Klassische Mechanik

Prof. Dr. J. Wambach

M.Sc. P. Scior

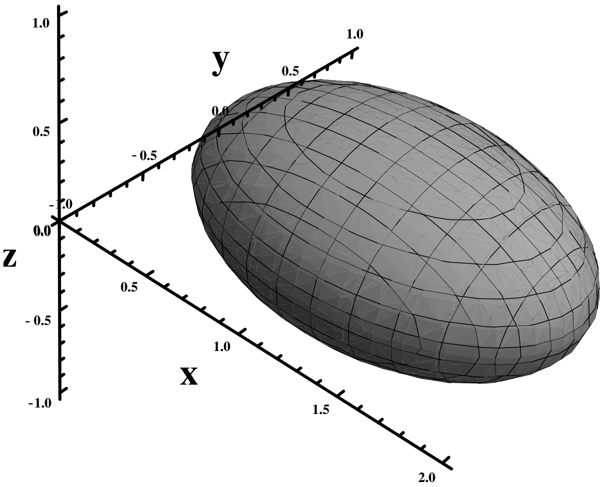
M.Sc. J. Weyrich

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2014/15

Übungsblatt 6 — 20. November 2014

Aufgabe P13: Trägheitstensor eines Ellipsoids



Wir betrachten einen homogenen Ellipsoid mit Masse m, der auf der x-Achse um x_0 verschoben ist. Die Parametrisierung lautet:

$$\begin{aligned} x &= a\sin(\theta)\cos(\varphi) + x_0 \\ y &= b\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z &= c\cos(\theta) \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie aus der Parametrisierung die " *bestimmende Gleichung des Ellipsoids*": $f(x^2, y^2, z^2) \leq C$.

b) Finden sie eine Koordinatentransformation $x \to x', y \to y', z \to z'$, die die Gleichung aus a) in eine kugelähnliche Form bringt und nutzen Sie dies um das Gesamtvolumen des Ellipsoids zu berechnen.

c) Bestimmen Sie zunächst alle Einträge des Trägheitstensors $J_{\alpha\beta}$ bezüglich des *Schwerpunkts*. Berechnen Sie nun den Trägheitstensor bezüglich des *Ursprungs*.

Aufgabe P14: Rotierender Quader

Wir betrachten einen homogenen Quader mit Seitenlängen a, b, c.

a) Berechnen Sie die Hauptträgheitsmomente und -achsen des Quaders bezüglich des Schwerpunkts.

Wir betrachten nun ein rechteckiges dünnes Plättchen mit Kantenlängen a, b und homogener Massenverteilung. Wählen Sie ein Koordinatensystem, dessen Ursprung sich im Schwerpunkt des Plättchens befindet.

b) Drücken Sie die Massendichte $\rho(x, y, z)$ des Plättchens mit Hilfe von δ- und Θ-Funktionen aus.

c) Berechnen Sie den Trägheitstensor bezüglich des Schwerpunkts und bestimmen Sie die Hauptträgheitsmomente. Was fällt ihnen auf?

Aufgabe H7: Raumstation (4+3+3 Punkte)

Eine Raumstation der Masse M habe die Form eines dünnen Ringes mit Radius R und Massendichte

$$\rho(r,\varphi,z) = \frac{M}{2\pi R}\delta(z)\delta(r-R)\,. \tag{1}$$

Wir betachten eine Koordinatensystem, dessen Ursprung im Schwerpunkt der Station liegt.

a) Berechnen Sie den Trägheitstensor des Systems. Welche Gestalt hat er? Was sind demnach die Hauptträgheitsachsen der Raumstation?

b) Bestimmen Sie unter Verwendung von Drehmatrizen den Trägheitstensor der Station bezüglich (i) eines um $\frac{2\pi}{3}$ um die z-Achse gedrehten Koordinatensystem und (ii) eines um $-\frac{\pi}{4}$ um die y-Achse gedrehten Koordinatensystems. HINWEIS:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\eta & -\sin\eta & 0 \\ \sin\eta & \cos\eta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Wie groß ist die Rotationsenergie. falls die Station mit der Winkelgeschwindigkeit ω um eine Schwerpunktachse senkrecht zur Ringebene rotiert? Rechnen Sie einmal im Koordinatensystem, in dem der Trägheitstensor diagonal ist und einmal im Koordinatensystem aus b) (ii).