klassische Mechanik

Prof. Dr. J. Wambach

M.Sc. P. Scior

M.Sc. J. Weyrich



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Wintersemester 2014/15

Übungsblatt 13

29. Januar 2015

Aufgabe P26: Kettenlinie als Variationsproblem

Wir betrachten eine Kette der Länge L , die unter dem Einfluss der Schwerkraft an zwei Punkten aufgehängt sei. Die Schwerkraft wirke in negativer y -Richtung.

- Bestimmen Sie einen Ausdruck für das Wegelement ds in Abhängigkeit von y und $\frac{dy}{dx}$.
- Bestimmen Sie nun einen Ausdruck für das Potential in der Form

$$\mathcal{V}(y, y') = \int dx v(y, y'). \quad (1)$$

- Welches Funktional $\mathcal{F}(y, y') = \int dx f(y, y')$ müssen Sie variieren um zusätzlich zur Minimierung des Potentials auch die konstante Kettenlänge als Nebenbedingung zu berücksichtigen?
- Welche Erhaltungsgröße folgt daraus, dass $f(y, y')$ nicht explizit von x abhängig ist?
- Bestimmen Sie aus der Erhaltungsgröße aus d) eine Differentialgleichung für $y(x)$. Welche Form hat die Kettenlinie $y(x)$?

Aufgabe P27: Lagrange vs. Hamilton

Wir betrachten die Lagrangefunktion einer eindimensionalen Bewegung im homogenen Schwerfeld,

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - mgx .$$

- Leiten Sie zur Wiederholung die Lagrange-Gleichung 2. Art her und lösen Sie diese.
- Leiten Sie aus der Lagrange-Funktion die Hamilton-Funktion der Bewegung her.
- Zeigen Sie, dass sich durch nochmalige Legendre-Transformation aus der Hamilton-Funktion wieder die Lagrange-Funktion ergibt.
- Geben Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen an und lösen Sie diese.

Aufgabe H15: Zweikörperproblem und Hamilton (1+4+5 Punkte)

Betrachten Sie zwei Massenpunkte m_1 und m_2 die sich gemäß des Newtonschen Gravitationspotentials

$$V(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = -\frac{\gamma m_1 m_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} \quad (2)$$

anziehen.

- a) Wie lautet die Lagrange-Funktion des Systems?
- b) Transformieren Sie die Lagrange-Funktion auf Schwerpunkts- und Relativkoordinaten, wobei Sie als Relativkoordinaten Kugelkoordinaten wählen. Welche Koordinaten sind zyklisch? Welche Erhaltungsgrößen gibt es also?
- c) Bestimmen Sie nun die Hamilton-Funktion und die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen in diesen Koordinaten.