II. Skalare Teilchen: Das Klein-Gordon-Feld

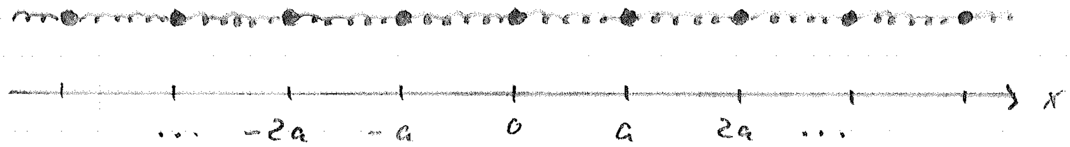
II.1 Kontinuumsmechanik in 1+1 Dimensionen: longitudinal schwingende Saite

Ziel: Verallgemeinerung des Lagrange-Formalismus' von einem System mit diskreten Freiheitsgraden (z.B. n Punktmassen) auf ein System mit kontinuierlichen Freiheitsgraden (z.B Feld als Funktion des Ortes).

Beispiel: longitudinal schwingende „Saite"

Schritt 1:

Saite als Kette diskreter Atome, die mit ihren nächsten Nachbarn über Federn wechselwirken (gleiche Massen m, gleiche Federkonstanten D, $\omega_0^2 = \frac{D}{m}$)



- Ruhelage des n-ten Atoms: $x_n = na$, $-N \leq n \leq N$
- generalisierte Koordinaten:
  $q_n(t)$ = Auslenkung des n-ten Atoms aus seiner Ruhelage
- Vereinfachung: $N \to \infty$ ($\Rightarrow$ keine Randeffekte)

$\Rightarrow$ kinet. Energie des n-ten Atoms: $T_n = \frac{1}{2} m \dot{q}_n^2$

pot. Energie der n-ten Feder: $V_n = \frac{1}{2} m \omega_0^2 (q_{n+1} - q_n)^2$

$\rightsquigarrow$ Lagrange-Fkt.:

$$L = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (T_n - V_n) = \frac{1}{2} m \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \dot{q}_n^2 - \omega_0^2 (q_{n+1} - q_n)^2 \right\}$$

Euler-Lagrange: $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} - \frac{\partial L}{\partial q_n} = 0$

$\rightsquigarrow$ Bewegungsgleichung:

$$\ddot{q}_n = \omega_0^2 (q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1})$$

Lösungsansatz:

$$q_n(t) = A e^{i(kx_n - \omega t)} \quad \text{(ebene Welle)}$$

$$\Rightarrow q_{n\pm1}(t) = q_n(t) e^{\pm ika},$$

$$\ddot{q}_n(t) = -\omega^2 q_n(t)$$

$\rightsquigarrow$ $\omega^2 = 2\omega_0^2 (1 - \cos(ka))$ (Dispersionsrelation)

Insbesondere ergibt sich für kleine Impulse k:

$$\cos(ka) \approx 1 - \frac{1}{2} k^2 a^2$$

$\Rightarrow \omega = \pm \omega_0 k a$ $\rightsquigarrow$ linear in k

$\rightsquigarrow$ Phasengeschwindigkeit: $\left|\frac{\omega}{k}\right| = \omega_0 a =: c$

(Höhere Ordnungen: $\cos(ka) = 1 - \frac{1}{2} k^2 a^2 + \mathcal{O}((ka)^4)$

$\rightsquigarrow$ $\left|\frac{\omega}{k}\right| = \omega_0 a \, (1 + \mathcal{O}((ka)^2)) = c(k)$)

Schritt 2:

Kontinuumslimes: $\qquad a \longrightarrow 0$

mit der Nebenbedingung $\quad \varrho := \frac{m}{a} = \text{const.}, \quad c_0 = \omega_0 a = \text{const}$

generalisierte Koordinaten: $\quad q_n(t) \equiv q(x_n, t) \longrightarrow q(x,t),$

d. h. der diskrete Index n wird durch den kontinuierlichen Parameter x ersetzt.

(Beachte: x_n ist keine zeitabhängige Variable, sondern die konstante Ruhelage des n-ten Atoms. Ebenso ist x keine zeitabhängige Variable, sondern parametrisiert – wie die Zeit t – die dynamischen Variablen $q(x,t)$ und $\dot q(x,t)$)

$$\Rightarrow \quad T = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} m \dot q_n^2 = \sum a \cdot \frac{1}{2} \frac{m}{a} \dot q^2(x_n, t)$$

$$= \sum \Delta x \; \frac{1}{2} \varrho \; \dot q^2(x_n, t)$$

$$\xrightarrow{a \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} dx \; \frac{1}{2} \varrho \; \dot q^2(x,t)$$

$$V = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} m \omega_0^2 \left(q_{n+1}(t) - q_n(t) \right)^2$$

$$= \sum a \, \frac{1}{2} \frac{m}{a} \, (\omega_0 a)^2 \left(\frac{q_{n+1}(t) - q_n(t)}{a} \right)^2$$

$$= \sum \Delta x \; \frac{1}{2} \varrho \; c_0^2 \left(\frac{q(x_n + a, t) - q_n(x,t)}{a} \right)^2$$

$$\longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dx \; \frac{1}{2} \varrho \, c_0^2 \left(\frac{\partial q(x,t)}{\partial x} \right)^2$$

$$\Rightarrow \quad L \to \int_{-\infty}^{\infty} dx \underbrace{\left[\frac{1}{2} \varrho \; \dot q^2(x,t) - \frac{1}{2} \varrho \, c_0^2 \left(\frac{\partial q(x,t)}{\partial x} \right)^2 \right]}_{=: \mathcal{L}\left(q, \frac{\partial q}{\partial t}, \frac{\partial q}{\partial x}\right)}$$

„Lagrange-Dichte"

(in 1+1 Dimensionen)

Bewegungsgleichung:

$$\ddot q_n = \omega_0^2 \left(q_{n+1} - 2 q_n + q_{n-1} \right) = (\omega_0 a)^2 \, \frac{1}{a} \left[\frac{q_{n+1} - q_n}{a} - \frac{q_n - q_{n-1}}{a} \right]$$

$$\hookrightarrow \quad \ddot q(x,t) = c_0^2 \, \frac{\partial^2 q(x,t)}{\partial x^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \Box q(x,t) = 0 \qquad \text{mit} \quad \Box := \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

Lösungen: $q(x,t) = A \, e^{i(kx - \omega t)}$ mit $\omega = \pm c_0 k$

(konstante Phasengeschwindigkeit für alle k,
da die $\mathcal{O}((ka)^2)$-Korrekturen für $a \to 0$ verschwinden)

II.2 Klassische Theorie skalarer relativistischer Felder

II.2.1 Lagrange Formalismus

$\phi(x)$ skalares Feld (in 3+1 Dimensionen, $x = \binom{t}{\vec x}$)

Wirkung: $S = \int dt \, L = \int_\Omega d^4x \, \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$

auf einem Gebiet Ω

Hamilton'sches Prinzip:

S = extremal bzgl. Variationen $\phi \to \phi + \delta\phi$
mit $\delta\phi = 0$ auf dem Rand von Ω:

$$\delta S = \int_\Omega d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \, \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \, \delta(\partial_\mu \phi) \right\} = 0$$

$$\delta(\partial_\mu \phi) = \partial_\mu \, \delta\phi$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \int_\Omega d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\,\delta\phi + \underbrace{\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\,\delta\phi\right)} - \left(\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)\delta\phi \right\}$$

kann in ein Integral
über den Rand $\partial\Omega$
umgewandelt werden
→ trägt nicht bei,
da $\delta\phi = 0$ auf $\partial\Omega$.

$$= \int_\Omega d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right\} \delta\phi$$

$\delta\phi$ beliebig

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = 0} \quad \text{(Euler-Lagrange-Gleichung)}$$

II. 2. 2 Hamilton-Formalismus

(wichtig für die spätere Quantisierung der Felder)

klass. Mechanik für Punkt-Teilchen: $L = L(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\})$

kanon. konj. Impuls: $p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$

Hamilton-Fkt.: $H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$

Feldtheorie: $L = \int d^3x\, \mathcal{L}(\phi(\vec{x},t), \dot{\phi}(\vec{x},t), \vec{\nabla}\phi(\vec{x},t))$

diskretisiertes Integral:

$$L \approx \sum_i \overset{\swarrow\ \text{Volumenelement}}{\Delta V_i}\, \mathcal{L}_i(\phi_i(t), \dot{\phi}_i(t), \vec{\nabla}\phi_i(t))$$

($\phi_i(t) \equiv \phi(\vec{x}_i, t)$,
$\vec{\nabla}\phi_i$ definiert über Differenzenquotienten mit nächsten Nachbarn,
spielt hier keine größere Rolle)

$$\Rightarrow \quad p_j(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot\phi_j(t)} = \Delta V_j \, \frac{\partial \mathcal{L}_j}{\partial \dot\phi_j(t)} \equiv \Delta V_j \, \pi_j(t)$$

mit

$$\pi_j(t) = \frac{p_j(t)}{\Delta V_j} = \frac{\partial \mathcal{L}_j}{\partial \dot\phi_j(t)}$$

$$\hookrightarrow \quad H = \sum_i \Delta V_i \left(\pi_i \dot\phi_i - \mathcal{L}_i \right) \equiv \sum_i \Delta V_i \, \mathcal{H}_i$$

Übergang zum Kontinuum: $\Delta V_i \longrightarrow d^3x$

$$2) \quad \boxed{\begin{aligned} &\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\phi(x)} \qquad \text{zu } \phi(x) \text{ konjugierte Impuls}\underline{\text{dichte}} \\ &H = \int d^3x \; \mathcal{H}(x) \\ &\mathcal{H}(x) = \pi(x)\,\dot\phi(x) - \mathcal{L} \qquad \text{Hamilton-Dichte} \end{aligned}}$$

(Bemerkung:

Streng genommen müssten wir schreiben

$$\pi(x) = \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\phi} \right|_{\phi = \phi(x),\, \partial_\mu\phi = \partial_\mu \phi(x)}$$

(„normale" Ableitung nach $\dot\phi$, keine Funktionalableitung!))

<u>Beispiel:</u>

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^2 \right] = \frac{1}{2}\left[\dot\phi^2 - (\vec\nabla\phi)^2 - m^2\phi^2 \right]$$

Euler-Lagrange-Gleichung: [→ Übung]

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\,\phi = 0 \qquad \text{Klein-Gordon-Gl. !}$$

$$\pi(x) = \dot\phi(x) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H} = \dot\phi^2 - \mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[\dot\phi^2 + (\vec\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2 \right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\pi^2 + (\vec\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2 \right]$$

II. 2. 3 Das Noether - Theorem

Betrachte eine infinitesimale kontinuierliche Transformation des Feldes:

$$\phi(x) \longrightarrow \phi'(x) = \phi(x) + \underset{\substack{\nearrow \\ \text{infinites.} \\ \text{Parameter}}}{\alpha} \underset{\substack{\nwarrow \\ \text{Deformation des Feldes}}}{\Delta \phi(x)}$$

Daraus ergibt sich eine Transformation der Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = \mathcal{L} + \alpha \Delta \mathcal{L}$$

mit

$$\alpha \Delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} (\alpha \Delta \phi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\mu (\alpha \Delta \phi)$$

$$= \alpha \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \Delta \phi \right) + \alpha \underbrace{\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right]}_{\substack{= 0 \\ \text{(Euler - Lagrange - Gl.)}}} \Delta \phi$$

$$= \alpha \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \Delta \phi \right)$$

„Symmetrietransformationen"

= Transformationen, die die Bewegungsgln. invar. lassen.

Das ist der Fall, wenn $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \alpha \partial_\mu J^\mu$ mit einem beliebigen Vektorfeld $J^\mu(x)$

($\Rightarrow$ $S \longrightarrow S' = S +$ Oberflächenintegral über J^μ,
das keinen Beitrag zur Bewegungsgl.
liefert, da $\delta\phi(x) = 0$ auf $\partial\Omega$
vorausgesetzt wurde.)

Für Symmetrietransformationen gilt also

$$\alpha\, \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \Delta\phi \right) \overset{!}{=} \alpha\, \partial_\mu J^\mu$$

2, erhaltener Strom:

$$\boxed{\partial_\mu j^\mu(x) = 0 \qquad \text{mit} \quad j^\mu(x) := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \Delta\phi(x) - J^\mu(x)}$$

Jede kontinuierliche Symmetrie ist mit einem erhaltenen Strom verbunden!

erhaltene Ladung:

$$\begin{aligned} \partial_\mu j^\mu(x) &= \partial_0 j^0(x) + \partial_k j^k(x) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} j^0(t,\vec{x}) + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(t,\vec{x}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{d}{dt} \int_V d^3x\, j^0(t,\vec{x}) &= \int_V d^3x\, \frac{\partial}{\partial t} j^0(t,\vec{x}) \\ &= -\int_V d^3x\, \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(t,\vec{x}) \\ &= -\int_{\partial V} d\vec{S} \cdot \vec{j}(t,\vec{x}) \qquad = 0 \end{aligned}$$

unter der Annahme, dass $\vec{j} = 0$ auf ∂V

2, erhaltene Ladung:

$$\boxed{\frac{d}{dt} Q(t) = 0 \qquad \text{mit} \quad Q(t) := \int_V d^3x\, j^0(t,\vec{x})}$$

Bemerkung:

In den meisten Fällen ist V der gesamte dreidim. Raum. Die Ladung ist dann erhalten, wenn $\vec{j}$ im Unendlichen genügend schnell abfällt

- Falls die Symmetrietransf. mehrere Felder umfasst, muss über diese Felder summiert werden:

$$j^\mu(x) = \sum_n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_n)} \Delta\phi_n(x) - J^\mu(x)$$

Beispiel: komplexes Klein-Gordon-Feld

$$\phi = \phi_1 + i\phi_2 \qquad (\phi_1, \phi_2 \text{ reelle Felder})$$

$$\mathcal{L} = |\partial_\mu \phi|^2 - m^2|\phi|^2 \equiv \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$$

ist invariant unter $\phi \to e^{i\alpha}\phi$ $\quad (\Rightarrow J^\mu = 0)$

$\Rightarrow$ erhaltener Strom:

$$j^\mu = i\left[(\partial^\mu \phi^*)\phi - \phi^*(\partial^\mu \phi)\right] \qquad (\to \text{Übung})$$

(Bemerkung:
Hier muss über die unabhängigen Felder ϕ_1 und ϕ_2 summiert werden. Äquivalent – und technisch einfacher – ist es ϕ und ϕ^* als unabhängige Felder aufzufassen.)

Raum - Zeit - Transformationen

Betrachte $x^\nu \to x^\nu - a^\nu$ $\quad$ (a^ν infinitesimal)

Das entspricht einer Transformation des Feldes

$$\phi(x) \longrightarrow \phi(x+a) = \phi(x) + \partial_\nu \phi(x)\, a^\nu$$

(Dies sind vier Transformationen, ein für jede Komponente!)

Da $\mathcal{L}$ (wie ϕ) ein Skalarfeld ist, transformiert es sich genauso.

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L} + \partial_\nu \mathcal{L}\, a^\nu = \mathcal{L} + a^\nu \partial_\mu \mathcal{L}\, g^\mu{}_\nu$$

$\alpha = a^\nu$

$$\Rightarrow \quad (\Delta\phi)_\nu = \partial_\nu \phi \quad , \quad J^\mu{}_\nu = \mathcal{L}\, g^\mu{}_\nu \quad , \quad \nu = 0, \dots, 3$$

$\Rightarrow$ 4 erhaltene Ströme:

$$\boxed{\partial_\mu T^\mu{}_\nu = 0 \quad \text{mit} \quad T^\mu{}_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi - \mathcal{L}\, g^\mu{}_\nu}$$

$(T^{\mu\nu})$ = „<u>Energie - Impuls - Tensor</u>"

$$T^{00} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \dot{\phi} - \mathcal{L} \equiv \mathcal{H}$$

$\Rightarrow$ erhaltene Ladung: $\int d^3x\, \mathcal{H} = H \equiv E$

Energieerhaltung!

$$T^{0i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \partial^i \phi = -\pi(x)\, \partial_i \phi(x)$$

$$\Rightarrow \quad P^i := \int d^3x\, T^{0i} = -\int d^3x\, \pi(x)\, \partial_i \phi(x)$$

$\hat{=}$ erhaltener Impuls des Feldes

($\neq$ kanon. konjugierter Impuls!)

II. 3 Quantisierung des Klein-Gordon-Feldes

Quantisierung der klass. Mechanik:

Koordinaten und Impulse → Operatoren

mit
$$[q_m, p_n] = i\,\delta_{mn} \quad ,$$
$$[q_m, q_n] = [p_m, p_n] = 0$$

(gilt im Schrödinger-Bild oder im Heisenberg-Bild zu gleichen Zeiten : $[q_m(t), p_n(t)] = i\,\delta_{mn}$ etc.)

Analoges Vorgehen für Felder:

$$\boxed{\begin{aligned} &[\phi(\vec{x}), \pi(\vec{x}\,')] = i\,\delta^3(\vec{x}-\vec{x}\,') \\ &[\phi(\vec{x}), \phi(\vec{x}\,')] = [\pi(\vec{x}), \pi(\vec{x}\,')] = 0 \end{aligned}}$$

(im Schrödinger-Bild ;
Heisenberg-Bild: $[\phi(\vec{x},t), \pi(\vec{x}\,',t)] = i\,\delta^3(\vec{x}-\vec{x}\,')$ etc.)

ϕ, π Operatoren ⇒ $\mathcal{H}$ ebenfalls Operator
⇒ H " "

Berechnung des Eigenwert-Spektrums von H

Fourier-Transformation des klassischen Feldes:

$$\phi(\vec{x},t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, e^{i\,\vec{p}\cdot\vec{x}}\, \phi(\vec{p},t)$$

Klein-Gordon-Gl.: $\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 + m^2\right) \phi(\vec{x},t) = 0$

$\Rightarrow \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + (\vec{p}^2 + m^2)\right] \phi(\vec{p},t) = 0$

Vergleich mit harmon. Oszillator: $\ddot{q}(t) + \omega^2 q(t) = 0$

$\Rightarrow$ Jede Fourier-Mode entspricht einem harmon. Oszillator mit Frequenz $\omega_{\vec{p}} := \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$

1) Betrachte quantenmechan. harmon. Oszillator:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 = \frac{1}{2}\tilde{p}^2 + \frac{1}{2}\omega^2 \tilde{q}^2$$

mit $\tilde{q} := \sqrt{m}\, q$, $\tilde{p} = \frac{p}{\sqrt{m}}$ $\Rightarrow [\tilde{q}, \tilde{p}] = [q, p] = i$

2) Leiteroperatoren: $\tilde{q} = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(a + a^+)$, $\tilde{p} = -i\sqrt{\frac{\omega}{2}}(a - a^+)$

mit $[a, a^+] = 1$

$\Rightarrow [\tilde{q}, \tilde{p}] = i$ ✓

und $H = \omega\left(a^+ a + \frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow [H, a^+] = \omega a^+$, $[H, a] = -\omega a$

Definiere $|0\rangle$ durch $a|0\rangle = 0$

und $|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^+)^n |0\rangle$

$\Rightarrow H|0\rangle = \frac{1}{2}\omega |0\rangle$

$H|n\rangle = (n + \frac{1}{2})\omega |n\rangle$

→ $\{|n\rangle\}$ sind die Eigenzustände von H mit dem Energiespektrum $(n+\frac{1}{2})\omega$. Insbesondere ist $|0\rangle$ der Grundzustand mit der Grundzustandsenergie $\frac{1}{2}\omega$.

Ferner gilt:

$$a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1}\, |n+1\rangle$$
$$a\, |n\rangle = \sqrt{n}\, |n-1\rangle$$

Analoges Vorgehen für Quantenfelder (Schrödinger-Bild):

$$\phi(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} \left(a_{\vec{p}}\, e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a^\dagger_{\vec{p}}\, e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right)$$
$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} \left(a_{\vec{p}} + a^\dagger_{-\vec{p}} \right) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}$$

$$\pi(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (-i)\sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}}}{2}} \left(a_{\vec{p}}\, e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} - a^\dagger_{\vec{p}}\, e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right)$$
$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (-i)\sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}}}{2}} \left(a_{\vec{p}} - a^\dagger_{-\vec{p}} \right) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}$$

mit

$$[a_{\vec{p}}, a^\dagger_{\vec{p}'}] = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p}-\vec{p}')$$

$([a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}'}] = [a^\dagger_{\vec{p}}, a^\dagger_{\vec{p}'}] = 0)$

$$\Rightarrow [\phi(\vec{x}), \pi(\vec{x}')] = i\,\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')$$

(→ Übung)

und

$$H = \int d^3x \left(\frac{1}{2}\pi^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\phi(\vec{x}))^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2(\vec{x}) \right)$$
$$= \ldots$$

(→ Übung)

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, \omega_p \left(a^\dagger_{\vec{p}} a_{\vec{p}} + \frac{1}{2}\underbrace{[a_{\vec{p}}, a^\dagger_{\vec{p}}]}_{(2\pi)^3\delta(0)} \right)$$

⇒ unendl. Vakuumenergie

Da nur Energiedifferenzen messbar sind, kann die unendliche Vakuumenergie – wie in der Löchertheorie – weggelassen werden.

Analog zum harmon. Oszillator gilt:

$$[H, a^\dagger_{\vec p}] = \omega_{\vec p}\, a^\dagger_{\vec p} \quad , \qquad [H, a_{\vec p}] = - \omega_{\vec p}\, a_{\vec p}$$

↳ Grundzustand (= „Vakuum"): $|0\rangle$ mit $a_{\vec p}|0\rangle = 0 \ \forall \vec p$

$\Rightarrow \quad H|0\rangle = 0$ (nach Weglassen der Nullpunktsenergien)

angeregte Zustände:

$a^\dagger_{\vec p_1} a^\dagger_{\vec p_2} \dots |0\rangle$ = Eigenzustand von H mit Energie $\omega_{\vec p_1} + \omega_{\vec p_2} + \dots$

Beachte: $\omega_{\vec p} = +\sqrt{\vec p^2 + m^2}$

$\Rightarrow$ Alle Zustände haben positive Energie!

Gesamtimpulsoperator (vgl S. II-10):

$$\vec P = - \int d^3x \; \pi(\vec x)\, \vec\nabla\, \phi(\vec x)$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, \frac{1}{2}\, \vec p \left(a^\dagger_{\vec p} a_{\vec p} - a^\dagger_{-\vec p} a_{-\vec p} + \underbrace{[a_{\vec p}, a^\dagger_{\vec p}] + a_{\vec p} a_{-\vec p} - a^\dagger_{-\vec p} a^\dagger_{\vec p}}_{\substack{\text{trägt nicht zum Integral bei} \\ \text{(Integrand antisymm. in } \vec p\text{)}}} \right)$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, \vec p \; a^\dagger_{\vec p} a_{\vec p}$$

$$\Rightarrow \quad \vec P\, a^\dagger_{\vec p}|0\rangle = \vec p\, a^\dagger_{\vec p}|0\rangle ,$$

$$\vec P\, a^\dagger_{\vec p_1} a^\dagger_{\vec p_2} \dots |0\rangle = (\vec p_1 + \vec p_2 + \dots)\, a^\dagger_{\vec p_1} a^\dagger_{\vec p_2} \dots |0\rangle$$

→ **Interpretation:**

$a^\dagger_{\vec p}$ erzeugt **Teilchen** mit Impuls $\vec p$

und Energie $\omega_{\vec p} = \sqrt{\vec p^2 + m^2} \equiv E_p$

$\equiv E_{\vec p}$

$$a^\dagger_{\vec p}\, a^\dagger_{\vec q}\, |0\rangle = a^\dagger_{\vec q}\, a^\dagger_{\vec p}\, |0\rangle$$

⇒ Die Klein-Gordon-Teilchen gehorchen der Bose-Einstein-Statistik!
Insbesondere können beliebig viele Teilchen mit gleichem Impuls erzeugt werden.

Normierung:

- Vakuum: $\langle 0 | 0 \rangle = 1$
- Ein-Teilchen-Zustände: $|\vec p\rangle = \sqrt{2E_{\vec p}}\; a^\dagger_{\vec p}\, |0\rangle$

$$\Rightarrow \langle \vec p | \vec q \rangle = 2E_{\vec p}\, (2\pi)^3\, \delta^3(\vec p - \vec q)$$

(Grund für Faktor $\sqrt{2E_{\vec p}}$

$(2\pi)^3 \delta^3(\vec p - \vec q) = \int d^3x\; e^{i(\vec p - \vec q)\cdot \vec x}$ ist nicht Lorentz-invariant

Lorentz-Boosts: ~ Volumen ~ $\frac{1}{\gamma}$ wg Lorentz-Kontraktion

$E_{\vec p} \sim \gamma$

$\Rightarrow E_p\, (2\pi)^3\, \delta^3(\vec p - \vec q)$ Lorentz-invariant

Faktor 2 Konvention in Anlehnung an den Zusammenhang zwischen $\phi(\vec x)$ und $a_{\vec p}$)

Vollständigkeitsrelation für Ein-Teilchen-Zustände:

$$(\mathbb{1})_{1\text{-Teilchen}} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} |\vec{p}\rangle\langle\vec{p}|$$

$$(\Rightarrow \quad \langle\vec{p}|(\mathbb{1})_{1\text{-Teilchen}}|\vec{q}\rangle = \langle\vec{p}|\vec{q}\rangle \quad \checkmark \quad)$$

$$\Big(\text{Beachte:} \quad \underbrace{\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}}}_{\substack{\text{Lorentz-invariantes} \\ \text{Integralmaß}}} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \, 2\pi \, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{„On-shell"-} \\ \text{Bedingung} \\ (p_0^2 = E_{\vec{p}}^2)}}{\delta(p^2 - m^2)} \, \theta(p^0) \quad \Big)$$

<u>Interpretation von $\phi(\vec{x})$:</u>

$$\phi(\vec{x})|0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} |\vec{p}\rangle$$

$$\Rightarrow \quad \langle\vec{p}|\phi(\vec{x})|0\rangle = \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}'}} e^{-i\vec{p}'\cdot\vec{x}} \langle\vec{p}|\vec{p}'\rangle = e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}$$

Vergleich mit nichtrel. QM: $\quad \langle\vec{p}|\vec{x}\rangle \sim e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}$

$\Rightarrow$ $\phi(\vec{x})$ erzeugt ein Teilchen am Ort $\vec{x}$.

II. 4 Klein-Gordon-Feld im Heisenberg-Bild

Heisenberg-Bild: zeitabh. Operatoren $\Rightarrow$ zeitabh. Felder

$$\phi(x) = \phi(t, \vec{x}) = e^{iHt} \phi(\vec{x}) e^{-iHt} \quad , \quad \phi(\vec{x}) \equiv \phi_S(\vec{x})$$

$$\pi(x) = \pi(t, \vec{x}) = e^{iHt} \pi(\vec{x}) e^{-iHt}$$

$$\Rightarrow \quad i\frac{\partial}{\partial t}\phi(x) = [\phi(x), H]$$ (Heisenberg'sche Bewegungsgl.)

$$= \dots = i\pi(x)$$

$$i\frac{\partial}{\partial t}\pi(x) = \dots = i(\vec{\nabla}^2 - m^2)\phi(x)$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi(x) = (-\vec{\nabla}^2 + m^2)\phi(x)$$ Klein-Gordon-Gl. ✓

Zeitabhängigkeit der Erzeugungs und Vernichtungsoperatoren:

$$[H, a_{\vec{p}}] = -E_p a_{\vec{p}} \quad \Rightarrow \quad H a_{\vec{p}} = a_{\vec{p}}(H - E_p)$$

$$\Rightarrow \quad H^n a_{\vec{p}} = a_{\vec{p}}(H - E_p)^n$$

$$\Rightarrow \quad e^{iHt} a_{\vec{p}} = a_{\vec{p}}\, e^{i(H-E_p)t}$$

$$\Rightarrow \quad e^{iHt} a_{\vec{p}}\, e^{-iHt} = a_{\vec{p}}\, e^{-iE_p t}$$

$$e^{iHt} a^\dagger_{\vec{p}}\, e^{-iHt} = a^\dagger_{\vec{p}}\, e^{iE_p t}$$ (analog)

$$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} \phi(t,\vec{x}) &= \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_p}}\left(a_{\vec{p}}\, e^{-ip\cdot x} + a^\dagger_{\vec{p}}\, e^{ip\cdot x}\right)\Big|_{p_0 = E_p} \\ \pi(t,\vec{x}) &= \frac{\partial}{\partial t}\phi(t,\vec{x}) \end{aligned}}$$

Interpretation:

- Teilchen-Bild: $\phi(x)$ = Linearkomb. von Erzeugern und Vernichtern
- Wellen-Bild: $\phi(x)$ = Linearkomb. von ebenen Wellen (Lösungen der Klein-Gordon-Gl.)

→ Teilchen- und Wellenbild in der QFT eng verknüpft.

- $a_{\vec{p}}\, e^{-ip\cdot x} = a_{\vec{p}}\, e^{-i(p_0 t - \vec{p}\cdot\vec{x})}$, $p_0 \equiv E_p \equiv +\sqrt{\vec{p}^2+m^2}$

  „Moden positiver Frequenz"

  vernichten Teilchen mit Impuls $\vec{p}$ und Energie $E_p > 0$

  $a^\dagger_{\vec{p}}\, e^{ip\cdot x} = a^\dagger_{\vec{p}}\, e^{i(p_0 t - \vec{p}\cdot\vec{x})}$

  „Moden negativer Frequenz"

  erzeugen Teilchen mit Impuls $\vec{p}$ und Energie $E_p > 0$

Zeitentwicklung: $\phi(x) = \phi(t,\vec{x}) = e^{iHt}\,\phi(0,\vec{x})\,e^{-iHt}$

analog: $\phi(\vec{x}) = e^{-i\vec{P}\cdot\vec{x}}\,\phi(\vec{0})\,e^{+i\vec{P}\cdot\vec{x}}$ (→ Übung)

($\vec{P}$ = Impulsoperator)

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned}&\phi(x) = e^{i(Ht-\vec{P}\cdot\vec{x})}\,\phi(0)\,e^{-i(Ht-\vec{P}\cdot\vec{x})} = e^{iP\cdot x}\,\phi(0)\,e^{-iP\cdot x}\\ &\text{mit}\quad (P^\mu) = \begin{pmatrix} H \\ \vec{P}\end{pmatrix}\end{aligned}}$$

II.5 Kausalität

Amplitude für ein Teilchen von $y = \begin{pmatrix} y^0 \\ \vec{y}\end{pmatrix}$ nach $x = \begin{pmatrix} x^0 \\ \vec{x}\end{pmatrix}$ zu propagieren:

$$D(x-y) = \langle 0|\,\phi(x)\,\phi(y)\,|0\rangle$$

$$= \underbrace{\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{2E_p}}_{\text{Lorentz-inv. Integralmaß}}\; e^{-ip\cdot(x-y)} \qquad (\to \text{Übung})$$

← Lorentz-Skalar

$\Rightarrow D(x-y)$ = Skalarfeld

1. Fall : $x-y$ zeitartig $\left((x-y)^2 > 0 \right)$

o. B. d. A. $x^0 - y^0 = t \;,\; \vec{x} - \vec{y} = 0$

$$\Rightarrow D(x-y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-iE_p t} \xrightarrow[t \text{ sehr groß}]{} \sim e^{-imt}$$

2. Fall : $x-y$ raumartig $\left((x-y)^2 < 0 \right)$

o. B. d. A $x^0 - y^0 = 0 \;,\; \vec{x} - \vec{y} = \vec{r}$

$$\Rightarrow D(x-y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}} \xrightarrow[r = |\vec{r}| \text{ sehr groß}]{} \sim e^{-mr} \;,\; r = |\vec{r}|$$

Kausalität verletzt ?

Kausalität :
Eine Messung am Raumzeitpunkt x darf eine Messung am Raumzeitpunkt y nicht beeinflussen, wenn die Separation $x-y$ raumartig ist.

klassische Feldtheorie : Felder (z. B. $\vec{E}$-Feld) können an allen Raumzeitpunkten simultan beliebig genau gemessen werden.

QM : Observable können simultan scharf gemessen werden, wenn die zugehörigen Operatoren vertauschen.

→ Forderung in der QFT :

$$[\phi(x), \phi(y)] \overset{!}{=} 0 \qquad \text{für raumartige } (x-y)$$

„Mikrokausalität"

Überprüfung der Mikrokausalität:

$$[\phi(x), \phi(y)]$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{p'}}} \left[a_{\vec{p}} e^{-ip\cdot x} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{ip\cdot x}, a_{\vec{p}'} e^{-ip'\cdot y} + a_{\vec{p}'}^\dagger e^{ip'\cdot y} \right]$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{p'}}} \left(e^{-ip\cdot x + ip'\cdot y} - e^{ip\cdot x - ip'\cdot y} \right) (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}')$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \left(e^{-ip\cdot(x-y)} - e^{ip\cdot(x-y)} \right)$$

$$= D(x-y) - D(y-x)$$

- $(x-y)$ raumartig:

  $\Rightarrow$ $(y-x)$ kann durch eine Lorentz-Transf. in $(x-y)$ überführt werden.

  Da $D(y-x)$ Lorentz-invariant ist, folgt $D(y-x) = D(x-y)$.

  $$\Rightarrow [\phi(x), \phi(y)] = 0$$

  Kausalität nicht verletzt!

- Dies schließt auch Kausalität bezüglich anderer Operatoren mit ein, die Funktionen von $\phi(x)$ sind (wie $\pi(x) = \frac{\partial \phi(x)}{\partial t}$).

- $(x-y)$ zeitartig:

  $(y-x)$ kann nicht durch eine Lorentz-Transf. in $(x-y)$ überführt werden.

  $\Rightarrow$ $[\phi(x), \phi(y)] \neq 0$ möglich

- komplexes Klein-Gordon Feld (→ Übung)

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(a_{\vec p}\, e^{-ip\cdot x} + b^\dagger_{\vec p}\, e^{ip\cdot x} \right)$$

$$\neq \phi^\dagger(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(b_{\vec p}\, e^{-ip\cdot x} + a^\dagger_{\vec p}\, e^{ip\cdot x} \right)$$

$$[a_{\vec p}, a^\dagger_{\vec p'}] = [b_{\vec p}, b^\dagger_{\vec p'}] = (2\pi)^3 \delta^3(\vec p - \vec p')$$

$$[a_{\vec p}, b^\dagger_{\vec p}] = (\text{alle anderen}) = 0$$

erhaltene Ladung: $Q \sim \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(a^\dagger_{\vec p} a_{\vec p} - b^\dagger_{\vec p} b_{\vec p} \right)$

⇒ $a^\dagger_{\vec p}$ und $b^\dagger_p$ erzeugen Teilchen entgegengesetzter Ladung und gleicher Masse: Teilchen und Antiteilchen!

$$[\phi(x), \phi^\dagger(y)] = D_a(x-y) - D_b(y-x)$$

Mikrokausalität:
Die Beiträge der von y nach x propagierenden Teilchen heben sich für raumartige (x-y) mit den Beiträgen der von x nach y propagierenden Antiteilchen weg!

II.6 Der Klein-Gordon-Propagator

Green'sche Funktion des Klein-Gordon-Operators:

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\, G(x-y) = -i\,\delta^4(x-y)$$

Fourier-Transformation:

$$G(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip\cdot(x-y)}\, \tilde G(p)$$

$$\Rightarrow (\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\, G(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, e^{-ip\cdot(x-y)} (-p^2+m^2)\, \tilde{G}(p)$$

$$\overset{!}{=} -i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, e^{-ip\cdot(x-y)}$$

$$\Rightarrow \tilde{G}(p) = \frac{i}{p^2-m^2}$$

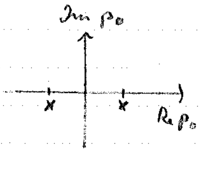
$$\Rightarrow G(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, e^{-ip\cdot(x-y)} \frac{i}{p^2-m^2}$$

$$\frac{1}{p^2-m^2} = \frac{1}{p_0^2-\vec{p}^{\,2}-m^2} = \frac{1}{p_0^2-E_p^2} = \frac{1}{2E_p}\left(\frac{1}{p_0-E_p} - \frac{1}{p_0+E_p}\right)$$

$$\Rightarrow G(x-y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \frac{1}{2E_p} \underbrace{i \int \frac{dp_0}{2\pi}\, e^{-ip^0(x^0-y^0)} \left(\frac{1}{p_0-E_p} - \frac{1}{p_0+E_p}\right)}_{=: F(x^0-y^0)}$$

Infinitesimale Verschiebung der Pole bei $p_0 = \pm E_p$ in die komplexe Ebene:

<u>1. Variante:</u> $p_0 \to p_0 + i\varepsilon$ Pole bei $p_0 = \pm E_p - i\varepsilon$



$\nearrow$

$$\Rightarrow F(x^0-y^0) \to i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_0}{2\pi}\, e^{-ip^0(x^0-y^0)} \left(\frac{1}{p_0-E_p+i\varepsilon} - \frac{1}{p_0+E_p+i\varepsilon}\right)$$

Schließe Integrationskontur so, dass der Kreisbogen keinen Beitrag liefert

<u>$x^0-y^0 > 0$</u>: $\rightsquigarrow i \int_{\circlearrowright} \frac{dp_0}{2\pi} \ldots \rightsquigarrow$ Pole bei $p_0 = \pm E_p - i\varepsilon$

$$\Rightarrow F(x^0-y^0) = -2\pi i \frac{i}{2\pi}\left(e^{-iE_p(x^0-y^0)} - e^{iE_p(x^0-y^0)}\right)$$

$$= e^{-iE_p(x^0-y^0)} - e^{iE_p(x^0-y^0)}$$

$x^0 - y^0 < 0$: ⇝ $i \int_{\circlearrowleft} \frac{dp_0}{2\pi} \ldots$ ⇝ keine Pole innerhalb des Integrationsweges

$$\Rightarrow \quad F(x^0 - y^0) = 0$$

$$\Rightarrow \quad G(x-y) \longrightarrow \theta(x^0-y^0) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}\, \frac{1}{2E_p} \left(e^{-iE_p(x^0-y^0)} - e^{iE_p(x^0-y^0)} \right)$$

$$= \theta(x^0-y^0) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, \frac{1}{2E_p} \left(e^{-ip\cdot(x-y)} - e^{ip\cdot(x-y)} \right)\Big|_{p^0=E_p}$$

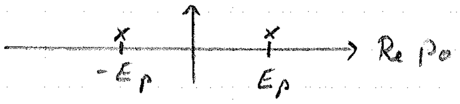
Subst. $\vec{p} \to -\vec{p}$ im zweiten Term

$$=: D_R(x-y)$$ „retardierter Propagator"

Vergleich mit S. II-20:

$$\boxed{D_R(x-y) = \theta(x^0-y^0)\,[\phi(x), \phi(y)]}$$

2. Variante: $p_0 \to p_0 - i\varepsilon$ ⇝ Pole bei $p_0 = \pm E_p + i\varepsilon$

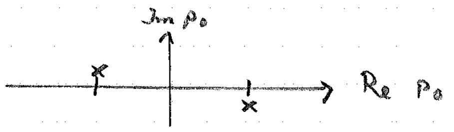


⇝ avancierter Propagator

$$\boxed{D_A(x-y) = \theta(y^0-x^0)\,[\phi(y), \phi(x)]}$$

3. Variante: $E_p \to E_p - i\varepsilon$ ⇝ Pole bei $p_0 = \pm(E_p - i\varepsilon)$

⇝ „Feynman-Propagator"



$$D_F(x-y) = i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, e^{-ip\cdot(x-y)}\, \frac{1}{2E_p} \left(\frac{1}{p_0 - E_p + i\varepsilon} - \frac{1}{p_0 + E_p - i\varepsilon} \right)$$

2)
$$\boxed{\begin{aligned} D_F(x-y) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, e^{-ip\cdot(x-y)} \frac{i}{p^2-m^2+i\varepsilon} \\ &= \theta(x^0-y^0)\langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle \\ &\quad + \theta(y^0-x^0)\langle 0|\phi(y)\phi(x)|0\rangle \\ &=: \langle 0|T\,\phi(x)\,\phi(y)|0\rangle \end{aligned}}$$

T = Zeitordnungsoperator:
ordnet die nachfolgenden Operatoren nach ihrem Zeitargument (frühester nach rechts, spätester nach links).

- D_R, D_A und D_F sind ebenfalls Green'sche Funktionen zum Klein-Gordon-Operator.