Quantenfeldtheorie II

Priv.-Doz. Dr. M. Buballa
D. Nitt und M. J. Steil

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2019/2020
4. Übungsblatt — 4. Dezember 2019

Aufgabe 11: Dyson-Schwinger Gleichung

a) Leiten Sie für eine skalare Theorie mit dem euklidischen, generierenden Funktional

$$Z[J] \equiv \int \mathcal{D}\phi \exp\left\{-S[\phi] + \int \mathrm{d}^4 z\, J(z)\phi(z)\right\} \tag{11.1}$$

die Dyson-Schwinger Gleichung

$$\left(-\frac{\delta S[\phi]}{\delta\phi(x)}\bigg|_{\phi(x)=\delta/\delta J(x)} + J(x)\right) Z[J] = 0 \tag{11.2}$$

her. Hinweis: Betrachten Sie hierzu das Verhalten von $Z[J]$ unter infinitesimale Variationen

$$\phi(z) \to \phi'(z) = \phi(z) + \epsilon\Delta\phi(z) + O(\epsilon^2). \tag{11.3}$$

b) Bringen Sie die Dyson-Schwinger Gleichung (11.2) in die Ihnen aus der Vorlesung bekannte Form

$$\langle\Omega|T\{\frac{\delta S}{\delta\phi(x)}\phi(x_1)\ldots\phi(x_n)\}|\Omega\rangle = \mathrm{i}\sum_{i=1}^{n}\langle\Omega|T\{\phi(x_1)\ldots\phi(x_{i-1})\delta^4(x-x_i)\phi(x_{i+1})\ldots\phi(x_n)\}|\Omega\rangle. \tag{11.4}$$

c) Berechnen Sie die Dyson-Schwinger Gleichungen für die Ein- und Zwei-Punkt-Funktionen

$$Z^{(1)}[J] \equiv \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x_1)}, \tag{11.5}$$

$$Z^{(2)}[J] \equiv \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)}, \tag{11.6}$$

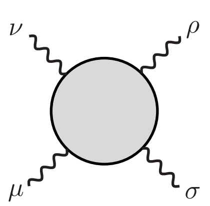
und bestimmen Sie durch Auswertung an $J = 0$ $Z^{(1)}[0]$ und $Z^{(2)}[0]$ für eine skalare Theorie mit der euklidischen Wirkung

$$S[\phi] = \int \mathrm{d}^4 z\left\{\frac{1}{2}\phi(z)(\Box + m^2)\phi(z) + \frac{\lambda}{4!}\phi(z)^4\right\}. \tag{11.7}$$

Aufgabe 12: Photon-Photon Streuung

Betrachten Sie die Photon-Photon Streuamplitude

$$\mathcal{M}^{\mu\nu\rho\sigma} = \tag{12.1}$$



welche einen oberflächlichen Divergenzgrad von $D = 4 - 4 - 0 = 0$ aufweist.

a) Argumentieren Sie mit Hilfe von Lorentz-Invarianz, Bose-Statistik, dem oberflächlichen Divergenzgrad $D = 0$ und der Ward Identität

$$p_\mu \mathcal{M}^{\mu\nu\rho\sigma} = 0, \tag{12.2}$$

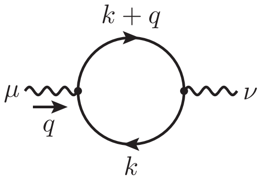
dass $\mathcal{M}^{\mu\nu\rho\sigma}$ keinen tatsächlich divergenten Anteil hat. p_μ ist, im Sinne der Ward Identität (vgl. Aufgabe 24, Blatt 7, QFT I SoSe 19), der Vierer-Impuls des Photons μ.

b) Verifizieren Sie das Ergebnis aus Teilaufgabe a) durch explizite Berechnung der sechs Diagramme führender Ordnung $O(e^4)$. Hinweis: Es genügt das Verschwinden des logarithmisch divergenten Anteils zu zeigen.

Aufgabe 13: Vakuum Polarisation des Photons in Ein-Loop Näherung die Zweite

In dieser Veranstaltung haben wir bereits verschiedene Regularisierungsvervahren für divergente Loop-Integrale kennengelernt. In Aufgabe 4 haben wir den Ein-Loop Beitrag zur Vakuum Polarisation des Photons

$$i\Pi_2^{\mu\nu}(q) \equiv$$



$$= (-ie)^2(-1)\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu \frac{i}{\not{k} - m + i\varepsilon}\gamma^\nu \frac{i}{\not{k}+\not{q} - m + i\varepsilon}\right] \tag{13.1}$$

$$= -4ie^2\int_0^1 dx \int \frac{d^4 l_E}{(2\pi)^4}\frac{-2l_E^\mu l_E^\nu + g^{\mu\nu}l_E^2 + x(x-1)(2q^\mu q^\nu - g^{\mu\nu}q^2) + g^{\mu\nu}m^2}{(l_E^2+\Delta)^2}, \tag{13.2}$$

mit $\Delta \equiv m^2 - x(1-x)q^2$ und $l \equiv k + xq$ in Pauli-Villars Regularisierung berechnet. Wir wollen das Integral (13.2) nun mit einem alternativen Regulariserungsverfahren, der sogenannten *dimensionalen Regularisierung* berechnen. Auf der nächsten Seite finden Sie eine Kurzeinführung des Verfahrens.

a) Zeigen Sie, dass in dimensionaler Regularisierung

$$\Pi_2^{\mu\nu}(q) = e^2 J(q)\left(g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2}\right), \tag{13.3}$$

mit

$$J(q) = -\frac{8q^2}{(4\pi)^{d/2}}\int_0^1 dx\,x(1-x)\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Delta^{2-d/2}} \tag{13.4}$$

$$\xrightarrow[d\to 4]{} -\frac{q^2}{2\pi^2}\int_0^1 dx\,x(1-x)\left(\frac{2}{\epsilon} - \ln(\Delta) - \gamma + \ln(4\pi) + O(\epsilon)\right), \qquad \epsilon \equiv d-4 \tag{13.5}$$

gilt

b) Bestimmen Sie mit Hilfe von $J(q)$ den divergenten Ein-Loop Beitrag zur renormierten Ladung in dimensionaler Regularisierung. Vergleichen Sie mit dem Ergebnis in Pauli-Villars Regularisierung aus Aufgabe 4d).

Dimensionale Regularisierung

Dimensionale Regularisierung ist eine Methode zur Berechnung divergenter Loop-Integrale. Das Verfahren geht zurück auf Bollini und Giambiagi[a] und 't Hooft und Veltman[b]. Dimensionale Regularisierung erhält Lorentz- und Eich-Invarianz und ist heutzutage weit verbreitet.

Die Idee ist ein D-dimensionales, divergentes euklidisches Impulsintegral als meromorphe Funktion des Parameters d, der analytischen Fortsetzung der Dimension D, zu berechnen. Typische Loop-Integrale konvergieren für hinreichend kleine $\mathrm{Re}(d)$ und können dann als meromorphe Funktionen zu beliebigen, komplexen d analytisch fortgesetzt werden. Üblicherweise findet man im Grenzfall $d \to D$ einen Pol, welcher durch Renormierung in physikalischen Observablen behandelt werden muss.

Betrachten wir zum Beispiel das euklidische Integral

$$I_d \equiv \int \frac{\mathrm{d}^d l_\mathrm{E}}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l_\mathrm{E}^2+\Delta)^2} = \int \frac{\mathrm{d}\Omega_d}{(2\pi)^d} \int_0^\infty \mathrm{d}l_\mathrm{E} \frac{l_\mathrm{E}^{d-1}}{(l_\mathrm{E}^2+\Delta)^2} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Delta^{2-d/2}}, \tag{D.1}$$

wobei wir den Ausdruck $\int \mathrm{d}\Omega_d = 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$ für die Oberfläche der d-dimensionalen Einheitssphäre und die Identität

$$\int_0^1 \mathrm{d}x x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \tag{D.2}$$

verwendet haben. Die Gamma-Funktion $\Gamma(z)$ hat isolierte Pole bei $z = 0, -1, -2, \ldots$ und daher hat I_d nach Gl. (D.1) Pole bei $d = 4, 6, 8, \ldots$. Für uns ist gerade $d \to D = 4$ von physikalischer Relevanz. Für diesen Grenzfall definieren wir $\epsilon \equiv D - d = 4 - d$ und mit Hilfe der Weierstraß-Produkt Darstellung

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{z}{n}\right) \mathrm{e}^{-z\ln(\frac{n+1}{n})} = z\mathrm{e}^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{z}{n}\right) \mathrm{e}^{-\frac{z}{n}}, \qquad \gamma \equiv \lim_{n\to\infty} \left(-\ln(n) + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\right) \approx 0.577 \tag{D.3}$$

wobei wir die Euler-Mascheroni-Konstante γ eingeführt haben, ergibt sich $\Gamma(2-\frac{d}{2}) = \frac{2}{\epsilon} - \gamma + O(\epsilon)$ und somit

$$I_d = \int \frac{\mathrm{d}^d l_\mathrm{E}}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l_\mathrm{E}^2+\Delta)^2} \xrightarrow[d\to 4]{} \frac{1}{(4\pi)^2}\left(\frac{2}{\epsilon} - \ln(\Delta) - \gamma + \ln(4\pi) + O(\varepsilon)\right). \tag{D.4}$$

Der $1/\epsilon$ Pol des dimensional regularisierten Integrals einspricht der logarithmischen Divergenz im Impulsintegral I_4. γ und $\ln(4\pi)$ tauchen nicht in Ausdrücken für Observablen auf.

In d Dimensionen gilt für die folgenden Kontraktionen

$$g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = \delta_\mu{}^\mu = d, \tag{D.5}$$
$$\gamma^\mu \gamma_\mu = d, \tag{D.6}$$
$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = -(d-2)\gamma^\nu, \tag{D.7}$$
$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu = 4g^{\nu\rho} - (4-d)\gamma^\nu\gamma^\rho, \tag{D.8}$$
$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu = -2\gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\nu + (4-d)\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma, \tag{D.9}$$

und im Zähler eines symmetrischen Integrals des Weiteren

$$l^\mu l^\nu \to \frac{1}{d} l^2 g^{\mu\nu}, \tag{D.10}$$
$$l^\mu l^\nu l^\rho l^\sigma \to \frac{1}{d(d+2)} (l^2)^2 (g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} + g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}). \tag{D.11}$$

[a] [C. G. Bollini and J. J. Giambiagi, *Dimensional Renormalization: The Number of Dimensions as a Regularizing Parameter*, Nuovo Cim B (1972) **12**: 20.]

[b] [G. 't Hooft and M. Veltman, *Regularization and renormalization of gauge fields*, Nucl. Phys. B (1972) **44** (1): 189–213]