Quantenfeldtheorie II

Priv.-Doz. Dr. M. Buballa
D. Nitt und M. J. Steil

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2019/2020
2. Übungsblatt — 8. November 2019

Aufgabe 5: Gauß'sche Integrale

In Aufgabe 3 haben wir bereits ein Gauß'sches Integral berechnet. In dieser Aufgabe wollen wir uns weiteren, höherdimensionalen Gauß'schen Integralen widmen, welche im Zusammenhang mit dem Pfadintegralformalismus benötigt werden.

a) Beweisen Sie, dass für das n-dimensionale Integral

$$Z_0 \equiv \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}^n x\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\vec{x}^{\mathrm{T}} A \vec{x}} = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\det(A)}}, \tag{5.1}$$

mit dem Spaltenvektor $\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ und der reellen, symmetrischen Matrix $A = A^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass für die Verallgemeinerung des Integrals Z_0

$$Z_1(\vec{J}) \equiv \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}^n x\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\vec{x}^{\mathrm{T}} A \vec{x} + \vec{x}^{\mathrm{T}} \vec{J}} = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\det(A)}} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\vec{J}^{\mathrm{T}} A^{-1} \vec{J}}, \tag{5.2}$$

mit $\vec{x}$ sowie A aus Teilaufgabe a) und dem Spaltenvektor $\vec{J} = (J_1, \cdots, J_n)^{\mathrm{T}}$ gilt.

c) Beweisen Sie mit Hilfe von $Z_1(\vec{J})$

$$I_{ij} \equiv \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}^n x\, x_i x_j \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\vec{x}^{\mathrm{T}} A \vec{x}} = Z_1(\vec{0})\big(A^{-1}\big)_{ij} = Z_0\big(A^{-1}\big)_{ij} \tag{5.3}$$

für $i, j \in [0, n]$.

Aufgabe 6: ϕ^4-Theorie in null Dimensionen

In null Dimensionen, d.h. auf einem einzigen Raum-Zeit-Punkt werden skalare Felder zu Skalaren, Pfadintegrale zu gewöhnlichen Integralen, Funktionale zu Funktionen, Funktionalableitungen zu gewöhnlichen Ableitungen und das Konzept eines Impulses existiert nicht mehr. Die erzeugende Funktion einer ϕ^4-Theorie auf einem einzigen Raum-Zeit-Punkt ist gegeben durch

$$Z(J) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{\phi^2}{2} - \lambda \frac{\phi^4}{4!} + J\phi}, \quad \text{mit} \quad \lambda \geq 0. \tag{6.1}$$

Dabei haben wir den in null Dimensionen bedeutungslosen Massenparameter der Einfachheit halber auf Eins gesetzt. Außerdem haben wir die Funktion in Anlehnung an eine euklidische Version des erzeugenden Funktionals definiert, welche man aus der aus der Vorlesung bekannten Minkowski-Raum-Version mittels einer Wick-Rotation gewinnen kann. Dadurch fällt der Faktor i im Exponenten heraus.

Trotz der extremen Vereinfachungen, welche mit der Betrachtung einer Feldtheorie in null Dimensionen einher gehen, existieren gewisse Aspekte der Feldtheorie weiterhin. Wir werden im Verlauf dieser Aufgabe einige dieser Aspekte thematisieren.

a) Zeigen Sie, dass n-Punkt Funktionen mit einer ungeraden Anzahl von externen Beinen verschwinden

$$G^{(2n+1)} \equiv \frac{1}{Z(0)} \frac{\mathrm{d}^{2n+1}}{\mathrm{d}J^{2n+1}} Z(J)\Big|_{J=0} = 0 \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}_0. \tag{6.2}$$

sowie

$$G^{(2n)} \equiv \frac{1}{Z(0)} \frac{\mathrm{d}^{2n}}{\mathrm{d}J^{2n}} Z(J)\Big|_{J=0} = \int \frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{2\pi}} \phi^{2n} \mathrm{e}^{-\frac{\phi^2}{2} - \frac{\phi^4}{4!}} \equiv \langle \phi^{2n} \rangle_{J=0} \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}_0 \tag{6.3}$$

gilt.

b) Über Ableitungen der sogenannten Schwinger Funktion $W(J) \equiv \ln Z(J)$ können verbundene n-Punkt Funktionen mittels

$$G_c^{(n)} \equiv \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}J^n} \ln Z(J)\Big|_{J=0} \tag{6.4}$$

berechnet werden. Berechnen Sie die ersten 5 verbundene n-Punkt Funktionen, $G_c^{(0)}, \dots, G_c^{(4)}$, und drücken Sie ihre Ergebnisse durch $Z(0)$, $\langle \phi^2 \rangle_{J=0}$ und $\langle \phi^4 \rangle_{J=0}$ aus.

c) Zeigen Sie, dass die Reihenentwicklung von $Z(0)$ um $\lambda = 0$ durch

$$Z(0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^n, \qquad \text{mit} \quad c_n = \frac{(-1)^n (4n)!}{24^n 2^{2n} (2n)! n!} \tag{6.5}$$

gegeben ist. Verwenden Sie dieses Ergebnis um zu zeigen, dass der Konvergenz-Radius dieser Reihe Null ist. Hinweis: Die in dieser Teilaufgabe auftretenden Integrale können mit der Identität

$$\left(\frac{\mathrm{d}^{2n}}{\mathrm{d}j^{2n}} \mathrm{e}^{\frac{1}{2} j^2} \right)_{j=0} = \frac{(2n)!}{2^n n!} \tag{6.6}$$

gelöst werden.

d) Entwickeln Sie $G_c^{(0)}, \dots, G_c^{(4)}$ aus Teilaufgabe b) bis zur Ordnung λ^2.

Aufgabe 7: Vierpunkt-Korrelator

Berechnen Sie, ausgehend von den Ergebnissen der Vorlesung für das erzeugende Funktional, den Vierpunkt-Korrelator

$$\langle \Omega | T\{\phi_H(x_1)\phi_H(x_2)\phi_H(x_3)\phi_H(x_4)\} | \Omega \rangle \tag{7.1}$$

des freien Klein-Gordon-Feldes sowie für die ϕ^4-Theorie in erster Ordnung Störungstheorie.