IV. Das elektromagnetische Feld

IV. 1 Klassische kovariante Theorie des elektromagn. Feldes

(inhom.) Maxwell - Gleichungen: (vgl. Abschnitt I. 4. 1)

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \qquad \left((j^\mu) = \begin{pmatrix} \rho \\ \vec{j} \end{pmatrix} = \text{Vierer - \underline{Ladungsstrom}} = q \cdot \text{Teilchenstrom} \right)$$

mit

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \qquad (\text{Feldstärketensor})$$

$$(A^\mu) = \begin{pmatrix} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix} \qquad (\text{Viererpotential})$$

- Die homogenen Maxwell-Gln. $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$, $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$, gelten dann automatisch (vgl. $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$).

- Kontinuitätsgleichung:

$$\partial_\mu j^\mu = \partial_\mu \partial_\nu F^{\nu\mu} = 0 \quad , \text{ da } F^{\mu\nu} \text{ antisymm.}$$

- Eichtransformation: $A^\mu(x) \to A^\mu(x) + \partial^\mu f(x)$

$$\Rightarrow F^{\mu\nu} \to \partial^\mu (A^\nu + \partial^\nu f) - \partial^\nu (A^\mu + \partial^\mu f) = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = F^{\mu\nu}$$

invariant!

Insbesondere sind damit auch die Bewegungsgleichungen invariant unter Eichtransformationen.

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu \partial^\nu A^\mu = \Box A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu)$$

$$\Rightarrow \quad \Box A^\mu(x) - \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu(x)) = j^\mu(x)$$

...

- <u>Lagrange-Dichte:</u>

$$\boxed{\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j^\mu A_\mu}$$

$$\left(\Rightarrow \partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\alpha A_\beta} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\beta} = \ldots = -\partial_\alpha F^{\alpha\beta} \pm j^\beta = 0 \Rightarrow \partial_\alpha F^{\alpha\beta} = j^\beta \checkmark \right)$$

- <u>kanon. konj. Impulse:</u>

$$\pi^\mu(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu(x)} = -F^{0\mu}(x)$$

<u>Problem:</u> $\pi^0(x) = -F^{00}(x) = 0$

$\Rightarrow$ nicht ohne weiteres quantisierbar, da $[A^0(\vec{x}), \pi^0(\vec{y})] \overset{!}{=} i\delta^3(\vec{x}-\vec{y})$ $\lightning$

tieferer Grund: Die vier Komponenten von A^μ enthalten zu viele Freiheitsgrade
(Spin 1 $\Rightarrow$ nur drei Spinzustände,
Photonen sogar nur zwei)

2) <u>Ausweg</u> (Fermi):
Implementiere von vorn herein eine Eichbedingung, die die Zahl der Freiheitsgrade einschränkt:

$$\boxed{\partial_\mu A^\mu = 0} \qquad \text{(Lorenz-Eichung)}$$

und verwende die Lagrangedichte

$$\boxed{\mathcal{L} = -\frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) - j^\mu A_\mu}$$

2) Bewegungsgleichung: $\Box A^\mu(x) = j^\mu(x)$
(korrekt für $\partial_\mu A^\mu = 0$)

kanon. konj. Impuls: $\pi^\mu(x) = -\dot{A}^\mu(x)$ ✓

IV. 2 Quantisierung des elektromagnetischen Feldes

freies elektromagnet. Feld ($j^\mu(x) = 0$) in Lorenz-Eichung

$\Rightarrow \quad \mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu)$

$\Rightarrow \quad \Box A^\mu(x) = 0$ $\quad\hat{=}$ Klein-Gordon-Gl. für $m=0$
(für jede Komponente)

2) Fourierentwicklung: ($m = 0 \Rightarrow E_p = |\vec{p}|$)

$$\boxed{\begin{aligned} A^\mu(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda=0}^{3} \left(a_{\vec{p}}^\lambda \, \varepsilon_\lambda^\mu(\vec{p}) \, e^{-ip\cdot x} + a_{\vec{p}}^{\lambda\,\dagger} \, \varepsilon_\lambda^{\mu\,*}(\vec{p}) \, e^{ip\cdot x} \right) \\ &\equiv A^{\mu\,(+)}(x) + A^{\mu\,(-)}(x) \end{aligned}}$$

$\varepsilon_\lambda^\mu(\vec{p})$ = Polarisationsvektoren (→ E-Dynamik)

speziell Wahl:

$\varepsilon_0(\vec{p}) \equiv (n^\mu) := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ „skalare Polarisation"

$\varepsilon_i(\vec{p}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{\varepsilon}_i(\vec{p}) \end{pmatrix}, \quad \vec{\varepsilon}_i^{\,*} \cdot \vec{\varepsilon}_j = \delta_{ij}$

mit

$\vec{p} \cdot \vec{\varepsilon}_1(\vec{p}) = \vec{p} \cdot \vec{\varepsilon}_2(\vec{p}) = 0$ „transversale Polarisation"

$\vec{\varepsilon}_3(\vec{p}) = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$ „longitudinale "

Daraus ergibt sich:

$$\boxed{\begin{aligned} &\varepsilon^*_{\varrho\mu}(\vec{p})\,\varepsilon_\sigma{}^\mu(\vec{p}) = g_{\varrho\sigma} \equiv -\zeta_\varrho\,\delta_{\varrho\sigma}\,, \quad \zeta_\varrho = \begin{cases} -1\,, & \varrho = 0 \\ +1\,, & \varrho = 1,2,3 \end{cases} \\ &\sum_\varrho \zeta_\varrho\,\varepsilon_\varrho{}^{\mu *}(\vec{p})\,\varepsilon_\varrho{}^\nu(\vec{p}) = -g^{\mu\nu} \end{aligned}}$$

(gilt allgemein)

<u>allgemeinere Wahl:</u>

$$\varepsilon_0 = (n^\mu)\,, \qquad n_\mu n^\mu = 1$$

$$\varepsilon_3^\mu(\vec{p}) = \frac{p^\mu - (p\cdot n)\,n^\mu}{\left[(p\cdot n)^2 - p^2\right]^{1/2}}$$

<u>Quantisierungsvorschrift:</u>

- Photonen: Spin 1 $\Rightarrow$ Bosonen $\rightsquigarrow$ erwarten Kommutator
- $\pi^\mu(x) = -\dot{A}^\mu(x)$

$$\boxed{\begin{aligned} &[A^\mu(\vec{x}), \dot{A}^\nu(\vec{y})] = -i\,\delta^3(\vec{x}-\vec{y})\,g^{\mu\nu} \\ &[A^\mu(\vec{x}), A^\nu(\vec{y})] = [\dot{A}^\mu(\vec{x}), \dot{A}^\nu(\vec{y})] = 0 \end{aligned}}$$

- Faktor $g^{\mu\nu}$ wegen Kovarianz
- Vergleich mit Klein-Gordon:

$$[\phi(\vec{x}), \pi(\vec{y})] = [\phi(\vec{x}), \dot{\phi}(\vec{y})] = i\,\delta^3(\vec{x}-\vec{y})$$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{– umgekehrtes Vorzeichen für} & [A^0, \dot{A}^0] \\ \text{– gleiches} \quad \text{"} \quad \text{"} & [A^i, \dot{A}^i] \end{array}\right\} \text{vgl. } \mathcal{L} = -\tfrac{1}{2}\,\partial_\mu A_\nu\,\partial^\mu A^\nu$$

2.)
$$\boxed{\begin{aligned} &[a^\varrho_{\vec{p}}, a^{\sigma\,+}_{\vec{q}}] = -g_{\varrho\sigma}\,(2\pi)^3\,\delta^3(\vec{p}-\vec{q}) = \zeta_\varrho\,\delta_{\varrho\sigma}\,(2\pi)^3\,\delta^3(\vec{p}-\vec{q}) \\ &[a^\varrho_{\vec{p}}, a^\sigma_{\vec{q}}] = [a^{\varrho\,+}_{\vec{p}}, a^{\sigma\,+}_{\vec{q}}] = 0 \end{aligned}}$$

- Interpretation (wie üblich):

  $a_{\vec{p}}^{\lambda}$ = Vernichtungsoperator
  $a_{\vec{p}}^{\lambda\dagger}$ = Erzeugungsoperator

  Vakuum $|0\rangle$: $a_{\vec{p}}^{\lambda}|0\rangle = 0 \quad \forall\ \vec{p}, \lambda$

  $\Rightarrow A^{\mu(+)}(x)|0\rangle = 0$

- Hamilton-Operator:

  $$H = \int d^3x \left(\pi^{\mu}(x)\dot{A}_{\mu}(x) - \mathcal{L}(x) \right)$$

  $$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p \sum_{\lambda} \mathcal{J}_{\lambda}\, a_{\vec{p}}^{\lambda\dagger} a_{\vec{p}}^{\lambda} \qquad \text{(+ unendl. Vakuumbeitr.)}$$

  negative Beiträge von $\lambda = 0$? Nein!

  z.B. $|\vec{p}, \lambda\rangle = \mathcal{N}\, a_{\vec{p}}^{\lambda\dagger}|0\rangle$

  $\Rightarrow H|\vec{p},\lambda\rangle = \mathcal{J}_{\lambda}^2 E_p |\vec{p},\lambda\rangle = + E_p|\vec{p},\lambda\rangle$ ✓

- Norm der Ein-Teilchen-Zustände:

  $$\langle\vec{p},\lambda|\vec{p},\lambda\rangle = |\mathcal{N}|^2\langle 0|a_{\vec{p}}^{\lambda} a_{\vec{p}}^{\lambda\dagger}|0\rangle = \mathcal{J}_{\lambda}(2\pi)^3\delta^3(\vec{0})|\mathcal{N}|^2\langle 0|0\rangle$$

  negativ für $\lambda = 0$!

Ursache des Problems:

- klass. E-Dynamik, Beobachtung:
  nur transversale Polarisationen
  $\Rightarrow \lambda = 0$ und $\lambda = 3$ sind unphysikalisch!

- Grund: $\partial_{\mu}A^{\mu} = 0$ wurde noch nicht implementiert.

<u>Problem:</u> $\partial_\mu A^\mu = \partial_0 A^0 + \partial_k A^k = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{A}^0 = -\partial_k A^k$

$$\Rightarrow \; -i\,\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) = [A^0(\vec{x}), \dot{A}^0(\vec{y})] = -\frac{\partial}{\partial y^k}[A^0(\vec{x}), A^k(\vec{y})] = 0 \qquad \lightning$$

$\rightarrow$ $\partial_\mu A^\mu = 0$ kann keine Operator-Identität sein.

2) $\boxed{\text{Gupta \& Bleuler:} \quad \partial_\mu A^{\mu\,(+)}(x)\,|\Psi\rangle \overset{!}{=} 0 \quad \text{für alle physikal. Zustände } |\Psi\rangle}$

d.h. Einschränkung des erlaubten Zustandsraums, nicht der Operatoren.

$$\Rightarrow \langle\Psi|\partial_\mu A^\mu|\Psi\rangle = \underbrace{\langle\Psi|\partial_\mu A^{\mu\,(-)}}_{=0} + \underbrace{\partial_\mu A^{\mu\,(+)}|\Psi\rangle}_{=0} = 0$$

d.h. die Eichbedingung gilt für die Erwartungswerte der physikal. Zustände.

$\Rightarrow$ Maxwell-Gln. gelten im klassischen Limes.

- Gupta-Bleuler-Bedingung im Impulsraum:

$$\partial_\mu A^{\mu\,(+)}(x)|\Psi\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{(a^3_{\vec p} - a^0_{\vec p})\,|\Psi\rangle = 0} \quad (\rightarrow \text{Übung})$$

$$\Rightarrow \langle\Psi|a^{3\dagger}_{\vec p} a^3_{\vec p} - a^{0\dagger}_{\vec p} a^0_{\vec p}|\Psi\rangle = \langle\Psi|a^{3\dagger}_{\vec p}(a^3_{\vec p} - a^0_{\vec p}) + (a^{3\dagger}_{\vec p} - a^{0\dagger}_{\vec p})a^0_{\vec p}|\Psi\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle\Psi|H|\Psi\rangle = \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,E_p \sum_{\lambda=1,2}\langle\Psi|a^{\lambda\dagger}_{\vec p} a^\lambda_{\vec p}|\Psi\rangle}$$

d.h. nur transversale Photonen tragen zum Energie-Erwartungswert bei!

(gilt auch für alle anderen Observablen

$\Rightarrow$ Nur transversale Photonen sind beobachtbar.)

IV.3 Der Photon-Propagator

Analog zum Klein-Gordon-Fall findet man unter Verwendung von $\sum_\lambda \zeta_\lambda \varepsilon_\lambda^{\mu *}(\vec{p})\, \varepsilon_\lambda^{\nu}(\vec{p}) = -g^{\mu\nu}$

$$\langle 0 | A^\mu(x) A^\nu(y) | 0 \rangle = -g^{\mu\nu} D(x-y) \quad (\text{für } m \to 0)$$

↳ Feynman-Propagator:

$$\boxed{\begin{aligned} D_F^{\mu\nu}(x-y) &= \langle 0 | T A^\mu(x) A^\nu(y) | 0 \rangle \\ &= -g^{\mu\nu} D_F(x-y)\Big|_{m=0} \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{-i g^{\mu\nu}}{p^2 + i\varepsilon} e^{-i p\cdot(x-y)} \end{aligned}}$$

(mit bosonischem Zeitordnungsoperator)