Klassische Mechanik

Prof. Dr. J. Wambach

M.Sc. P. Scior
M.Sc. J. Weyrich

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2014/15
Übungsblatt 14 — 5. Februar 2015

Aufgabe P28: Poisson-Klammern

Für zwei Funktionen $f(q_i, p_i)$ und $g(q_i, p_i)$, die von den Phasenraumkoordinaten q_i und p_i mit $i = 1, \ldots, s$ abhängen, sind die Poisson-Klammern folgendermaßen definiert

$$\{f, g\}_{q,p} = \sum_{i=1}^{s} \left[\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right].$$

Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften der Poisson-Klammern für gegebene Funktionen $f(q_i, p_i)$, $g(q_i, p_i)$ und $h(q_i, p_i)$.

a) Linearität:
$$\{f, g + h\}_{q,p} = \{f, g\}_{q,p} + \{f, h\}_{q,p}$$

b) Produktregel:
$$\{f, gh\}_{q,p} = h\{f, g\}_{q,p} + g\{f, h\}_{q,p}$$

c) Antisymmetrie:
$$\{f, g\}_{q,p} = -\{g, f\}_{q,p}$$

d) Jakobi-Identität:
$$\{f, \{g, h\}_{q,p}\}_{q,p} + \{h, \{f, g\}_{q,p}\}_{q,p} + \{g, \{h, f\}_{q,p}\}_{q,p} = 0$$

Aufgabe P29: Kanonische Transformation

Eine Transformationen der Phasenraumkoordinaten $p \to P(q, p)$, $q \to Q(q, p)$ wird als kanonisch bezeichnet sofern diese die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen invariant lässt. Die Poisson-Klammern sind genau dann unabhängig von der Wahl der Phasenraumkoordinaten, wenn die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen invariant unter der entsprechenden Phasenraumtransformation sind. Daraus ergibt sich ein sehr einfaches Kriterium, um zu überprüfen, ob eine Transformation kanonische ist:
Eine Phasenraumtransformation $p_i \to P_i(q_1, ..., q_s, p_1, ...p_s)$, $q_i \to Q_i(q_1, ..., q_s, p_1, ...p_s)$ ist genau dann kanonisch, wenn

$$\{Q_i, Q_j\}_{q,p} = \{P_i, P_j\}_{q,p} = 0$$
$$\{Q_i, P_j\}_{q,p} = \delta_{ij}$$

gilt, also die *fundamentalen Poisson-Klammern* erhalten sind.

Zeigen Sie nun, dass folgende Transformationen kanonisch sind.

a) Die Transformation $(q, p) \to (Q, P)$ mit:

$$Q = \sqrt{q} \cos(2p) \qquad P = \sqrt{q} \sin(2p)$$

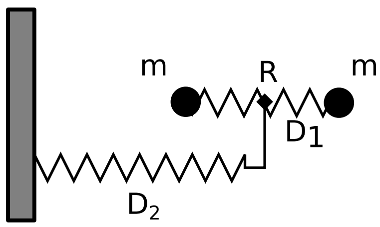
b) Die Transformation $(Q_1, Q_2, P_1, P_2) \to (q_1, q_2, p_1, p_2)$ mit:

$$p_1 = \sqrt{k_1 P_1} \sin Q_1 + \sqrt{k_2 P_2} \sin Q_2$$
$$p_2 = \sqrt{k_1 P_1} \sin Q_1 - \sqrt{k_2 P_2} \sin Q_2$$
$$q_1 = -\sqrt{\frac{P_1}{k_1}} \cos Q_1 - \sqrt{\frac{P_2}{k_2}} \cos Q_2$$
$$q_2 = -\sqrt{\frac{P_1}{k_1}} \cos Q_1 + \sqrt{\frac{P_2}{k_2}} \cos Q_2$$

Wobei $k_i \neq 0$ gelten soll.

Aufgabe P30: Schwingendes System

Zwei Massenpunkte mit Masse m seien durch eine masselose Feder (Federkonstante D_1) miteinander verbunden. Die Feder sei genau im Schwerpunkt der beiden Massen durch eine zweite masselose Feder (Federkonstante D_2) mit einer festen Wand verbunden. Die Bewegung finde nur in einer Dimension statt.



a) Geben Sie die Hamilton-Funktion und die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen des Systems an.
Hinweis: Überlegen Sie sich, wie das Potential in Schwerpunkt- und Relativkoordinaten aussieht. Gehen Sie dann zu einer Beschreibung durch q_1, q_2 über.

b) Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen des Systems. 'Diagonalisieren' Sie dazu die Hamilton-Funktion des Systems.

c) Führen Sie eine kanonische Transformation von den alten Phasenraumkoordinaten (q_1, q_2, p_1, p_2) zu neuen Koordinaten (Q_1, Q_2, P_1, P_2) aus. Der Zusammenhang zwischen den alten und neuen Koordinaten sei durch die kanonische Transformation aus Aufgabe P29 b) gegeben.
Hinweis: Wählen Sie k_1 und k_2 so, dass die Hamilton-Funktion in den neuen Koordinaten möglichst einfach wird.

d) Lösen Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen in den neuen Variablen.