

# Quantenfeldtheorie II

Priv.-Doz. Dr. M. Buballa  
D. Nitt und M. J. Steil



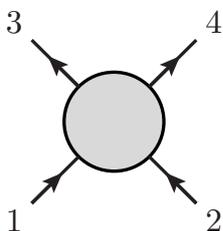
TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

Wintersemester 2019/2020

1. Übungsblatt

30. Oktober 2019

## Aufgabe 1: Mandelstam-Variablen



Betrachten Sie den Streuprozess  $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ : zwei Teilchen mit Vierer-Impulsen  $p_1$  und  $p_2$  und Massen  $m_1$  und  $m_2$  zu zwei Teilchen mit Vierer-Impulsen  $p_3$  und  $p_4$  und Massen  $m_3$  und  $m_4$ . Zeigen Sie, dass die Lorentz-invarianten Kontraktionen der Vierer-Impulse durch die drei Lorentz-invarianten Mandelstam-Variablen

$$s \equiv (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2 \quad (1.1)$$

$$t \equiv (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2 \quad (1.2)$$

$$u \equiv (p_1 - p_4)^2 = (p_2 - p_3)^2 \quad (1.3)$$

und die Teilchenmassen beschrieben werden können. Zeigen Sie des Weiteren, dass von diesen drei Variablen nur zwei linear unabhängig sind. In dieser Aufgabe verwenden wir für das Skalarprodukt von Vierer-Vektoren die Kompaktnotation  $p_i p_j \equiv (p_i)_\mu (p_j)^\mu$  bzw.  $p_i^2 \equiv (p_i)_\mu (p_i)^\mu$ .

## Aufgabe 2: Integrale für den Feynman Parameter Trick

Beweisen Sie die folgenden Integrale, welche bei der Verwendung des Feynman Parameter Tricks und dessen Verallgemeinerungen auftreten.

a) Zeigen Sie durch explizite Integration:

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 d\xi \frac{1}{(\xi A + (1-\xi)B)^2}. \quad (2.1)$$

b) Zeigen Sie durch Ableitung von Gl. (2.1):

$$\frac{1}{A^n B} = \int_0^1 d\xi \frac{n \xi^{n-1}}{(\xi A + (1-\xi)B)^{n+1}}. \quad (2.2)$$

c) Zeigen Sie durch Induktion für  $k \geq 2$ :

$$\frac{1}{A_1 \dots A_k} = \int \dots \int_{\xi_1, \dots, \xi_k \geq 0} d^k \xi \delta(\xi_1 + \dots + \xi_k - 1) \frac{(k-1)!}{(\xi_1 A_1 + \dots + \xi_k A_k)^k}. \quad (2.3)$$

d) Zeigen Sie durch Ableitung von Gl. (2.4):

$$\frac{1}{A_1^{n_1} \dots A_k^{n_k}} = \frac{(n_1 + \dots + n_k - 1)}{(n_1 - 1)! \dots (n_k - 1)!} \times \int \dots \int_{\xi_1, \dots, \xi_k \geq 0} d^k \xi \delta(\xi_1 + \dots + \xi_k - 1) \frac{\xi_1^{n_1-1} \dots \xi_k^{n_k-1}}{(\xi_1 A_1 + \dots + \xi_k A_k)^{n_1 + \dots + n_k}}. \quad (2.4)$$

### Aufgabe 3: Oberfläche der $d$ -Sphäre

Berechnen Sie die Oberfläche  $\Omega_d$  der  $d$ -dimensionalen Einheitssphäre. Hinweis: Eine Möglichkeit ist die Verwendung und Modifikation des Gauß'schen Integrals

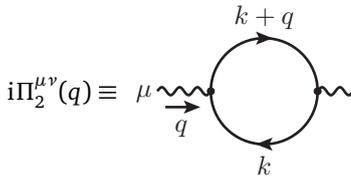
$$G \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-x^2}$$

unter Zuhilfenahme der Gamma Funktion

$$\Gamma(z) \equiv \int_0^{\infty} dx x^{z-1} e^{-x}. \quad (3.1)$$

### Aufgabe 4: Vakuum Polarisation des Photons in One-loop Näherung

In dieser Aufgabe soll der One-loop Beitrag zur Vakuum Polarisation des Photons



$$i\Pi_2^{\mu\nu}(q) \equiv \mu \text{---} \text{---} \text{---} \nu = (-ie)^2 (-1) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[ \gamma^\mu \frac{i}{\not{k} - m + i\epsilon} \gamma^\nu \frac{i}{\not{k} + \not{q} - m + i\epsilon} \right] \quad (4.1)$$

berechnet werden. Das vorliegende Integral ist UV divergent und muss daher regularisiert werden. Dazu soll in dieser Aufgabe Pauli-Villars (PV) Regularisierung verwendet werden: wir führen neben der physikalischen Masse  $m \equiv m_0$  mit dem Koeffizient  $c_0 = 1$ ,  $n$  zusätzliche Massenterme  $m_i$  mit Koeffizienten  $c_i$  ein. In PV Regularisierung wird aus Gl. (4.1)

$$i\Pi_2^{\mu\nu}(q) = \sum_{i=0}^n c_i e^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[ \gamma^\mu \frac{i}{\not{k} - m_i + i\epsilon} \gamma^\nu \frac{i}{\not{k} + \not{q} - m_i + i\epsilon} \right] \equiv \sum_{i=0}^n c_i i\Pi_2^{\mu\nu}(q, m_i). \quad (4.2)$$

Wir werden im Verlauf dieser Aufgabe zeigen, dass eine geeignete Wahl von  $c_i$  und  $m_i$  für  $i > 0$  das Integral im UV regularisiert.

- a) Berechnen Sie zuerst die Spur in  $i\Pi_2^{\mu\nu}(q, m_i)$  mit Hilfe der Identitäten

$$\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}, \quad (4.3)$$

$$\text{Tr}(\text{ungerade \# an } \gamma\text{-Matrizen}) = 0, \quad (4.4)$$

$$\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = 4(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}). \quad (4.5)$$

- b) Führen Sie einen Feynman Parameter  $x$  ein und zeigen Sie, dass nach einer Wick Rotation

$$i\Pi_2^{\mu\nu}(q, m_i) = -4ie^2 \int \frac{d^4 l_E}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{\frac{1}{2} g^{\mu\nu} l_E^2 + x(x-1)(2q^\mu q^\nu - g^{\mu\nu} q^2) + g^{\mu\nu} m_i^2}{(l_E^2 + \Delta_i)^2}, \quad (4.6)$$

mit  $\Delta_i \equiv m_i^2 - x(1-x)q^2$  und  $l \equiv k + xq$  gilt.

- c) Führen Sie das UV divergente euklidische Impulsintegral in Gl. (4.6) mit Hilfe eines Impuls-Cutoffs  $l_E^2 \leq \Lambda^2$  aus:

$$i\Pi_2^{\mu\nu}(q, m_i, \Lambda) \equiv -4ie^2 \int_{l_E^2 \leq \Lambda^2} \frac{d^4 l_E}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{\frac{1}{2} g^{\mu\nu} l_E^2 + x(x-1)(2q^\mu q^\nu - g^{\mu\nu} q^2) + g^{\mu\nu} m_i^2}{(l_E^2 + \Delta_i)^2}. \quad (4.7)$$

Zeigen Sie, dass in führender Ordnung

$$i\Pi_2^{\mu\nu}(q, m_i, \Lambda) \propto e^2 \Lambda^2 g^{\mu\nu} \quad (4.8)$$

gilt.

d) Verwenden Sie ihr Ergebnis aus Teilaufgabe c), um zu zeigen, dass die Wahl

$$\sum_{i=0}^n c_i = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{i=0}^n c_i m_i^2 = 0 \quad (4.9)$$

mit  $c_0 = 1$  und  $m_0 = m$  die explizite Cutoff-Abhängigkeit in

$$i\Pi_2^{\mu\nu}(q) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty, \Delta_i/\Lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^n c_i i\Pi_2^{\mu\nu}(q, m_i, \Lambda) \quad (4.10)$$

eliminiert. Zeigen Sie anschließend, dass nach geeigneter Wahl der Regularisierungsparameter

$$\Pi_2^{\mu\nu}(q) = e^2 J(q) \left( g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right), \quad \text{mit} \quad J(q) \equiv \frac{1}{2\pi^2} q^2 \int_0^1 dx x(1-x) \ln \left( \frac{m^2 + x(x-1)q^2}{M^2} \right), \quad (4.11)$$

mit  $M \equiv M(m_i, c_i)$  gilt. Bestimmen Sie mit diesem Ergebnis den One-loop Beitrag zur renormierten Ladung in PV Regularisierung.