

## III. Das Dirac - Feld

### III. 1 Die Dirac - Gleichung (historischer Zugang)

→ Folien

### III. 2 Moderner Zugang zur Dirac - Gleichung: Lorentz - Transformationen und Spin

#### III. 2. 1 Lorentz - invariante Feldgleichungen

Wie zuvor die Klein - Gordon - Gleichung, wollen wir jetzt auch die Dirac - Gleichung nicht mehr als relativistische quantenmechanische Einteilchengleichung interpretieren, sondern als Gleichung für ein klassisches Feld, das wir später quantisieren werden. Zuerst wollen wir uns jedoch von einer allgemeineren Perspektive aus mit der Frage beschäftigen, welche Formen relativistische Feldgleichungen annehmen können.

#### Forderung:

Relativistische Feldgleichungen müssen forminvariant unter Lorentz - Transformationen sein, d.h. die Gleichungen für die transformierten Felder müssen genauso aussehen, wie die Gleichungen für die ursprünglichen Felder.

Beispiel:

Klein-Gordon-Gl.:  $(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi(x) = 0$

Betrachte eine aktive Lorentz-Transformation des Feldes, so dass der ursprüngliche Wert  $\phi(x)$  jetzt an der Stelle  $x' = \Lambda x$  gemessen wird:

$$\phi'(x') = \phi(x) \quad \text{mit} \quad x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$$

$$\Leftrightarrow \phi'(x) = \phi(\Lambda^{-1}x)$$

Forminvarianz der Klein-Gordon-Gl.:

$\phi'(x)$  erfüllt ebenfalls die KGG

$$\hookrightarrow \text{z.z.:} \quad (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi'(x) = 0, \quad \text{falls } \phi(x) \text{ die KGG löst.}$$

Beweis:

$$\partial_\mu \phi'(x) = \partial_\mu \phi(\Lambda^{-1}x)$$

$$\stackrel{y = \Lambda^{-1}x}{=} \frac{\partial \phi}{\partial y^\sigma} \Big|_{y = \Lambda^{-1}x} \underbrace{\frac{\partial y^\sigma}{\partial x^\mu}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} ((\Lambda^{-1})^\sigma_\lambda x^\lambda) = (\Lambda^{-1})^\sigma_\mu$$

$$= (\partial_\sigma \phi) |_{\Lambda^{-1}x} (\Lambda^{-1})^\sigma_\mu$$

$$\Rightarrow \partial_\mu \partial^\mu \phi'(x) = g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi'(x)$$

$$= \underbrace{g^{\mu\nu} (\Lambda^{-1})^\sigma_\mu (\Lambda^{-1})^\rho_\nu}_{\text{inverse Lorentz-Transf. von } g^{\mu\nu}} (\partial_\sigma \partial_\rho \phi) |_{\Lambda^{-1}x}$$

inverse Lorentz-Transf. von  $g^{\mu\nu}$

$$= g^{\sigma\rho}, \quad \text{da } (g^{\mu\nu}) \text{ forminvariant ist (vgl. Aufg. 2 d)}$$

$$\Rightarrow \partial_\mu \partial^\mu \phi'(x) = (\partial_\sigma \partial^\sigma \phi) |_{\Lambda^{-1}x}$$

$$\Rightarrow (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi'(x) = (\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi) |_{\Lambda^{-1}x} = 0$$

da  $\phi$  die KGG an jeder Stelle erfüllt ✓

Analog zeigt man für die Lagrange-Dichte:

$$\mathcal{L}(x) \rightarrow \mathcal{L}'(x) = \mathcal{L}(\Lambda^{-1}x) \quad (\rightarrow \text{Aufg. 3b)}$$

d.h.  $\mathcal{L}$  ist ein Skalarfeld

$$\Rightarrow S = \int d^4x \mathcal{L}(x) \quad \text{ist Lorentz-invariant.}$$

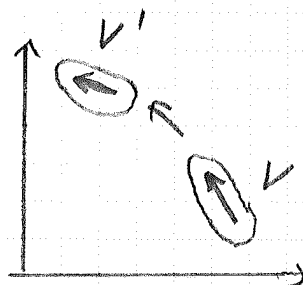
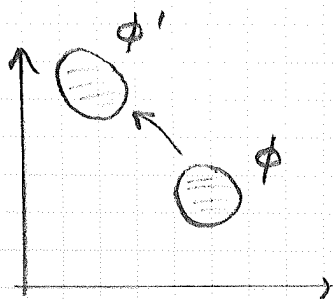
Bislang haben wir nur Skalarfelder betrachtet. Daneben kann es aber z. B. auch Vektorfelder oder Tensorfelder geben, deren Transformationsverhalten komplizierter ist:

Skalarfelder:  $\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(\Lambda^{-1}x)$

Vektorfelder:  $V^\mu(x) \rightarrow V'^\mu(x) = \Lambda^\mu_\nu V^\nu(\Lambda^{-1}x)$

Tensorfelder:  $F^{\mu\nu}(x) \rightarrow F'^{\mu\nu}(x) = \Lambda^\mu_\sigma \Lambda^\nu_\tau F^{\sigma\tau}(\Lambda^{-1}x)$

anschaulich für Rotationen:



Wie verhalten sich Felder, die Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen beschreiben?

Allgemeines Ansatz für  $n$ -komponentige Felder  $\Phi$ :

$$\Phi(x) \rightarrow \Phi'(x) = M(\Lambda) \Phi(\Lambda^{-1}x)$$

$M(\Lambda)$ :  $n \times n$ -Matrix

$$\Rightarrow \Phi_a(x) \rightarrow \Phi'_a(x) = M_{ab}(\Lambda) \Phi_b(\Lambda^{-1}x)$$

zwei hintereinander ausgeführte Lorentz-Transf.:

$$x' = \Lambda x, \quad x'' = \Lambda' x' = \Lambda' \Lambda x \equiv \Lambda'' x$$

$$\Phi' = M(\Lambda) \Phi, \quad \Phi'' = M(\Lambda') \Phi' = M(\Lambda') M(\Lambda) \Phi = M(\Lambda'') \Phi$$

$$\Rightarrow M(\Lambda'') = M(\Lambda') M(\Lambda), \quad \text{falls } \Lambda'' = \Lambda' \Lambda$$

$\hookrightarrow$   $M$  ist eine  $n$ -dimensionale Darstellung der Lorentz-Gruppe.

offensichtliche Lösungen:

$$n=1: \quad M=1 \quad (\text{„triviale Darstellung“})$$

$$\Rightarrow \Phi' = \Phi \quad \hat{=} \text{Skalarfeld}$$

$$n=4: \quad M=\Lambda \quad \Rightarrow \Phi' = \Lambda \Phi \quad \hat{=} \text{Vektorfeld}$$

(Im allen Fällen muss natürlich weiterhin das Argument  $x$  durch  $\Lambda^{-1}x$  ersetzt werden, s.o.)

Wie sieht die Darstellung aus, die Spin- $\frac{1}{2}$  beschreibt?

### III.2.2 Darstellungen der Rotationsgruppe

Wir betrachten zunächst den einfacheren Fall von Rotationen im 3-dim. Raum

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{x}' = R \vec{x}$$

$$\begin{aligned} \vec{x}'^2 = \vec{x}^2 &\Rightarrow R^T = R^{-1} \\ \text{keine Spiegelung} &\Rightarrow \det R = 1 \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} \vec{x}'^2 = \vec{x}^2 \\ \text{keine Spiegelung} \end{aligned}} \right\} R \in SO(3)$$

Beispiel: Drehung um die z-Achse

$$R = R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

infinitesimale Drehung:

$$R_z(\delta\theta) = \begin{pmatrix} 1 & -\delta\theta & 0 \\ \delta\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \mathbb{1} - i \delta\theta J_z$$

mit dem „generator“ der Drehung

$$J_z = i \left. \frac{dR_z}{d\theta} \right|_{\theta=0} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

↳ endl. Drehwinkel:  $R_z(\theta) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \mathbb{1} - i \frac{\theta}{N} J_z \right)^N = \exp(-i \theta J_z)$

$J_x, J_y$  analog

Vertauschungsrelationen („Lie-Algebra“):

$$(*) [J^i, J^j] = i \varepsilon^{ijk} J^k \quad (\text{mit } J^1 \equiv J_x \text{ etc.})$$

$\hat{=}$  Drehimpulse in der QM

Wellenfunktion:

$$\begin{aligned} \psi(R_2^{-1}(\delta\theta) \vec{x}) &= \psi(x + \delta\theta y, y - \delta\theta x, z) \\ &= \psi(\vec{x}) + \delta\theta \left( y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right) \psi(\vec{x}) \\ &= (1 - i\delta\theta J_z) \psi(\vec{x}) \end{aligned}$$

$$\text{mit } J_z \equiv L_z = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}$$

( $J_x, J_y$  analog.)

allgemeine Drehung:

$$R(\vec{\theta}) = R(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = \exp(-i \theta^k J^k)$$

→ Die Generatoren und insbesondere ihre Lie-Algebra definieren die Gruppenstruktur der Drehgruppe.

⇒  $n$ -dim Darstellung  $\leftrightarrow J^k = n \times n$ -Matrizen mit  $(*)$

QM:  $n = 2j + 1$  mit  $j$  ganz- oder halb-zahlig  
(folgt aus den Vertauschungsrelationen)

Spin  $\frac{1}{2}$ :  $j = \frac{1}{2} \Rightarrow n = 2$

Generatoren:  $J^k = \frac{\sigma^k}{2}$ ,  $\sigma^k$ : Pauli-Matrizen

$$[\sigma^i, \sigma^j] = 2i \varepsilon^{ijk} \sigma^k \Rightarrow [J^i, J^j] = i \varepsilon^{ijk} J^k \quad \checkmark$$

Gruppenelemente:

$$U(\vec{\theta}) = \exp\left(-i \theta^k \frac{\sigma^k}{2}\right)$$

$\sigma^1, \sigma^2$  reell  $\Rightarrow U$  komplex

$$\left. \begin{array}{l} U^\dagger U = \mathbb{1} \\ \det U = 1 \end{array} \right\} U \in SU(2)$$

( $SU(2)$  und  $SO(3)$  haben dieselbe Lie-Algebra)

Felder = Pauli-Spinoren  $\vec{\xi}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \xi_1(\vec{x}) \\ \xi_2(\vec{x}) \end{pmatrix}$

Transformationsverhalten unter Rotationen:

$$\vec{\xi}(\vec{x}) \rightarrow \vec{\xi}'(\vec{x}') = U \vec{\xi}(R^{-1}\vec{x})$$

### III. 2.3 Darstellungen der Lorentz-Gruppe

Lorentz-Boost entlang der  $x$ -Achse:

$$t' = \gamma (t + vx) \quad ; \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \quad v = \frac{v}{c} \equiv \beta$$

$$x' = \gamma (x + vt)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \rightarrow x' = \begin{pmatrix} \cosh \phi & \sinh \phi & 0 & 0 \\ \sinh \phi & \cosh \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x$$

$$= B_x x$$

mit  $\phi := \frac{1}{2} \ln \frac{1+v}{1-v}$  "Rapidity"

$$\Rightarrow \cosh \phi = \gamma, \quad \sinh \phi = \gamma v$$

Generator:  $K_x = -i \left. \frac{\partial B_x}{\partial \phi} \right|_{\phi=0} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$(\Rightarrow B_x(\phi) = \exp(i K_x \phi) )$$

Analog: Boost in  $y$ -Richtung  $\rightarrow B_y \rightarrow K_y$   
 " "  $z$  - "  $\rightarrow B_z \rightarrow K_z$

Einbettung der Generatoren der Rotationsgruppe in die 4-dim Raumzeit

$$J_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J_x = \dots, \quad J_y = \dots$$

$$\Rightarrow x' = \exp[-i(\vec{J} \cdot \vec{\Theta} - \vec{K} \cdot \vec{\Phi})] x$$



Kommutatoren:

$$[J^i, J^j] = i \varepsilon^{ijk} J^k \quad (\text{wie gehabt})$$

$$[K^i, K^j] = -i \varepsilon^{ijk} J^k$$

$$[J^i, K^j] = i \varepsilon^{ijk} K^k$$

$$[J^i, K^i] = 0$$

$\Rightarrow$  Boosts alleine bilden keine Gruppe,  
jedoch die Kombination von Boosts mit  
Rotationen („eigentliche Lorentz-Gruppe“)

(z.B. Abfolge  $v_x \vec{e}_x, v_y \vec{e}_y, -v_x \vec{e}_x, -v_y \vec{e}_y$   
 $\rightarrow$  Drehung um die z-Achse)

Linearkombinationen:

$$A^k := \frac{1}{2} (J^k + i K^k)$$

$$B^k := \frac{1}{2} (J^k - i K^k)$$

$$\hookrightarrow [A^i, A^j] = i \varepsilon^{ijk} A^k$$

$$[B^i, B^j] = i \varepsilon^{ijk} B^k$$

$$[A^i, B^j] = 0$$

$\Rightarrow \vec{A}$  und  $\vec{B}$  erzeugen zwei mit einander  
kommutierende  $SU(2)$ -Gruppen

=> eigentlich Lorentz-Gruppe  $\hat{=} SU(2) \otimes SU(2)$

↳ Zustände:  $(j_A, j_B)$

Spezialfälle:

•  $(j_A = j, j_B = 0) \Rightarrow \vec{J} = 0 \Rightarrow \vec{K} = -i \vec{J}^{(j)}$

•  $(j_A = 0, j_B = j) \Rightarrow \vec{A} = 0 \Rightarrow \vec{K} = i \vec{J}^{(j)}$

↑  
2j+1. Dim Darst  
der  $SU(2)$

Spin =  $\frac{1}{2}$ :

i)  $(\frac{1}{2}, 0)$ :  $\vec{J}^{(1/2)} = \frac{\vec{\sigma}}{2}, \vec{K} = -i \frac{\vec{\sigma}}{2}$

↳ Transformation eines Pauli-Spinors

$$\begin{aligned} \xi &\rightarrow \exp[-i(\vec{J} \cdot \vec{\Theta} - \vec{K} \cdot \vec{\Phi})] \xi \\ &= \exp[-i \frac{\vec{\sigma}}{2} (\vec{\Theta} + i \vec{\Phi})] \xi =: \mathcal{D}(\Lambda) \xi \end{aligned}$$

ii)  $(0, \frac{1}{2})$ :  $\vec{J}^{(1/2)} = \frac{\vec{\sigma}}{2}, \vec{K} = i \frac{\vec{\sigma}}{2}$

$$\eta \rightarrow \exp[-i \frac{\vec{\sigma}}{2} (\vec{\Theta} - i \vec{\Phi})] \eta =: \bar{\mathcal{D}}(\Lambda) \eta$$

$\mathcal{D}$  und  $\bar{\mathcal{D}}$  sind nicht unitär!

Das ist aber kein Problem, wenn wir

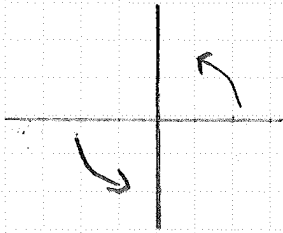
$\xi$  und  $\eta$  als (zunächst klassische) Felder

auffassen und nicht mit einer Wahrscheinlichkeitsinterpretation verbinden.

## Paritätstransformation (= Raumspiegelung)

$$x = \begin{pmatrix} x^0 \\ \vec{x} \end{pmatrix} \rightarrow x' = \begin{pmatrix} x^0 \\ -\vec{x} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{v} \rightarrow -\vec{v} \Rightarrow \text{Boosts: } \vec{K} \rightarrow -\vec{K} \text{ (Vektor)}$$



$$\text{Rotationen: } \vec{J} \rightarrow \vec{J} \text{ (Axialvektor)}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{ccc} (j, 0) & \leftrightarrow & (0, j) \\ \xi & \leftrightarrow & \eta \end{array} \right\} \text{ unter Paritäts-} \\ \text{transformationen}$$

$\Rightarrow$  Die Paritätstransf. koppelt die beiden  $SL(2)$ -Gruppen

$\hookrightarrow$  Fasse die beiden 2-Spinoren zu einem 4-Spinor zusammen:

$$\psi := \begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \phi_L \\ \phi_R \end{pmatrix}$$

L/R: „links / rechts/händig“ (s. später)

eigentl. Lorentz-Transf.:

$$\psi \rightarrow S(\Lambda) \psi = \begin{pmatrix} \mathcal{D}(\Lambda) & 0 \\ 0 & \mathcal{D}(\Lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_L \\ \phi_R \end{pmatrix}$$

$$\text{Parität: } \psi \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_L \\ \phi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_R \\ \phi_L \end{pmatrix}$$

Betrachte einen Lorentz-Boost, der ein ruhendes Teilchen in ein Teilchen mit Impuls  $\vec{p}$  überführt:

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v} = \gamma m v \hat{p} = m \sinh \phi \hat{p}$$

$$E = \gamma m = m \cosh \phi$$

( $\hat{p}$  = Einheitsvektor in Richtung des Boosts)

$$\Rightarrow \phi_R(\vec{p}) = \exp\left(\frac{1}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{\phi}\right) \phi_R(0), \quad \vec{\phi} = \phi \hat{p}$$

$$= \left[ \cosh\left(\frac{\phi}{2}\right) + \vec{\sigma} \cdot \hat{p} \sinh\left(\frac{\phi}{2}\right) \right] \phi_R(0)$$

$$= \frac{E + m + \vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{\sqrt{2m(E+m)}} \phi_R(0)$$

(→ Übung)

analog:

$$\phi_L(\vec{p}) = \frac{E + m - \vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{\sqrt{2m(E+m)}} \phi_L(0)$$

Für ruhende Teilchen sollte es keinen Unterschied zwischen rechts- und links-händig (Spin in oder entgegen der Bewegungsrichtung) geben:

$$\phi_R(0) = \phi_L(0)$$

Übung  
=>

$$\phi_R(\vec{p}) = \frac{E + \vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{m} \phi_L(\vec{p}) \Leftrightarrow \phi_L(\vec{p}) = \frac{E - \vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{m} \phi_R(\vec{p})$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -m & p_0 - \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ p_0 + \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_L(\vec{p}) \\ \phi_R(\vec{p}) \end{pmatrix} = 0, \quad p_0 = E$$

$$\rightarrow \text{Def. : } \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{p} = \sigma^k p^k = -\sigma^k p_k$$

$$\Rightarrow (\gamma^\mu p_\mu - m) \psi(p) = 0 \quad \text{Dirac-Gl. im Impulsraum!}$$

Fourier-Transformation:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) = 0 \quad \text{Dirac-Gleichung}$$

Spezialfall  $m = 0$

$\Rightarrow$  Die Gleichungen für  $\phi_L$  und  $\phi_R$  entkoppeln:

$$\left. \begin{aligned} (p_0 - \vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \phi_R(\vec{p}) &= 0 \\ (p_0 + \vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \phi_L(\vec{p}) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{„Weyl-Gleichungen“}$$

$$m = 0 \Rightarrow p_0 = |\vec{p}|$$

$$\Rightarrow \vec{\sigma} \cdot \hat{p} \phi_L = \pm \phi_L$$

d.h.  $\phi_R$  und  $\phi_L$  sind Eigenfunktionen von  $\vec{\sigma} \cdot \hat{p}$  mit Eigenwerten  $\pm 1 \hat{=} \text{Spin-Projektion parallel / antiparallel zum Impuls} \hat{=} \text{rechts- / links-händig.}$

### III.2.4 Spinor-Transformationen und Forminvarianz der Dirac-Gleichung

Die Generatoren  $K^k$  und  $J^k$  für Boosts und Drehungen lassen sich - ähnlich wie die elektrischen und magnetischen Felder in der Elektrodynamik - zu einem antisymmetrischen Tensor zusammenfassen:

$$(J^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -K_x & -K_y & -K_z \\ K_x & 0 & J_z & -J_y \\ K_y & -J_z & 0 & J_x \\ K_z & J_y & -J_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow K^k = -J^{0k} = J^{k0}, \quad J^{ij} = \varepsilon^{ijk} J^k$$

Definiert man analog

$$\phi^k = -\omega^{0k} = \omega^{k0}, \quad \omega^{ij} = \varepsilon^{ijk} \theta^k$$

$$(\leftarrow) \phi^k = \omega_{0k} = -\omega_{k0}, \quad \omega_{ij} = \varepsilon_{ijk} \theta^k,$$

ergibt sich für die Transformation von Vierervektoren ( $\rightarrow$  Übung):

$$\begin{aligned} x &\rightarrow \exp(-i(\vec{J} \cdot \vec{\theta} - \vec{K} \cdot \vec{\phi})) x \\ &= \exp\left(-\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu}\right) x \end{aligned}$$

Für die Lorentz-Algebra ergibt sich dann  
(→ Übung)

$$[J^{\mu\nu}, J^{\sigma\rho}] = i (g^{\nu\sigma} J^{\mu\rho} - g^{\mu\sigma} J^{\nu\rho} - g^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} + g^{\mu\rho} J^{\nu\sigma})$$

In den Übungen wird ferner gezeigt, dass

$$S^{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

diese Vertauschungsrelationen erfüllen, wobei man dafür lediglich die Antivertauschungsrelationen der  $\gamma$ -Matrizen,

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$$

voraussetzen muss.

⇒ Die  $S^{\mu\nu}$  sind eine Darstellung der Lorentz-Algebra.

Behauptung:

Dirac-Spinoren transformieren sich gemäß

$$\psi \rightarrow \exp\left(-\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu}\right) \psi \quad (*)$$

Um das zu sehen, werden wir den Exponenten konkret in Weyl-Darstellung aus.

$$-\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu} = \frac{i}{8} \omega_{\mu\nu} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] = \frac{i}{4} \omega_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu,$$

da  $\omega_{\mu\nu}$  antisymmetrisch ist (⇒  $\omega_{\mu\mu} = 0$ ).

$$\Rightarrow -\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu} = \frac{1}{4} \left[ \underbrace{\phi^k (\gamma^0 \gamma^k - \gamma^k \gamma^0)}_{= 2\gamma^0 \gamma^k} + \varepsilon^{ijk} \theta^k \gamma^{ij} \right]$$

Weyl-Darstellung:

$$\gamma^0 \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}$$

$$\gamma^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix} \stackrel{i \neq j}{=} i \varepsilon^{ije} \begin{pmatrix} -\sigma^e & 0 \\ 0 & -\sigma^e \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon^{ijk} \varepsilon^{ije} = 2\delta^{ke}$$

$$\Rightarrow -\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\vec{\phi} \cdot \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\phi} \cdot \vec{\sigma} \end{pmatrix} + \frac{i}{2} \begin{pmatrix} -\vec{\theta} \cdot \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & -\vec{\theta} \cdot \vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \psi \rightarrow \exp \left[ \begin{pmatrix} -i \frac{\vec{\sigma}}{2} (\vec{\theta} - i \vec{\phi}) & 0 \\ 0 & -i \frac{\vec{\sigma}}{2} (\vec{\theta} + i \vec{\phi}) \end{pmatrix} \right] \psi$$

Das entspricht genau dem Transformationsverhalten, das wir Abschnitt III, 2.3 hergeleitet haben. Die Vorschrift (\*) hat jedoch den Vorteil, dass sie für beliebige Darstellungen der  $\gamma$ -Matrizen gilt und daher allgemeiner ist.

Vektoren und Dirac-Spinoren transformieren sich also wie folgt:

$$x \rightarrow x' = \Lambda x, \quad \Lambda = \exp\left(-\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu}\right)$$

$$\psi \rightarrow \psi' = \Lambda_{1/2} \psi, \quad \Lambda_{1/2} = \exp\left(-\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu}\right)$$



Eine wichtige Beziehung lautet dann

$$\Lambda_{1/2}^{-1} x^\alpha \Lambda_{1/2} = \Lambda^\alpha{}_\beta x^\beta \quad (**)$$

Beweisskizze:

Wir können uns wieder auf infinitesimale Transformationen beschränken.

$$\Rightarrow \Lambda_{1/2} = 1 - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu} \Leftrightarrow \Lambda_{1/2}^{-1} = 1 + \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu}$$

$$\Rightarrow \Lambda_{1/2}^{-1} x^\alpha \Lambda_{1/2} = x^\alpha + \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \underbrace{[S^{\mu\nu}, x^\alpha]}_{-i(g^{\alpha\mu} x^\nu - g^{\alpha\nu} x^\mu)}$$

$$= x^\alpha + \frac{i}{2} (\omega^{\alpha\nu} x^\nu - \omega_{\mu\alpha} x^\mu)$$

$$= (g^{\alpha\nu} + \omega^{\alpha\nu}) x^\nu$$

$$\Lambda^\alpha{}_\beta = \left( \mathbb{1} - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} \right)^\alpha{}_\beta$$

$$= g^\alpha{}_\beta - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \underbrace{(J^{\mu\nu})^\alpha{}_\beta}_{i(g^{\mu\alpha} g^\nu{}_\beta - g^\mu{}_\beta g^{\nu\alpha})}$$

$$i(g^{\mu\alpha} g^\nu{}_\beta - g^\mu{}_\beta g^{\nu\alpha})$$

(vgl. Übungsblatt)

$$\Rightarrow \Lambda^\alpha{}_\beta x^\beta = (g^\alpha{}_\beta + \frac{i}{2} (\omega^{\alpha\beta} - \omega_{\beta\alpha})) x^\beta$$

$$= (g^{\alpha\nu} + \omega^{\alpha\nu}) x^\nu \quad \checkmark$$

Damit können wir jetzt die Forminvarianz der Dirac-Gleichung zeigen:

$$\begin{aligned}
 & (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi'(x) \\
 &= (i \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m) \Lambda_{\frac{1}{2}} \psi(\Lambda^{-1}x) \\
 &= \Lambda_{\frac{1}{2}} \underbrace{(i \Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1} \gamma^\mu \Lambda_{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m)}_{\Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu} \psi(\Lambda^{-1}x) \\
 &\stackrel{y=\Lambda^{-1}x}{=} \Lambda_{\frac{1}{2}} (i \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu \frac{\partial y^\sigma}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial y^\sigma} - m) \psi(y) \Big|_{y=\Lambda^{-1}x} \\
 &= \Lambda_{\frac{1}{2}} (i \gamma^\nu \underbrace{\Lambda^\mu{}_\nu (\Lambda^{-1})^\sigma{}_\mu}_{=\delta^\sigma{}_\nu} \frac{\partial}{\partial y^\sigma} - m) \psi(y) \Big|_{y=\Lambda^{-1}x} \\
 &= \Lambda_{\frac{1}{2}} (i \gamma^\sigma \frac{\partial}{\partial y^\sigma} - m) \psi(y) \Big|_{y=\Lambda^{-1}x} \\
 &= 0 \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

weitere Eigenschaft:  $\gamma^0 \Lambda_{\frac{1}{2}}^\dagger \gamma^0 = \Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}$  ( $\rightarrow$  Übung)

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \bar{\psi}(x) &\equiv \psi^\dagger(x) \gamma^0 \rightarrow \psi^\dagger(\Lambda^{-1}x) \Lambda_{\frac{1}{2}}^\dagger \gamma^0 = \psi^\dagger(\Lambda^{-1}x) \gamma^0 \gamma^0 \Lambda_{\frac{1}{2}}^\dagger \gamma^0 \\
 &= \bar{\psi}(\Lambda^{-1}x) \Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \bar{\psi}(x) \psi(x) &\rightarrow \bar{\psi}(\Lambda^{-1}x) \Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1} \Lambda_{\frac{1}{2}} \psi(\Lambda^{-1}x) = \bar{\psi}(\Lambda^{-1}x) \psi(\Lambda^{-1}x) \\
 &\text{Lorentz-Skalar!}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) &\rightarrow \bar{\psi}(\Lambda^{-1}x) \underbrace{\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1} \gamma^\mu \Lambda_{\frac{1}{2}}}_{\Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu} \psi(\Lambda^{-1}x) = \Lambda^\mu{}_\nu \bar{\psi}(\Lambda^{-1}x) \gamma^\nu \psi(\Lambda^{-1}x) \\
 &\text{Lorentz-Vektor!}
 \end{aligned}$$

### III.3 Lösungen der freien Dirac-Gleichung

Lösungen der Dirac-Gl. erfüllen die Klein-Gordon-Gl.  $\rightarrow$  ebene Wellen mit  $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$

2) Lösungsansätze:

pos. Frequenz:  $\psi_+(x) = u(\vec{p}) e^{-ip \cdot x}$

neg. " :  $\psi_-(x) = v(\vec{p}) e^{+ip \cdot x}$

mit  $p = \begin{pmatrix} p_0 \\ \vec{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_p \\ \vec{p} \end{pmatrix}$ ,  $E_p = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$

Einsetzen in die Dirac-Gl.:

$$0 = (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) u(\vec{p}) e^{-ip \cdot x} = (\gamma^\mu p_\mu - m) u(\vec{p}) e^{-ip \cdot x}$$

$$0 = (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) v(\vec{p}) e^{ip \cdot x} = (-\gamma^\mu p_\mu - m) v(\vec{p}) e^{ip \cdot x}$$

$$\Rightarrow \boxed{(\not{p} - m) u(\vec{p}) = 0, \quad (\not{p} + m) v(\vec{p}) = 0}$$

i) Lösungen positive Frequenz

Wir suchen zunächst die Lösungen im

Ruhesystem:

$$p = \begin{pmatrix} m \\ \vec{0} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (m \gamma^0 - m) u(0) = m \begin{pmatrix} -\mathbb{1}_2 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix} u(\vec{0}) = 0$$

↑  
Weyl Darst.

$$\Rightarrow \psi(\vec{0}) = \mathcal{N} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} : \quad 2\text{-komp. Spinor}$$

Normierungskonvention:  $\xi^\dagger \xi = 1$ ,  $\mathcal{N} = \sqrt{m}$   
 (wird sich als praktisch erweisen)

Das Ergebnis ist konsistent mit unserer Annahme auf S. III-12, wonach

$$\psi = \begin{pmatrix} \phi_L \\ \phi_R \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \phi_L(\vec{0}) = \phi_R(\vec{0}) \quad \text{gilt.}$$

Wir können daher direkt auf die dort gefundenen gebastelten Ausdrücke

$$\phi_{L/R}(\vec{p}) = \frac{E + m \mp \vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{\sqrt{2m(E+m)}} \phi_{L/R}(\vec{0}), \quad E \equiv E_p$$

zurückgreifen, um  $\psi(\vec{p})$  zu erhalten.

Unter Berücksichtigung des Normierungsfaktors  $\sqrt{m}$  ergibt sich

$$\psi(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2(E+m)}} \begin{pmatrix} [E+m - \vec{\sigma} \cdot \vec{p}] \xi \\ [E+m + \vec{\sigma} \cdot \vec{p}] \xi \end{pmatrix}$$

Alternativ kann man das schreiben als

$$\psi(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad (\sigma^\mu) = \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{\sigma} \end{pmatrix}, \quad (\bar{\sigma}^\mu) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

wobei man die Wurzel einer Matrix über die positiven Wurzeln ihrer Eigenwerte definiert.

$$A = U \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} U^T$$

$$\Rightarrow \sqrt{A} = U \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{d_n} \end{pmatrix} U^T \quad \Rightarrow (\sqrt{A})^2 = A \quad \checkmark$$

(Beweis der Identität der beiden Ausdrücke:

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{p} = \sqrt{\vec{p}^2} \vec{\sigma} \cdot \hat{p} = \sqrt{E^2 - m^2} \vec{\sigma} \cdot \hat{p} = \sqrt{(E+m)(E-m)} \vec{\sigma} \cdot \hat{p}$$

$$\Rightarrow u(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} [\sqrt{E+m} - \sqrt{E-m} \vec{\sigma} \cdot \hat{p}] \xi \\ [\sqrt{E+m} + \sqrt{E-m} \vec{\sigma} \cdot \hat{p}] \xi \end{pmatrix}$$

$$\left( \frac{1}{\sqrt{2}} [\sqrt{E+m} \mp \sqrt{E-m} \vec{\sigma} \cdot \hat{p}] \right)^2$$

$$= \frac{1}{2} [E+m + E-m \mp 2\sqrt{E^2 - m^2} \vec{\sigma} \cdot \hat{p}] = E \mp \vec{p} \cdot \vec{\sigma}$$

$$= \begin{cases} p \cdot \sigma \\ p \cdot \vec{\sigma} \end{cases}$$

✓

zur Normierung:

•  $\bar{\psi} \psi$  Lorentz-Skalar  $\Rightarrow \bar{u} u$  Lorentz-Skalar

$$\Rightarrow \bar{u}(\vec{p}) u(\vec{p}) = \bar{u}(0) u(0) = m (\xi^\dagger, \xi^\dagger) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix} = 2m$$

•  $\bar{\psi} \gamma^\mu \psi$  Lorentz-Vektor  $\Rightarrow \bar{u} \gamma^\mu u$  Lorentz-Vektor

$$\Rightarrow u^\dagger(\vec{p}) u(\vec{p}) = \bar{u}(\vec{p}) \gamma^0 u(\vec{p}) = \frac{E_p}{m} u^\dagger(0) u(0) = 2E_p$$

Da  $\xi$  zwei Komponenten besitzt, können wir zwei orthogonale Spinoren  $\xi^1$  und  $\xi^2$  definieren mit  $\xi^{r\dagger} \xi^s = \delta^{rs}$

(z.B.  $\xi^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\xi^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ )

Entsprechend gibt es dann auch jeweils zwei orthogonale Lösungen  $u^s(\vec{p})$  mit

$$\bar{u}^r(\vec{p}) u^s(\vec{p}) = 2m \delta^{rs}$$

$$u^{r\dagger}(\vec{p}) u^s(\vec{p}) = 2E_p \delta^{rs}$$

ii) Lösungen negativer Frequenz

Analog findet man zunächst im Pauli-System:

$$\vec{v}(\vec{0}) = \mathcal{N} \begin{pmatrix} \eta \\ -\eta \end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$$

d.h. in der Notation von S. III-12 finden wir  $\phi_L(\vec{0}) = -\phi_R(\vec{0})$ , was der dortigen Annahme in einem Vorzeichen widerspricht, welches jedoch irrelevant ist: Hätten wir auf S. III-12  $\phi_L(\vec{0}) = -\phi_R(\vec{0})$  angenommen, hätten wir die Dirac-Gleichung einer anderen Darstellung der  $\gamma$ -Matrizen gefunden, nämlich mit  $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  und  $\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}$ . Dies hätte dann auf vertauschte Rollen von  $u(\vec{0})$  und  $v(\vec{0})$  geführt:  $u(\vec{0}) \sim \begin{pmatrix} \xi \\ -\xi \end{pmatrix}$ ,  $v(\vec{0}) \sim \begin{pmatrix} \eta \\ \eta \end{pmatrix}$ .

Wir bleiben jedoch bei der Veyl-Darstellung.  
 Boosten von  $\psi(\vec{0})$  liefert dann

$$\psi(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2(E+m)}} \begin{pmatrix} [E+m - \vec{\sigma} \cdot \vec{p}] \eta \\ -[E+m + \vec{\sigma} \cdot \vec{p}] \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \eta \\ -\sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \eta \end{pmatrix}$$

Insgesamt finden wir also vier unabhängige  
 Lösungen mit Impuls  $\vec{p}$ :

$$u^s(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi^s \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi^s \end{pmatrix}, \quad s=1,2, \quad \xi^{r\dagger} \xi^s = \delta^{rs}$$

$$v^s(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \eta^s \\ -\sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \eta^s \end{pmatrix}, \quad \text{"}, \quad \eta^{r\dagger} \eta^s = \delta^{rs}$$

$$\bar{u}^r(\vec{p}) u^s(\vec{p}) = 2m \delta^{rs}$$

$$\bar{v}^r(\vec{p}) v^s(\vec{p}) = -2m \delta^{rs}$$

$$\bar{u}^{(r)}(\vec{p}) v^s(\vec{p}) = \bar{v}^{(r)}(\vec{p}) u^s(\vec{p}) = 0$$

$$u^{r\dagger}(\vec{p}) u^s(\vec{p}) = v^{r\dagger}(\vec{p}) v^s(\vec{p}) = 2E_p \delta^{rs}$$

$$u^{r\dagger}(\vec{p}) v^s(-\vec{p}) = v^{r\dagger}(\vec{p}) u^s(-\vec{p}) = 0$$

Für  $m=0$  sollte man die Beziehungen  
 für  $u^\dagger u$  und  $v^\dagger v$  zur Normierung verwenden.

Spin - Summen:

Seien  $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix}$ ,  $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix}$ ,

dann definieren wir im Folgenden die  $N \times N$ -Matrix  $ab^t$  über das äußere Produkt

$$(ab^t)_{ij} \equiv a_i b_j^t$$

Betrachte nun  $\mathbb{F}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbb{F}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \sum_{s=1}^2 \mathbb{F}^s \mathbb{F}^{s^t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (1, 0) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (0, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}_2$$

(gilt allgemein für eine orthonormale Basis  $\{\mathbb{F}^1, \mathbb{F}^2\}$ )

$$\Rightarrow \sum_{s=1}^2 u^s(\vec{p}) \bar{u}^s(\vec{p}) = \sum_s \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \mathbb{F}^s \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \mathbb{F}^s \end{pmatrix} \left( \mathbb{F}^{s^t} \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}}, \mathbb{F}^{s^t} \sqrt{p \cdot \sigma} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{(p \cdot \sigma)(p \cdot \bar{\sigma})} & p \cdot \sigma \\ p \cdot \bar{\sigma} & \sqrt{(p \cdot \bar{\sigma})(p \cdot \sigma)} \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{\text{Übung}}{=} \begin{pmatrix} m & p \cdot \sigma \\ p \cdot \bar{\sigma} & m \end{pmatrix}$$

$$= \gamma^4 p_\mu + m \mathbb{1}_4$$

analog für  $\sum v^s \bar{v}^s$

|   |
|---|
| $\sum_s u^s(\vec{p}) \bar{u}^s(\vec{p}) = \not{p} + m$ $\sum_s v^s(\vec{p}) \bar{v}^s(\vec{p}) = \not{p} - m$ |
|---|



### III.4 Lagrange-Dichte und Hamilton-Dichte des Dirac-Feldes

Lagrange-Dichte:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\partial - m) \psi$$

- Lorentz-Skalar ( $\Rightarrow$  nicht  $\psi^\dagger (i\partial - m) \psi$ )
- komplexe Felder  $\Rightarrow \psi, \bar{\psi}$  unabh. Freiheitsgrade

$\hookrightarrow$  Euler-Lagrange-Gleichungen:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_r} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi_r} = 0 \quad \leadsto \text{adjungierte Gleichung}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}_r} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \bar{\psi}_r} = 0 \quad \leadsto \text{Dirac-Gleichung}$$

kanon. konj. Impuls zu  $\psi$ :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = \bar{\psi} i \gamma^0 = i \psi^\dagger = \pi$$

$$\left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{\psi}}} = 0 \quad \Rightarrow \text{kein kanon. konj. Impuls zu } \bar{\psi} \right)$$

2) Hamilton-Dichte:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \pi \dot{\psi} - \mathcal{L} = i \psi^\dagger \partial_0 \psi - \bar{\psi} (i\partial - m) \psi \\ &= \bar{\psi} (-i \gamma^k \partial_k + m) \psi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathcal{H} &= \bar{\psi} (-i \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} + m) \psi = \psi^\dagger (-i \gamma^0 \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} + m \gamma^0) \psi \\ &= \psi^\dagger \underbrace{(-i \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m)}_{\hat{H}_D} \psi \\ &= \psi^\dagger \hat{H}_D \psi \end{aligned}$$

$\hat{H}_D = \text{Dirac-Hamilton-Op. im relativist. BM}$

## Eigenfunktionen und Eigenwerte von $\hat{H}_0$ :

$$(i \gamma^\mu \partial_\mu - m) u(\vec{p}) e^{-i p \cdot x} = 0$$

$$\Leftrightarrow (-i \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} + m) u(\vec{p}) e^{-i p \cdot x} = i \gamma^0 \partial_0 u(\vec{p}) e^{-i p \cdot x} = \gamma^0 E_p u(\vec{p}) e^{-i p \cdot x}$$

$$\Leftrightarrow (-i \gamma^0 \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} + m \gamma^0) u(\vec{p}) e^{-i p \cdot x} = E_p u(\vec{p}) e^{-i p \cdot x}$$

$$\Rightarrow \hat{H}_0 u^s(\vec{p}) e^{-i p \cdot x} = E_p u^s(\vec{p}) e^{-i p \cdot x}$$

$$\text{analog } \hat{H}_0 v^s(\vec{p}) e^{i p \cdot x} = -E_p v^s(\vec{p}) e^{i p \cdot x}$$

$s = 1, 2 \Rightarrow 4$  Eigenfunktionen zu gegebenem Impuls  $\vec{p}$   
 $\rightarrow$  Basis für 4-komponentigen Spinor

## III.5 Quantisierung des Dirac-Feldes

Wir beginnen wieder im Schrödinger-Bild.

naheliegender Quantisierungsvorschlag (analog zu Klein-Gordon):

$$[\psi_a(\vec{x}), \psi_b^\dagger(\vec{y})] = \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \delta_{ab} \quad (\pi = i \psi^\dagger)$$

$$\Rightarrow [\psi_a, \pi_b] = i \delta^3(\dots) \delta_{ab}$$

sowie

$$[\psi_a(\vec{x}), \psi_b(\vec{y})] = [\psi_a^\dagger(\vec{x}), \psi_b^\dagger(\vec{y})] = 0$$

Es wird sich jedoch herausstellen, dass wir damit auf Widersprüche stoßen und wir stattdessen die analogen Antikommutatorrelationen fordern müssen:

$$\{\psi_a(\vec{x}), \psi_b^\dagger(\vec{y})\} = \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \delta_{ab}, \quad \{\psi_a(\vec{x}), \psi_b(\vec{y})\} = \{\psi_a^\dagger(\vec{x}), \psi_b^\dagger(\vec{y})\} = 0$$

Um beide Fälle gemeinsam abzuhandeln, definieren wir

$$[A, B]_{\pm} = AB \pm BA, \quad \text{d.h. } [A, B]_{+} = \{A, B\}$$

$$[A, B]_{-} = [A, B]$$

Entwicklung von  $\psi$  nach Basisfunktionen

$$\psi(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_s (a_{\vec{p}}^s u^s(\vec{p}) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + b_{\vec{p}}^{s\dagger} v^s(\vec{p}) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}})$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \sum_s (a_{\vec{p}}^s u^s(\vec{p}) + b_{-\vec{p}}^{s\dagger} v^s(-\vec{p}))$$

Dann sind die (Anti-)Kommutatoren erfüllt, falls

$$[a_{\vec{p}}^r, a_{\vec{q}}^{s\dagger}]_{\pm} = \pm [b_{\vec{p}}^r, b_{\vec{q}}^{s\dagger}]_{\pm} = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p}-\vec{q}) \delta_{rs}$$

$$\text{und } [a_{\vec{p}}^r, a_{\vec{q}}^s]_{\pm} = (\text{alle anderen}) = 0$$

Beweis (für  $[\psi, \psi^{\dagger}]_{\pm}$ ):

$$[\psi_a(\vec{x}), \psi_b^{\dagger}(\vec{y})]_{\pm}$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\sqrt{E_p E_q}} e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x} - \vec{q}\cdot\vec{y})}$$

$$\times \sum_{r,s} \left\{ \begin{aligned} & [a_{\vec{p}}^s, a_{\vec{q}}^{r\dagger}]_{\pm} u_a^s(\vec{p}) u_b^{r\dagger}(\vec{q}) \\ & + [a_{\vec{p}}^s, b_{-\vec{q}}^{r\dagger}]_{\pm} u_a^s(\vec{p}) v_b^{r\dagger}(-\vec{q}) \\ & + [b_{-\vec{p}}^{s\dagger}, a_{\vec{q}}^{r\dagger}]_{\pm} v_a^s(-\vec{p}) u_b^{r\dagger}(\vec{q}) \\ & + [b_{-\vec{p}}^{s\dagger}, b_{-\vec{q}}^r]_{\pm} v_a^s(-\vec{p}) v_b^r(-\vec{q}) \end{aligned} \right\}$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \underbrace{\sum_s (u_a^s(\vec{p}) \bar{u}_c^s(\vec{p}) + v_a^s(-\vec{p}) \bar{v}_c^s(-\vec{p}))}_{(\gamma^0 E_p - \vec{\gamma}\cdot\vec{p} + m + \gamma^0 E_p + \vec{\gamma}\cdot\vec{p} - m) \gamma^0}_{ab}$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \mathbb{1}_{ab} = \delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \delta_{ab} \quad \checkmark$$

→ Hamilton-Operator:

$$\begin{aligned}
 H &= \int d^3x \psi^\dagger(\vec{x}) \hat{H}_D \psi(\vec{x}) \\
 &= \int d^3x \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\sqrt{E_p E_q}} \sum_{rs} (a_{\vec{q}}^r{}^\dagger u^r(\vec{q}) + b_{-\vec{q}}^r v^r(-\vec{q})) e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}} \\
 &\quad \hat{H}_D (a_{\vec{p}}^s u^s(\vec{p}) + b_{-\vec{p}}^s v^s(-\vec{p})) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \\
 &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \sum_{rs} \left\{ \underbrace{a_{\vec{p}}^r{}^\dagger a_{\vec{p}}^s}_{2E_p \delta_{rs}} u^r(\vec{p}) u^s(\vec{p}) - a_{\vec{p}}^r{}^\dagger \underbrace{b_{-\vec{p}}^s}_{-E_p} v^s(-\vec{p})}_{=0} \right. \\
 &\quad \left. + b_{-\vec{p}}^r \underbrace{a_{\vec{p}}^s}_{=0} v^r(-\vec{p}) u^s(\vec{p}) - b_{-\vec{p}}^r \underbrace{b_{-\vec{p}}^s}_{2E_p \delta_{rs}} v^r(-\vec{p}) v^s(-\vec{p}) \right\} \\
 &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s E_p (a_{\vec{p}}^s{}^\dagger a_{\vec{p}}^s - b_{\vec{p}}^s b_{\vec{p}}^s{}^\dagger)
 \end{aligned}$$

Fall 1: Kommutator

$$z, b_{\vec{p}}^s b_{\vec{p}}^s{}^\dagger = b_{\vec{p}}^s{}^\dagger b_{\vec{p}}^s + \underbrace{[b_{\vec{p}}^s, b_{\vec{p}}^s{}^\dagger]}_{-(2\pi)^3 \delta^3(\vec{0})}$$

$$\Rightarrow H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s E_p (a_{\vec{p}}^s{}^\dagger a_{\vec{p}}^s - b_{\vec{p}}^s{}^\dagger b_{\vec{p}}^s + (2\pi)^3 \delta^3(\vec{0}))$$

↑ nicht messbare Vakuumenergie ✓  
 je mehr "b-Teilchen",  
 desto niedriger die Energie  
 ⇒ Spektrum nicht nach unten beschränkt



Fall 2: Antikommutator

$$\leadsto b_{\vec{p}}^s b_{\vec{p}}^{s\dagger} = -b_{\vec{p}}^{s\dagger} b_{\vec{p}}^s + \underbrace{\{b_{\vec{p}}^s, b_{\vec{p}}^{s\dagger}\}}_{(2\pi)^3 \delta^3(\vec{0})}$$

$$\Rightarrow H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s E_p (a_{\vec{p}}^{s\dagger} a_{\vec{p}}^s + b_{\vec{p}}^{s\dagger} b_{\vec{p}}^s - (2\pi)^3 \delta^3(\vec{0}))$$

funktioniert!

→ Quantisierungsvorschrift für Dirac-Felder:

$$\{\psi_a(\vec{x}), \psi_b^\dagger(\vec{y})\} = \delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \delta_{ab}$$

$$\{\psi_a(\vec{x}), \psi_b(\vec{y})\} = \{\psi_a^\dagger(\vec{x}), \psi_b^\dagger(\vec{y})\} = 0$$

$$\{a_{\vec{p}}^r, a_{\vec{q}}^{s\dagger}\} = \{b_{\vec{p}}^r, b_{\vec{q}}^{s\dagger}\} = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p}-\vec{q}) \delta_{rs}$$

$$\{a_{\vec{p}}^r, a_{\vec{q}}^s\} = (\text{alle anderen}) = 0$$

Heisenberg-Bild:

wie Klein-Gordon: 
$$e^{iHt} a_{\vec{p}}^s e^{-iHt} = a_{\vec{p}}^s e^{-iE_p t}$$

$$e^{iHt} b_{\vec{p}}^s e^{-iHt} = b_{\vec{p}}^s e^{-iE_p t}$$

$$\leadsto \psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_s (a_{\vec{p}}^s u^s(\vec{p}) e^{-ip \cdot x} + b_{\vec{p}}^{s\dagger} v^s(\vec{p}) e^{ip \cdot x})$$

$$\bar{\psi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_s (b_{\vec{p}}^s \bar{v}^s(\vec{p}) e^{-ip \cdot x} + a_{\vec{p}}^{s\dagger} \bar{u}^s(\vec{p}) e^{ip \cdot x})$$

$$H = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \sum_s E_p (a_{\vec{p}}^{s\dagger} a_{\vec{p}}^s + b_{\vec{p}}^{s\dagger} b_{\vec{p}}^s) \quad (\text{ohne Vak.-Energie})$$

$$\vec{P} = \int d^3 x \psi^\dagger (-i \vec{\nabla}) \psi = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \sum_s \vec{p} (a_{\vec{p}}^{s\dagger} a_{\vec{p}}^s + b_{\vec{p}}^{s\dagger} b_{\vec{p}}^s)$$

$\Rightarrow a_{\vec{p}}^{s\dagger}, b_{\vec{p}}^{s\dagger}$  erzeugen Teilchen mit Energie  $E_p$  und Impuls  $\vec{p}$ .

Ein-Teilchen-Zustände:

$$|\vec{p}, s\rangle \equiv |\vec{p}, s\rangle_a = \sqrt{2E_p} a_{\vec{p}}^{s\dagger} |0\rangle, \quad |\vec{p}, s\rangle_b = \sqrt{2E_p} b_{\vec{p}}^{s\dagger} |0\rangle$$

$$\Rightarrow \langle \vec{p}, r | \vec{q}, s \rangle_d = 2E_p (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) \delta_{rs} \delta_{cd}$$

Mehr-Teilchen-Zustände:

$$a_{\vec{p}}^{s\dagger} a_{\vec{q}}^{s\dagger} |0\rangle = -a_{\vec{q}}^{s\dagger} a_{\vec{p}}^{s\dagger} |0\rangle \quad \text{etc.} \Rightarrow \text{antisymmetrisch}$$

$\Rightarrow$  Dwaac-Teilchen gehorchen der Fermi-Dwaac-Statistik!

$$\text{insbesondere: } a_{\vec{p}}^{s\dagger} a_{\vec{p}}^{s\dagger} |0\rangle = 0 \quad (\text{Pauli-Prinzip})$$

Ladung:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i \not{\partial} - m) \psi \quad \text{invariant unter } \psi(x) \rightarrow e^{i\alpha} \psi(x)$$

$$\hookrightarrow \text{erhaltener Strom: } j^\mu(x) = \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x)$$

$$\partial_\mu j^\mu = (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi + \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi = im \bar{\psi} \psi - im \bar{\psi} \psi = 0 \quad \checkmark$$

$$\hookrightarrow \text{erhaltene Ladung: } Q = \int d^3 x j^0 = \int d^3 x \psi^\dagger \psi$$

$$\hookrightarrow Q = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \sum_s (a_{\vec{p}}^{s\dagger} a_{\vec{p}}^s - b_{\vec{p}}^{s\dagger} b_{\vec{p}}^s) \quad (\text{+ unev. Vakuumbeitrag})$$

=)  $a^\dagger$  und  $b^\dagger$  erzeugen Teilchen mit entgegengesetzter Ladung: Teilchen und Antiteilchen!

Spin:

Lorentz-Transf. (insbesondere Drehungen):

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = \Lambda_{1/2} \psi(\Lambda^{-1}x)$$

$$\Rightarrow \delta\psi(x) = \psi'(x) - \psi(x) = \dots$$

z.B. inf. Drehung um die z-Achse:

$$2) \delta\psi(x) = \theta \Delta\psi(x) = -\theta \left( \underbrace{x\partial_y - y\partial_x}_{\text{von } \Lambda^{-1}x} + \underbrace{\frac{i}{2}\Sigma^3}_{\text{von } \Lambda_{1/2}} \right) \psi(x)$$

$$\text{mit } \Sigma^3 = \sigma^{12} = \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix}$$

2) erhaltene „Ladungen“:

$$\vec{J} = \int d^3x \psi^\dagger \left( \underbrace{\vec{x} \times (-i\vec{\nabla})}_{\text{Bahndrehimpuls}} + \underbrace{\frac{1}{2}\vec{\Sigma}}_{\text{Spin}} \right) \psi$$

Man kann zeigen:

|   |  |
|---|--|
| $J_z a_0^{s\dagger}  0\rangle = \begin{cases} +\frac{1}{2} a_0^{s\dagger}  0\rangle \\ -\frac{1}{2} a_0^{s\dagger}  0\rangle \end{cases}$ | für $\xi^s = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ |
|   | " $\xi^v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$   |
| $J_z b_0^{s\dagger}  0\rangle = \begin{cases} -\frac{1}{2} b_0^{s\dagger}  0\rangle \\ +\frac{1}{2} b_0^{s\dagger}  0\rangle \end{cases}$ | " $\eta^s = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  |
|   | " $\eta^v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  |

→ Spin  $-\frac{1}{2}$ -Teilchen!

### III.6 Der Dirac-Propagator

Ausbreitungsamplituden:

$$\begin{aligned}
 \langle 0 | \psi_a(x) \bar{\psi}_b(y) | 0 \rangle &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \sum_s u_a^s(\vec{p}) \bar{u}_b^s(\vec{p}) e^{-i p \cdot (x-y)} \\
 &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} (\not{p} + m)_{ab} e^{-i p \cdot (x-y)} \\
 &= (i \not{\partial}_x + m)_{ab} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-i p \cdot (x-y)} \\
 &= (i \not{\partial}_x + m)_{ab} \mathbb{D}(x-y)
 \end{aligned}$$

↑ Klein-Gordon-Amplitude

analog:

$$\langle 0 | \bar{\psi}_b(y) \psi_a(x) | 0 \rangle = -(i \not{\partial}_x + m)_{ab} \mathbb{D}(y-x)$$

→ retardierter Propagator:

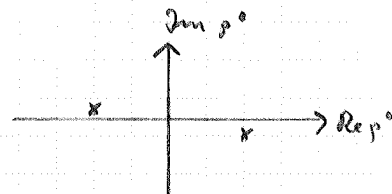
$$\begin{aligned}
 S_R^{ab}(x-y) &:= \Theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \{ \psi_a(x), \bar{\psi}_b(y) \} | 0 \rangle \\
 &= (i \not{\partial}_x + m)_{ab} \mathbb{D}_R(x-y)
 \end{aligned}$$

Feynman-Propagator: (→ Übung)

$$S_F(x-y) = \langle 0 | T \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle$$

$$= \begin{cases} \langle 0 | \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle & \text{falls } x^0 > y^0 \\ - \langle 0 | \bar{\psi}(y) \psi(x) | 0 \rangle & \text{" } y^0 > x^0 \end{cases}$$

$$= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-i p \cdot (x-y)}$$





- Minuszeichen beim zeitgeordneten Produkt für Fermionen!
- $\langle 0 | \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle \leftrightarrow$  Propagation von Teilchen  
 $\langle 0 | \bar{\psi}(y) \psi(x) | 0 \rangle \leftrightarrow$  " " Antiteilchen
- Def. avancierter Propagator  $S_A$  analog
- $S_F$ ,  $S_R$  und  $S_A$  sind Green'sche Funktionen zum Dirac-Operator, z. B.

$$(i \not{\partial}_x - m) S_F(x-y) = i \delta^4(x-y) \mathbb{1}_{4 \times 4} \quad (-) \text{ Übung}$$

### III.7 Diskrete Symmetrien

Symmetrietransformationen hängen allgemein mit unitären Transformationen von Zuständen zusammen:

$$|\phi\rangle \rightarrow |\phi'\rangle = U |\phi\rangle, \quad U^\dagger U = \mathbb{1}$$

$$\Rightarrow \langle \phi' | \phi' \rangle = \langle \phi | U^\dagger U | \phi \rangle = \langle \phi | \phi \rangle$$

$\leadsto$  Erwartungswerte von Operatoren.

$$\langle \phi | \hat{A} | \phi \rangle \rightarrow \langle \phi' | \hat{A} | \phi' \rangle = \langle \phi | U^\dagger \hat{A} U | \phi \rangle \equiv \langle \phi | \hat{A}' | \phi \rangle$$

$\leadsto$  Alternativ kann man das Transformationsverhalten der Operatoren betrachten:

$$A \rightarrow A' = U^\dagger A U$$

Verhalten von Dirac-Feldern (= Operatoren!) unter Lorentz-Transformationen ( $\rightarrow$  Abschnitt III.2.4):

$$U^\dagger(\Lambda) \psi(x) U(\Lambda) = \Lambda_{\frac{1}{2}} \psi(\Lambda^{-1}x)$$

$$\text{mit } \Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1} \gamma^\mu \Lambda_{\frac{1}{2}} = \Lambda^\mu_{\nu} \gamma^\nu$$

Für kontinuierliche Lorentz-Transformationen (Boosts und Drehungen) haben wir  $\Lambda_{\frac{1}{2}}$  schon konstruiert. Wir wollen uns jetzt mit diskreten Symmetrien beschäftigen:

i) Parität:  $x = \begin{pmatrix} x^0 \\ \vec{x} \end{pmatrix} \rightarrow x' = \begin{pmatrix} x^0 \\ -\vec{x} \end{pmatrix}$  ( $\rightarrow$  Abschn. III.2.3)

$$\Rightarrow (\Lambda^\mu_{\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}, \quad U(\Lambda) =: P$$

Wie sieht das zugehörige  $\Lambda_{\frac{1}{2}}$  aus?

Bei der Konstruktion der Dirac-Gleichung in Abschnitt III.2.3 haben wir gefunden

$$\psi = \begin{pmatrix} \phi_L \\ \phi_R \end{pmatrix} \xrightarrow{P} \begin{pmatrix} \phi_R \\ \phi_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_L \\ \phi_R \end{pmatrix} = \gamma^0 \psi,$$

wobei wir im letzten Schritt verwendet haben, dass wir dort in Weyl-Darstellung gearbeitet haben. Das legt nahe, dass  $\Lambda_{\frac{1}{2}} = \gamma^0$  auch in anderen Darstellungen die Spinortransformation unter Paritätstransformationen beschreibt.

Im der Tat gilt:

$$\gamma^0^{-1} \gamma^\mu \gamma^0 = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 = \begin{cases} \gamma^\mu, & \mu=0 \\ -\gamma^\mu, & \mu=1,2,3 \end{cases} = \Lambda^\mu_{\nu} \gamma^\nu \quad \checkmark$$

allgemeineren Ansatz:

Unter Paritätstransformationen gilt  $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$ ,  $s \rightarrow s$

$$\hookrightarrow P^\dagger a_{\vec{p}}^s P = \eta_a a_{-\vec{p}}^s, \quad P^\dagger b_{\vec{p}}^s P = \eta_b b_{-\vec{p}}^s$$

$\eta_a, \eta_b$  zunächst beliebige Phasenfaktoren

$$\Rightarrow P^\dagger \psi(x) P = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_s \left( \eta_a a_{-\vec{p}}^s u^s(\vec{p}) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} + \eta_b^* b_{-\vec{p}}^{s\dagger} v^s(\vec{p}) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right)$$

$$\text{Def. } \tilde{p} := \begin{pmatrix} p^0 \\ -\vec{p} \end{pmatrix} \Rightarrow p \cdot x = \tilde{p} \cdot \begin{pmatrix} t \\ -\vec{x} \end{pmatrix} = \tilde{p} \cdot \Lambda^{-1} x$$

Im Vogt-Darstellung gilt außerdem:  $u(\vec{p}) = \gamma^0 u(-\vec{p})$   
 $v(\vec{p}) = -\gamma^0 v(-\vec{p})$

$$\Rightarrow P^\dagger \psi(x) P = \int \frac{d^3 \tilde{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\tilde{p}}}} \sum_s \left( \eta_a a_{\tilde{p}}^s \gamma^0 u^s(\tilde{p}) e^{-i\tilde{p} \cdot \Lambda^{-1} x} - \eta_b^* b_{\tilde{p}}^{s\dagger} \gamma^0 v^s(\tilde{p}) e^{i\tilde{p} \cdot \Lambda^{-1} x} \right)$$

$$\stackrel{!}{=} \Lambda_{1/2} \psi(\Lambda^{-1} x)$$

$$\Rightarrow \eta_a = -\eta_b^* \equiv e^{i\alpha}, \quad \Lambda_{1/2} = e^{i\alpha} \gamma^0$$

$$\Rightarrow \boxed{P^\dagger \psi(t, \vec{x}) P = e^{i\alpha} \gamma^0 \psi(t, -\vec{x})}$$

$$P^\dagger a_{\vec{p}}^s P = e^{i\alpha} a_{-\vec{p}}^s, \quad P^\dagger b_{\vec{p}}^s P = -e^{-i\alpha} b_{-\vec{p}}^s$$

$$\Rightarrow P^\dagger a_{\vec{p}}^{\uparrow\dagger} b_{\vec{q}}^{s\dagger} P = P^\dagger a_{\vec{p}}^{\uparrow\dagger} P P^\dagger b_{\vec{q}}^{s\dagger} P = -a_{-\vec{p}}^{\uparrow\dagger} b_{-\vec{q}}^{s\dagger}$$

2) negative „innere Parität“ von Fermion-Antifermion-Paaren

übliche Konvention:  $e^{i\alpha} = 1$

ii) Zeitumkehr:  $(t, \vec{x}) \rightarrow (-t, \vec{x})$

Kompliziert: Zeitumkehroperator  $T$  antiunitär:

$$T^\dagger T = \mathbb{1}, \quad T(c\text{-Zahl}) = (c\text{-Zahl})^* T$$

$$\begin{aligned} T^\dagger \psi(t, \vec{x}) T &= -\gamma^1 \gamma^3 \psi(-t, \vec{x}) \\ T^\dagger a_{\vec{p}}^s T &= a_{-\vec{p}}^{-s}, \quad T^\dagger b_{\vec{p}}^s T = -b_{-\vec{p}}^{-s} \end{aligned}$$

(mit Majorana  
konvention  
 $\gamma_0 = 1$ )

iii) Ladungskonjugation:

wandelt Teilchen in Antiteilchen um (- keine Lorentz-Teil)

$$\begin{aligned} C^\dagger \psi(x) C &= -i \gamma^0 (\psi^\dagger(x))^T = -i \gamma^2 \gamma^0 \bar{\psi}^T(x) \\ C^\dagger a_{\vec{p}}^s C &= b_{\vec{p}}^s, \quad C^\dagger b_{\vec{p}}^s C = a_{\vec{p}}^s \end{aligned}$$

Bilineare:

$$\bullet \gamma_5 \equiv \gamma^5 := i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$$

$$\gamma_5^\dagger = \gamma_5, \quad \gamma_5^2 = \mathbb{1}, \quad \{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0$$

$$\bullet \text{ Die Matrizen } \mathbb{1}, \gamma_5, \{\gamma^\mu\}, \{\gamma^\mu \gamma_5\}, \{\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]\}$$

$$\left( \text{Anzahl: } \begin{array}{cccccc} 1 & + & 1 & + & 4 & + & 4 & + & 6 & = & 16 \end{array} \right)$$

bilden eine Basis der  $4 \times 4$ -Matrizen

$$\bullet \bar{\psi} \psi, \bar{\psi} i \gamma_5 \psi, \bar{\psi} \gamma^\mu \psi, \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi, \bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \psi$$

sind hermitesche Bilineare

Verhalten unter  $C, P, T$ :

|       | $\bar{\psi} \psi$ | $\bar{\psi} i \gamma_5 \psi$ | $\bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ | $\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi$ | $\bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \psi$ |
|-------|-------------------|------------------------------|------------------------------|---------------------------------------|-----------------------------------|
| $P$   | +1<br>(Skalar)    | -1<br>(Pseudoskalar)         | $(-1)^\mu$<br>(Vektor)       | $-(-1)^\mu$<br>(Axialvektor)          | $(-1)^\mu (-1)^\nu$<br>(Tensor)   |
| $T$   | +1                | -1                           | $(-1)^\mu$                   | $(-1)^\mu$                            | $-(-1)^\mu (-1)^\nu$              |
| $C$   | +1                | +1                           | -1                           | +1                                    | -1                                |
| $CPT$ | +1                | +1                           | -1                           | -1                                    | +1                                |

mit  $(-1)^\mu = \begin{cases} +1 & \text{für } \mu = 0 \\ -1 & \text{für } \mu = 1, 2, 3 \end{cases}$

Insbesondere gilt:

$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\partial - m) \psi$  ist separat invariant  
unter  $P, T$  und  $C$  ( $\rightarrow$  Übung)