Klassische Mechanik

Prof. Dr. J. Wambach

M.Sc. P. Scior
M.Sc. J. Weyrich

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2014/15
Übungsblatt 2 — 23. Oktober 2014

Aufgabe P3: Konservative Kraftfelder

Betrachten Sie die folgenden Kraftfelder:

$$\vec{F}_1(\vec{x}) = (3x^2z - 3y^2z)\vec{e}_x - (6xyz)\vec{e}_y + (x^3 - xy^2)\vec{e}_z \quad (1)$$

$$\vec{F}_2(\vec{x}) = \frac{e^{-(r-b)}}{(1+e^{-(r-b)})^2}\vec{e}_r \quad (2)$$

a) Bestimmen Sie für beide Felder ob es sich um konservative Kraftfelder handelt und bestimmen Sie gegebenenfalls das Potential.

b) Bestimmen Sie für $F_2(\vec{x})$ die Arbeit, die geleistet werden muss um einen Massenpunkt vom Ursprung nach $(0,0,R)^T$ bzw. zwischen zwei Punkten $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ mit $|\vec{x}_{1/2}| = R$ zu verschieben.

Aufgabe P4: Morse Potential

Ein Teilchen der Masse m bewege sich in einer räumlichen Dimension unter Einfluss des folgenden Potentials:

$$V(x) = V_0\left(e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x}\right), \qquad V_0 > 0, \alpha > 0 \quad (3)$$

a) Berechnen Sie für den Fall einer gebundenen Bahnkurve ($-V_0 < E < 0$) die Umkehrpunkte der Bewegung. E beschreibt hierbei die Gesamtenergie des Systems.

b) Bestimmen sie die Schwingungsdauer T einer solchen Bewegung in Abhängigkeit von E.

Hinweis: Substituieren Sie $u = e^{\alpha x}$ *und:* $\int du \frac{1}{\sqrt{au^2+bu+c}} = -\frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin\left(\frac{2au+b}{\sqrt{b^2-4ac}}\right)$, *für* $a < 0$, $b^2 - 4ac > 0$

c) Was passiert in den Grenzfällen $\frac{E}{-V_0} \to 1$ bzw. $\frac{E}{-V_0} \to 0$?

d) Betrachten Sie nun den Fall kleiner Auslenkungen um die Ruhelage. Wie sieht die Bewegung in dieser Näherung aus?

Aufgabe H2: Rotationsfreies vs. konservatives Kraftfeld (1+1+1+1+2.5+1+2.5 Punkte)

a) Erklären Sie mit Hilfe des Satz von Stokes, warum ein rotationsfreies Kraftfeld konservativ ist.

Betrachten Sie nun folgendes Kraftfeld:

$$\vec{F}(\vec{x}) = \left(0, \frac{-z}{y^2+z^2}, \frac{y}{y^2+z^2}\right)^T \qquad \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{x}|y=z=0\} \tag{4}$$

b) Ist das Feld rotationsfrei im gesamten Definitionsbereich?

c) Zeigen Sie, dass das Potential durch

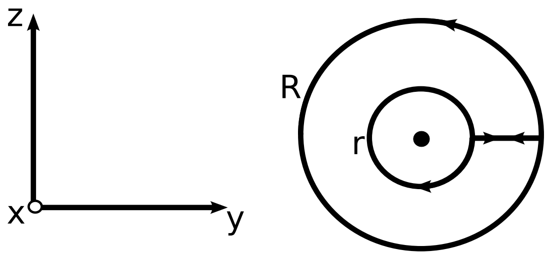
$$V(x) = -\arctan\left(\frac{z}{y}\right) + c \tag{5}$$

gegeben ist.

d) Bestimmen Sie die Arbeit, die geleistet werden muss um einen Massenpunkt auf einer Kreisbahn um die x-Achse wieder zum Ausgangspunkt zu verschieben. Ist das Kraftfeld konservativ? Rechnen Sie in zylindrischen Koordinaten.

e) Wie erklären Sie den Widerspruch zwischen der Existenz eines Potential und Aufgabenteil d)? Vergleichen Sie ihr Ergebnis aus d) mit dem Ausdruck für das Potential in Kugelkoordinaten. Welche 'unphysikalische' Eigenschaft hat das Potential durch den oben genannten Widerspruch?
Hinweis: Vergleichen Sie $V(R,0,z)$ *und* $V(R,2\pi,z)$

f) Bestimmen Sie nun noch einmal die Arbeit, die geleistet werden muss um einen Massenpunkt auf einer geschlossenen Kurve um die x-Achse zu bewegen. Nutzen Sie dieses Mal die Kurve, wie in der Skizze beschrieben. Betrachten Sie auch den Grenzfall $r \to 0$.



g) Ist das Kraftfeld konservativ? Warum? Welche Rückschlüsse lassen sich auf die Anwendbarkeit des Satz von Stokes ziehen?