Quantenfeldtheorie II

Priv.-Doz. Dr. M. Buballa
D. Nitt und M. J. Steil

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2019/2020
3. Übungsblatt 22. November 2019

Aufgabe 8: Faddeev-Popov Methode für SO(2)

In dieser Aufgabe wollen wir die Faddeev-Popov Methode, welche in der Vorlesung für die Pfadintegralformulierung von QED mit der Eichgruppe U(1) vorgestellt wurde, anhand eines einfachen Beispiels, für welches wir eine gute geometrische Vorstellung haben, besprechen. Betrachten Sie hierzu im Folgenden das SO(2)-invariante

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{SO}(2)} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{8.1}$$

Integral

$$I \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, f(x,y), \quad \text{mit} \quad f(x,y) = f(x',y') \equiv f(r), \qquad r \equiv \sqrt{x^2+y^2}. \tag{8.2}$$

In diesem Fall lässt sich das zwei-dimensionale Integral aus Gl. (8.2) auf das ein-dimensionale, radiale Integral

$$I = 2\pi \int_0^\infty \mathrm{d}r\, r f(r) \equiv I_r \tag{8.3}$$

unter Verwendung von Polarkoordinaten reduzieren. Für komplizierte Symmetrien ist die Konstruktion derartiger Koordinaten extrem kompliziert und praktisch oft nicht nutzbar. Die Faddeev-Popov Methode ermöglicht eine Faktorisierung des Integrals, ohne dass eine explizite Konstruktion von geeigneten Koordinaten nötig ist. Es wird nur die Symmetrie und eine Eichfixierung, was in dieser Aufgabe einer Richtungs-Fixierung entspricht, benötigt.

a) Die Faddeev-Popov $\Delta_{\mathrm{FD}}(x,y)$ Determinante ist hier definiert über

$$1 = \Delta_{\mathrm{FD}}(x,y) \int_{\mathrm{SO}(2)} \mathrm{d}\mu(O)\delta(G(x',y')) = \Delta_{\mathrm{FD}}(x,y) \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\, \delta(G(x',y')), \tag{8.4}$$

wobei $G(x,y)$ so gewählt ist, dass es zu jedem Punkt (x,y) eine Rotation $O \in \mathrm{SO}(2)$ für welche $G(x',y') = 0$. Berechnen Sie $\Delta_{\mathrm{FD}}(x,y)$ und zeigen Sie, dass das Ergebnis SO(2)-invariant, $\Delta_{\mathrm{FD}}(x,y) = \Delta_{\mathrm{FD}}(r)$, ist.

Hinweis: Wählen Sie $G(x',y') = y'$ und machen Sie sich die geometrische Bedeutung dieser Richtungs-Fixierung klar. Machen Sie sich klar, warum sich jede andere Richtungs-Fixierung auf die Wahl $G(x',y') = y'$ abbilden lässt.

b) Schieben Sie Gl. (8.4) unter dem Integral in I ein und zeigen Sie

$$I = 2\pi \int_0^\infty \mathrm{d}x' x' f(x',0), \tag{8.5}$$

unter zu Hilfenahme der SO(2)-Invarianz von $\Delta_{\mathrm{FD}}(x,y)$ und $f(x,y)$.

Aufgabe 9: Dreipunktfunktion in QED

Berechnen Sie die Dreipunktfunktion

$$\langle 0|T\{\psi_a(x_1)\bar{\psi}_b(x_2)A_\mu(x_3)\}|0\rangle \tag{9.1}$$

für Quantenelektrodynamik in kovarianter Eichung

$$\mathcal{L}_{\mathrm{QED}} \equiv \bar{\psi}(\mathrm{i}\not{\partial} - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2 + e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu, \quad \text{mit} \quad F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{9.2}$$

in führender Ordnung $O(e^1)$ im Pfadintegralformalismus. Leiten aus ihrem Ergebnis die Feynman Regeln für QED im Ortsraum ab.

Aufgabe 10: Photon-Propagator in Coulomb Eichung

Berechnen Sie den Photon-Propagator $D^{\xi}_{\mu\nu}(k)$ mit Hilfe der Faddeev-Popov Methode in einer verallgemeinerten Coulomb Eichung

$$G(A) = \partial^i A_i - \omega = 0, \qquad i = 1,2,3. \tag{10.1}$$

a) Integrieren Sie dazu über die Hilfsfunktion ω mit Hilfe eines Gauß'schen Gewichtes der Breite ξ und zeigen Sie, dass die Bestimmungsgleichung für den Photon-Propagator durch

$$\left\{-k^2 g^{\mu\nu} + \left(1 - \frac{c^{\mu\nu}}{\xi}\right) k^\mu k^\nu\right\} D^{\xi}_{\nu\rho}(k) = \mathrm{i}\delta^\mu{}_\rho, \quad \text{mit} \quad c^{\mu\nu} \equiv (1-\delta_{\mu 0})(1-\delta_{\nu 0}) = \begin{cases} 0 & \text{für } \mu = 0 \\ 0 & \text{für } \nu = 0, \\ 1 & \text{sonst,} \end{cases} \tag{10.2}$$

gegeben ist.

b) Im Fall $\xi = 0$ ist der Photon-Propagator in Coulomb Eichung gegeben durch

$$D^{\xi=0}_{\mu\nu}(k) = -\frac{\mathrm{i}}{k^2 + \mathrm{i}\varepsilon}\left(g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{\vec{k}^2}\right)(1-\delta_{\mu 0})(1-\delta_{\nu 0}) + \frac{\mathrm{i}}{\vec{k}^2}\delta_{\mu 0}\delta_{\nu 0}. \tag{10.3}$$

Interpretieren Sie den $D^{\xi=0}_{00}(k)$ Beitrag im Ortsraum.